Владикавказский математический журнал
2010, Том 12, Выпуск 3, С. 30–40

УДК **519.17+512.54**

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С ПАРАМЕТРАМИ (396,135,30,54)[1]

М. М. Исакова, А. А. Махнев

В работе найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами (396,135,30,54). Эти результаты будут полезны для изучения автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами (640,243,66,108) (в таком графе вторые окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (396,135,30,54)).

Ключевые слова: сильно регулярный граф, автоморфизм графа, подграф неподвижных точек автоморфизма.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $[a] = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины a*.

Через k_a обозначим *степень вершины a*, т. е. число вершин в $[a]$. Граф Γ называется *регулярным степени k*, если $k_a = k$ для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *сильно регулярным с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ — регулярный граф степени k на v вершинах, в котором каждое ребро лежит точно в λ треугольниках и для любых двух несмежных вершин a, b верно равенство $|[a] \cap [b]| = \mu$.

Через $K_{n\times m}$ обозначим полный n-дольный граф с долями порядка m. Граф на множестве пар $X \times Y$ называется *$p \times q$-решеткой*, если $|X| = p$, $|Y| = q$, а пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$.

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (640,243,66,108), a — вершина графа Γ. Тогда Γ имеет собственные значения $k = 243$, $r = 3$, $s = -45$ и достигается равенство во втором условии Крейна: $(s + 1)(k + s + 2rs) \leqslant (k + s)(r + 1)^2$. Поэтому $[a]$ является сильно регулярным графом с параметрами (243,66,9,21) и $\Gamma_2(a)$ — сильно регулярный граф с параметрами (396,135,30,54) [1, теорема 8.15]. Таким образом, для исследования автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами (640,243,66,108) необходимо изучить автоморфизмы сильно регулярных графов с параметрами (243,66,9,21) и (396,135,30,54).

В работе найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами (396,135,30,54).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальный исследований, проект № 08-01-00009.

Теорема. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(396, 135, 30, 54)$, g *— автоморфизм простого порядка* p *графа* Γ, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф,* $p \in \{2, 3, 11\}$;

(2) Ω *является* n*-кликой, и либо* $p = 5$, $n = 1$ *и* $\alpha_1(g) \in \{15, 165, 315\}$, *либо* $p = 13$, $n = 6$ *и* $\alpha_1(g) = 0$, *либо* $p = 2$, $n \in 4, 6$ *и* $\alpha_1(g) - 3n - 12$ *делится на 60;*

(3) Ω *является* $3t$*-кокликой,* $p = 3$, $\alpha_1(g) = 9t + 90r + 42$, $r \in \{0, 1, \ldots, 3\}$ *и* $t \leqslant 14$;

(4) Ω *— объединение* $l \geqslant 2$ *изолированных ребер,* $p = 2$, $6l - \alpha_1(g) + 12$ *делится на 60, и* $l \leqslant 21$;

(5) $p = 13$, *либо* $|\Omega| = 32$ *и* $\alpha_1(g) = 78$, *либо* $|\Omega| = 45$ *и* $\alpha_1(g) = 117$, *либо* $|\Omega| = 58$ *и* $\alpha_1(g) = 156$, *либо* $|\Omega| = 71$ *и* $\alpha_1(g) = 195$;

(6) $p = 11$, *либо* $|\Omega| = 66$ *и* $\alpha_1(g) = 0$, *либо* $|\Omega| = 77$ *и* $\alpha_1(g) = 33$, *либо* $|\Omega| = 88$ *и* $\alpha_1(g) = 66$, *либо* $|\Omega| = 99$ *и* $\alpha_1(g) = 99$;

(7) $p = 7$ *и либо*

(*i*) $|\Omega| = 116$ *и* $\alpha_1(g) = 0$, *либо*

(*ii*) $|\Omega| = 81$, $\alpha_1(g) = 105$ *и на* $\Gamma - \Omega$ *имеются* 45 *семиугольных* $\langle g\rangle$*-орбит, либо*

(*iii*) $|\Omega| \in \{74, 67, 60, 53, 39, 32\}$ *и* $\alpha_1(g) \in \{84, 63, 42, 21, 189, 168\}$ *соответственно, либо*

(*iv*) $|\Omega| = 46$ *и* $\alpha_1(g) \in \{0, 210\}$;

(8) $p = 5$, $|\Omega| = 5r + 1$, $4 \leqslant r \leqslant 19$ *и* $\alpha_1(g) + 15r + 15$ *делится на 150;*

(9) $p = 3$, $|\Omega| = 3t$, $\alpha_1(g)/18 - (t + 3)/2$ *делится на 3 и* $2 \leqslant t \leqslant 24$ *или* $t \in \{27, 33\}$;

(10) $p = 2$, $|\Omega| = 2t$, $t \geqslant 3$, $(\alpha_1(g) - 12 - 6t)/30$ *четно и либо* $t \leqslant 78$, *либо* $t = 88$.

1. Предварительные результаты

В этом параграфе приведены некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), Δ *— индуцированный подграф с* N *вершинами,* M *ребрами и степенями вершин* $d_1, \ldots, d_N$. *Тогда* $(v-N)-(kN-2M)+\lambda M+\mu\big(\binom{N}{2}-M\big)-\sum\binom{d_i}{2} = x_0+\sum\binom{i-1}{2}x_i$ *и* $(\sum ix_i)^2 \leqslant \sum x_i \sum i^2x_i$, *где* x_i *— число вершин из* $\Gamma - \Delta$, *смежных точно с* i *вершинами из* Δ.

$\lhd$ Подсчитав число вершин в $\Gamma - \Delta$, число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ и число 2-путей с концами в Δ и средней вершиной в $\Gamma - \Delta$, получим равенства $v - N = \sum x_i$, $kN - 2M = \sum ix_i$ и $\lambda M + \mu(\binom{N}{2} - M) - \sum_{i=1}^{N}\binom{d_i}{2} = \sum\binom{i}{2}x_i$.

Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим равенство из заключения леммы.

Квадратный трехчлен $\sum(i - x)^2x_i = \sum i^2x_i - 2x\sum ix_i + x^2\sum x_i$ неотрицателен. Поэтому дискриминант квадратного трехчлена $(\sum ix_i)^2 - \sum x_i \sum i^2x_i$ неположителен. $\rhd$

Лемма 1.2. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с целыми собственными значениями,* g *— автоморфизм графа* Γ *простого порядка* p *и* χ *— характер проекции мономиального представления на подпространство размерности* m *собственных векторов матрицы смежности графа, отвечающих неглавному собственному значению. Тогда* $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого* l, *не кратного* p *и* $m - \chi(g)$ *делится на* p.

$\lhd$ Эта лемма следует из леммы 3 и предложения 2 [2], примененного к циклической группе $\langle g\rangle$. $\rhd$

Лемма 1.3. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(396, 135, 30, 54)$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Γ *содержит регулярный подграф* Δ *степени* d *на* w *вершинах, то* $-15 \leqslant d-(66-d)w/(243-w) \leqslant 3$, *причем в случае равенства каждая вершина из* $\Gamma-\Delta$ *смежна точно с* $(66 - d)w/(243 - w)$ *вершинами из* Δ;

(2) *порядок коклики в* Γ *не больше* 44, *порядок клики в* Γ *не больше* 6*;*

(3) *значение характера, полученного при проектировании мономиального представления на подпространство размерности* 44, *на элементе* $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *равно* $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/3)/10 + 22/5$, *и* $44 - \chi_2(g)$ *делится на* p.

$\lhd$ Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(396, 135, 30, 54)$ и собственными значениями 3, -27 кратностей 351, 44. Если Γ содержит регулярный подграф Δ степени d на w вершинах, то по лемме 1.2 из [3] имеем $-27 \leqslant d-(135-d)w/(396-w) \leqslant 3$.

Ввиду границы Цветковича [4, теорема 0.2] порядок коклики в Γ не больше 44. Ввиду границы Хофмана порядок клики L в Γ не больше 6, причем в случае равенства каждая вершина из $\Gamma - L$ смежна точно с 2 вершинами из L.

По лемме 2.7 из [3] значение характера, полученного при проектировании мономиального представления на подпространство размерности 44, на элементе $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ равно $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) - \alpha_1(g) \cdot 3)/10 + 22/5$. По лемме 1.2 число $44 - \chi_2(g)$ делится на p. $\rhd$

Лемма 1.4. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(396, 135, 30, 54)$, U *— трехвершинный подграф из* Γ, Y_i *— множество вершин из* $\Gamma - U$, *смежных точно с* i *вершинами из* U, $y_i = |Y_i|$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *для двух вершин* u, w *подграф* $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(u^g)$ *содержит* 178 *вершин, если* u, w *не смежны,* 156 *вершин, если* u, w *смежны;*

(2) *число* $y_0 + y_3$ *равно* 150, *если* U *является кокликой, равно* 81, *если* U *является кликой;*

(3) *число* $y_0 + y_3$ *равно* 105, *если* U *является* 2*-путем, равно* 128, *если* U *является объединением изолированной вершины и ребра.*

$\lhd$ Для двух несмежных вершин u, w граф Γ содержит 54 вершины из $[u] \cap [w]$, по 81 вершин из $[u] - [w]$, $[w] - [u]$ и 178 вершин из $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(u^g)$. Для смежных вершин u, w граф Γ содержит 30 вершин из $[u] \cap [w]$, по 104 вершин из $[u] - w^\perp$, $[w] - u^\perp$ и 156 вершин из $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(u^g)$.

Если U является 3-кокликой, то Γ содержит $3(54 - y_3)$ вершин из Y_2, $3(27 + y_3)$ вершин из Y_1 и $150 - y_3$ вершин из Y_0, поэтому $y_0 + y_3 = 150$. Аналогично доказывается, что $y_0 + y_3 = 81$, если U является кликой.

Если U является геодезическим 2-путем $u_1 u_2 u_3$, то Y_2 содержит $53 - y_3$ вершин из $[u_1] \cap [u_3]$, и по $30 - y_3$ вершин из $[u_1] \cap [u_2]$, $[u_2] \cap [u_3]$, Y_1 содержит $73 + y_3$ вершин из $[u_2]$, и по $51 + y_3$ вершин из $[u_1]$, $[u_3]$, Y_0 содержит $105 - y_3$ вершин, поэтому $y_0 + y_3 = 105$.

Если U является объединением изолированной вершины u_1 и ребра $\{u_2, u_3\}$, то Y_2 содержит $30 - y_3$ вершин из $[u_2] \cap [u_3]$, и по $54 - y_3$ вершин из $[u_1] \cap [u_2]$, $[u_1] \cap [u_3]$, Y_1 содержит $27 + y_3$ вершин из $[u_1]$, и по $50 + y_3$ вершин из $[u_2]$, $[u_3]$, Y_0 содержит $128 - y_3$ вершин, поэтому $y_0 + y_3 = 128$. $\rhd$

Лемма 1.5. *Пусть* Δ *является графом с* p *вершинами, допускающим автоморфизм* g *порядка* p. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* $p = 13$ *и степень графа* Δ *равна* 4, *то* Δ *содержит* 4*-коклику;*

(2) *если* $p = 11$, *степень графа* Δ *равна* 4 *и* Δ *не содержит* 3*-клик, то можно считать, что вершина* u *из* Δ *смежна с* u^g *и с* u^{g^3} *или с* u^{g^4}.

$\lhd$ Пусть $p = 13$ и степень графа Δ равна 4. Без ограничения общности можно считать, что вершина u из Δ смежна с u^g и с u^{g^i} для некоторого $i \in \{2, 3, \ldots, 6\}$. В каждом из этих случаев Δ содержит 4-коклику.

Второе утверждение леммы получается простыми вычислениями. $\rhd$

2. Автоморфизмы графа с параметрами $(396, 135, 30, 54)$

До конца работы будем предполагать, что Γ является сильно регулярным графом с параметрами (396,135,30,54). Пусть g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 2.1. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф, то либо $p = 11$ и $\alpha_1(g) = 132$, либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) \in \{72, 162, 252, 342\}$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) \in \{12, 72, 132, 192, 252, 312, 372\}$;*

(2) *если Ω является n-кликой, то либо $p = 5$, $n = 1$ и $\alpha_1(g) \in \{15, 165, 315\}$, либо $p = 13$, $n = 6$ и $\alpha_1(g) = 0$, либо $p = 2$, $n \in 4, 6$ и $\alpha_1(g) - 3n - 12$ делится на 60;*

(3) *если Ω является m-кокликой, $m \geqslant 2$, то $p = 3$, $m = 3t$, $\alpha_1(g) = 9t + 90r + 42$, $r \in \{0, 1, \ldots, 3\}$ и $t \leqslant 14$;*

(4) *если Ω — объединение $l \geqslant 2$ изолированных клик порядков $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_l$, но Ω не является кокликой, то $p = 2$, $n_1 = \ldots = n_l = 2$, $6l - \alpha_1(g) + 12$ делится на 60, и $l \leqslant 21$.*

$\lhd$ Пусть Ω — пустой граф. Так как $396 = 4 \cdot 9 \cdot 11$, то $p \in \{2, 3, 11\}$.

Если $p = 11$, то по целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g)/11 - 12$ делится на 30, поэтому $\alpha_1(g) = 132$.

Если $p = 3$, то $\chi_2(g) = -\alpha_1(g)/30 + 22/5$, и по лемме 1.3 число $44 - \chi_2(g)$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) + 18$ делится на 90 и $\alpha_1(g) \in \{72, 162, 252, 342\}$.

Если $p = 2$, то по лемме 1.3 число $\alpha_1(g) = 60r + 12$, поэтому $\alpha_1(g) \in \{12, 72, 132, 192, 252, 312, 372\}$. Утверждение (1) доказано.

Пусть X_i — множество вершин из $\Gamma - \Omega$, смежных точно с i вершинами из Ω, $x_i = |X_i|$.

Пусть Ω является n-кликой. Ввиду границы Хофмана для клик имеем $n \leqslant 6$. Если $n = 1$, то p делит 135 и 260, поэтому $p = 5$. По лемме 1.3 число $\alpha_1(g) - 15$ делится на 150, поэтому $\alpha_1(g) \in \{15, 165, 315\}$.

Если $n \geqslant 2$, то p делит 104, 156 и $32 - n$, поэтому $p = 2$ или $p = 13$. Если $p = 13$, то $n = 6$ и $\chi_2(g) = 5 - \alpha_1(g)/30$, поэтому $\alpha_1(g) \in \{0, 390\}$. Но в последнем случае каждая $\langle g \rangle$-орбита длины 13 является кликой, противоречие. Если $p = 2$, то $n \in \{4, 6\}$, каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω и $\alpha_1(g) - 3n - 12$ делится на 60. Утверждение (2) доказано.

Пусть Ω является m-кокликой, $m \geqslant 2$. Ввиду границы Цветковича для коклик имеем $m \leqslant 44$. Далее, p делит 54, 135 и $180 - m$, поэтому $p = 3$ и $m = 3t$. Так как λ и μ делятся на 3, то для любой вершины $u \in \Gamma - \Omega$ число $|[u] \cap \Omega|$ делится на 3. По лемме 1.3 число $9t - \alpha_1(g) + 42$ делится на 90, поэтому $\alpha_1(g) = 9t + 90r + 42$, $r \in \{0, 1, \ldots, 3\}$ и $t \leqslant 14$. Утверждение (3) доказано.

Пусть Ω содержит ребро и является объединением l изолированных клик порядков $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_l$, $l \geqslant 2$. Тогда p делит 54. Если a, b — смежные вершины из Ω, то g действует без неподвижных точек на $[a] - b^{\perp}$, поэтому p делит 104. Отсюда $p = 2$ и $n_i \in \{2, 4\}$. По лемме 1.3 число $3\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 12$ делится на 60.

Пусть Δ является 4-кликой из Ω, $y_i = x_i(\Delta)$. По лемме 1.1 имеем $\sum y_i = 392$, $2y_2 + 4y_4 = 528$, $y_2 + 6y_4 = 6 \cdot 28 = 168$, противоречие.

Значит, $n_1 = 2$, по лемме 1.3 имеем $75l \leqslant 396 \cdot 4$, поэтому $l \leqslant 21$. $\rhd$

В леммах 2.2–2.4 предполагается, что Ω содержит геодезический 2-путь abc.

Лемма 2.2. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) Γ *не содержит собственных сильно регулярных подграфов с $\lambda = 30$, $\mu = 54$ и $|\Omega|$ не больше 178 (не больше 156, если $\alpha_1(g) \neq 0$);*

(2) *если $p > 2$ и $|\Omega| > 105$, то $\alpha_1(g) = 0$;*

(3) *если* $\alpha_1(g) = 0$, *то* $\alpha_0(g) + 4$ *делится на* 10, *и* $\alpha_0(g) - 9 \cdot 44$ *делится на* $10p$;

(4) *если* $a \in \Omega$ *и* $[a]$ *содержится в* Ω, *то* $\Omega = a^\perp$ *и* $p \in \{2, 13\}$.

$\lhd$ Пусть Γ содержит собственный сильно регулярный подграф Δ с параметрами $(v', k', 30, 54)$. Тогда $4(k' - 54) + 24^2 = n^2$ для некоторого натурального числа n. Отсюда $n = 24$, 28 и $k' = 54$, 106 соответственно. Но во втором случае 54 не делит $k'(k' - 31)$, а в первом Δ — полный многодольный граф, противоречие. Теперь утверждение (1) следует из леммы 1.4.

Пусть U — трехвершинный подграф из $u^{\langle g\rangle}$, Y_i — множество вершин из $\Gamma - U$, смежных точно с i вершинами из U, $y_i = |Y_i|$. Из леммы 1.4 следует, что $|\Omega| \leqslant 105$, если $u^{\langle g\rangle}$ содержит геодезический 2-путь. В случае $|\Omega| \geqslant 106$ подграф $u^{\langle g\rangle}$ не содержит геодезических 2-путей и является кокликой. Утверждение (2) доказано.

Пусть $\alpha_1(g) = 0$. Тогда по целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_0(g) + 4$ делится на 10, а по лемме 1.3 число $\alpha_0(g) - 9 \cdot 44$ делится на $10p$. Утверждение (3) доказано.

Пусть для некоторой вершины $a \in \Omega$ имеем $[a] \subset \Omega$. Тогда для $u \in \Gamma - \Omega$ получим $|[u] \cap \Omega| = 54$, $u^{\langle g\rangle}$ является кокликой, поэтому $\alpha_1(g) = 0$. Для $b \in \Omega - a^\perp$ подграф $[b]$ не пересекает $\Gamma - \Omega$, поэтому $[u] \cap [b]$ содержится в Ω и совпадает с $[a] \cap [u] = [a] \cap [b]$. Противоречие с тем, что любые две вершины из $[u] \cap (\Gamma - \Omega)$ смежны с u и с 54 вершинами из $[a] \cap [b]$.

Значит, $a^\perp = \Omega$, p делит 260 и 104, поэтому $p \in \{2, 13\}$. $\rhd$

Лемма 2.3. *Если* $p \geqslant 3$, *то* $|\Omega| \leqslant 153 - p$. *Далее,* $p \leqslant 29$.

$\lhd$ Если $p > 53$, то Ω — сильно регулярный подграф с параметрами $(v', k', 30, 54)$, противоречие с леммой 2.2. Если $p > 29$, то Ω — подграф с $\lambda_\Omega = 30$.

Пусть $p \geqslant 3$. Если $|\Omega| > 105$, то по лемме 2.2 любая орбита $u^{\langle g\rangle}$ является кокликой. Поэтому для любой 3-коклики U из $u^{\langle g\rangle}$ подграф $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит Ω и $p - 3$ вершин из $u^{\langle g\rangle} - U$. Значит, $|\Omega| \leqslant 150 - (p - 3)$.

Пусть $p = 53$. Тогда число $|\Omega|$ сравнимо с 25 по модулю 53, поэтому $|\Omega| \in \{25, 78\}$. Далее, степень вершины в графе Ω равна 29 или 82. Поэтому Ω — регулярный граф степени 29 на 78 вершинах, противоречие с тем, что $\lambda_\Omega = 30$.

Пусть $p = 47$. Тогда $|\Omega|$ сравнимо с 20 по модулю 47, поэтому $|\Omega| = 67$. Далее, степень вершины в графе Ω равна 41, противоречие.

Пусть $p = 43$. Тогда $|\Omega|$ сравнимо с 9 по модулю 43, поэтому $|\Omega| \in \{52, 95\}$. Далее, степень вершины в графе Ω равна 49 или 92. Поэтому Ω — регулярный граф степени 49 на 95 вершинах, противоречие.

Пусть $p = 41$. Тогда $|\Omega|$ сравнимо с 27 по модулю 41, поэтому $|\Omega| \in \{27, 68\}$. Далее, степень вершины в графе Ω равна 53. Поэтому Ω — реберно регулярный граф с параметрами (68,53,30), противоречие.

Пусть $p = 37$. Тогда $|\Omega|$ сравнимо с 26 по модулю 37, поэтому $|\Omega| \in \{63, 100\}$. Далее, степень вершины в графе Ω равна 61 или 98. Поэтому Ω — реберно регулярный граф с параметрами (100,61,30). Для $a \in \Omega$ число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $61 \cdot 30 = 17x + 54(38 - x)$, поэтому $x = 6$, противоречие с тем, что вершина из $\Omega - a^\perp$, смежная с 17 вершинами из $\Omega(a)$, смежна с 44 вершинами из $\Omega - a^\perp$.

Пусть $p = 31$. Тогда $|\Omega|$ сравнимо с 24 по модулю 31, поэтому $|\Omega| \in \{55, 86, 117\}$. Далее, степень вершины в графе Ω равна 42 или 73. Поэтому Ω — реберно регулярный граф с параметрами (86,42,30) или (117,42,30). Пусть $a \in \Omega$.

В первом случае число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $42 \cdot 11 = 23x + 54(43 - x)$, поэтому $x = 60$, противоречие. Во втором случае число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $42 \cdot 11 = 23x + 54(43 - x)$, поэтому $x = 114$, противоречие. $\rhd$

Лемма 2.4. *Число* p *не больше* 13.

$\lhd$ Пусть $p = 29$. Тогда $|\Omega|$ сравнимо с 19 по модулю 29, поэтому $|\Omega| \in \{19, 48, 77, 106\}$. Далее, степень вершины в графе Ω равна 19 или 48. Для двух несмежных вершин $a, b \in \Omega$ имеем $|\Omega(a) \cap [b]| \in \{25, 54\}$. Если $|\Omega| = 77$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(77, 48, 30, 25)$, противоречие.

Значит, Ω — кореберно регулярный граф с параметрами (106,48,25), Для $a \in \Omega$ число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $57 \cdot 25 = 17x + 46(48 - x)$, поэтому $x = 27$, противоречие с тем, что $\Omega(a)$ содержит 21 вершин степени 1.

Пусть $p = 23$. Тогда $|\Omega|$ сравнимо с 15 по модулю 23, поэтому $|\Omega| \in \{15, 38, 61, 84, 107, 130\}$. Но в случаях $|\Omega| \in \{107, 130\}$ имеем $\alpha_1(g) = 0$, противоречие с тем, что $\alpha_0(g) + 4$ делится на 10. Далее, степень вершины в графе Ω равна 20 или 43. Для двух вершин $a, b \in \Omega$ число $|\Omega(a) \cap [b]|$ принадлежит $\{7, 30\}$, если a, b смежны, принадлежит $\{8, 31\}$, если a, b не смежны.

Пусть Ω содержит вершину a степени 20. Тогда число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $20 \cdot 12 = 8(|\Omega| - 21)$, противоречие. Итак, Ω — регулярный граф степени 43 на 84 вершинах. Поэтому $\lambda_\Omega = 30$ и для $a \in \Omega$ число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $43 \cdot 12 = 8x + 31(40 - x)$, следовательно, $x = 28$. Теперь вершина из $\Omega - a^\perp$, смежная с 8 вершинами из $\Omega(a)$, смежна с 35 вершинами из $\Omega - a^\perp$. Противоречие с тем, что вершины из $\Omega - a^\perp$, смежные с 8 вершинами из $\Omega(a)$, образуют 28-клику.

Пусть $p = 19$. Тогда $|\Omega|$ сравнимо с 16 по модулю 23, поэтому $|\Omega| \in \{16, 35, 54, 73, 92, 111, 130\}$. Но в случаях $|\Omega| = 111$ и $|\Omega| = 130$ имеем $\alpha_1(g) = 0$, противоречие с тем, что $\alpha_0(g) + 4$ делится на 10. Далее, степень вершины в графе Ω равна 2, 21, 40 или 59. Для двух вершин $a, b \in \Omega$ число $|\Omega(a) \cap [b]|$ принадлежит $\{11, 30\}$, если a, b смежны, принадлежит $\{16, 35, 54\}$, если a, b не смежны. Если Ω содержит вершину a степени 21, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $21 \cdot 9 = 16(|\Omega| - 22)$, противоречие.

Пусть Ω содержит вершину a степени 59, и Φ — множество вершин из $\Omega - a^\perp$, смежных с 54 вершинами из $\Omega(a)$. Тогда число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $59 \cdot 28$, поэтому $|\Phi| \geqslant 28$. Далее, Φ является кокликой, противоречие с тем, что вершина из Φ смежна с 5 вершинами из $\Omega - a^\perp$.

Значит, Ω — регулярный граф степени 40. Тогда число троек $(a, \{U, W\})$, где $a \in \Omega$, U, W — различные $\langle g \rangle$-орбиты на $[a] - \Omega$, равно $|\Omega| \cdot 10$, но не больше $16 \cdot 15/2 = 120$, противоречие.

Пусть $p = 17$. Тогда $|\Omega|$ сравнимо с 5 по модулю 17, поэтому $|\Omega| \in \{5, 22, 39, 56, 73, 90, 107, 124\}$. Но в случаях $|\Omega| \in \{107, 124\}$ имеем $\alpha_1(g) = 0$, противоречие с тем, что $\alpha_0(g) + 4$ делится на 10.

Далее, степень вершины в графе Ω равна 16, 33 или 50. Для двух вершин $a, b \in \Omega$ число $|\Omega(a) \cap [b]|$ принадлежит $\{13, 30\}$, если a, b смежны, принадлежит $\{3, 20, 37\}$, если a, b не смежны. Если Ω содержит вершину a степени 16, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $16 \cdot 2 = 3(|\Omega| - 17)$, противоречие.

Пусть $|\Omega| = 90$. По лемме 1.3 имеем $\chi_2(g) = 57/5 - \alpha_1(g)/30$, поэтому $\alpha_1(g) - 18$ делится на 30, и $\alpha_1(g) = 390$, противоречие.

Пусть Ω содержит вершину a степени 50, и Ψ — множество вершин из $\Omega - a^\perp$, смежных с 37 вершинами из $\Omega(a)$. Тогда число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ не меньше $50 \cdot 19$. В случае $|\Omega| = 73$ указанное число ребер не больше $22 \cdot 37$, противоречие.

Итак, Ω — регулярный граф степени 33 на 56 вершинах. Пусть $e \in \Omega$, M_i — множество вершин из $\Omega(e)$, смежных с $2 + 17i$ вершинами из $\Omega - a^\perp$, $m_i = |M_i|$. Тогда число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $20 \cdot 22 = 2m_0 + 19m_1$, поэтому $m_0 = 11$, $m_1 = 22$. Противоречие с тем, что M_0 является 11-кликой. $\rhd$

Лемма 2.5. *Если* $p = 13$, *то либо* $|\Omega| = 32$ *и* $\alpha_1(g) = 78$, *либо* $|\Omega| = 45$ *и* $\alpha_1(g) = 117$, *либо* $|\Omega| = 58$ *и* $\alpha_1(g) = 156$, *либо* $|\Omega| = 71$ *и* $\alpha_1(g) = 195$.

$\lhd$ Пусть $p = 13$. Тогда $|\Omega| \in \{6, 19, 32, 45, 58, 71, 84, 97, 110, 123, 136\}$. Если $|\Omega| > 105$, то по лемме 2.2 любая орбита $u^{\langle g\rangle}$ является кокликой.

Если $\alpha_1(g) = 0$, то $\alpha_0(g) + 4$ делится на 10, и $|\Omega| \in \{6, 136\}$. В случае $|\Omega| = 6$ подграф Ω является кликой, противоречие.

Степень вершины в графе Ω сравнима с 5 по модулю 13. Для двух вершин $a, b \in \Omega$ число $|\Omega(a) \cap [b]|$ сравнимо с 4 по модулю 13, если a, b смежны, сравнимо с 2 по модулю 13, если a, b не смежны.

Пусть $|\Omega| = 19$ и Ω_0 состоит из вершин степени 18 в Ω. Если $|\Omega_0| = 5$, то $\Omega - \Omega_0$ является кокликой, противоречие. Если $|\Omega_0| = 3$, то $\Omega - \Omega_0$ — граф степени 2, противоречие. Значит, $|\Omega_0| = 1$, и $\Omega - \Omega_0$ — сильно регулярный граф с параметрами (18,4,3,1), противоречие.

Пусть $|\Omega| = 136$, $u \in \Gamma - \Omega$. Тогда для любого 3-вершинного подграфа U из $u^{\langle g\rangle}$ подграф $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит 136 вершин из Ω, 10 вершин из $u^{\langle g\rangle}$ и 4 вершины из $\Gamma - (\Omega \cup u^{\langle g\rangle})$.

Пусть $w \in \Gamma - (\Omega \cup u^{\langle g\rangle})$ и $[w] \cap u^{\langle g\rangle}| = i$. Тогда $i \geqslant 2$ и в случае $i = 2$ для $u \in [w] \cap [w^g]$ имеем $|U - ([w] \cup [w^g] \cup [w^{g^i}])| \geqslant 8$, противоречие. В случае $i = 3$ можно считать, что $u \in [w] \cap [w^g] \cap [w^{g^i}]$ и для $W = \{w, w^g, w^{g^i}\}$ подграф $X_0(W) \cup X_3(W)$ содержит 7 вершин из U, противоречие. Значит, $i \geqslant 4$. Пусть x — число $\langle g\rangle$-орбит длины 13, вершины которых смежны точно с 4 вершинами из $u^{\langle g\rangle}$. Тогда число 3-лап с концевыми вершинами в $u^{\langle g\rangle}$ и центральной вершиной в $\Gamma - (\Omega \cup u^{\langle g\rangle})$ не меньше $4 \cdot 13x + 10 \cdot 13(19 - x)$, но не больше $13 \cdot 22 \cdot 7$, поэтому $x \geqslant 6$, противоречие.

Пусть $|\Omega| = 97$ и вершины u, u^g смежны. Тогда $|\Gamma - \Omega| = 23 \cdot 13$, $\chi_2(g) = (141 - \alpha_1(g)/3)/10$ и $\alpha_1(g) = 273$. Далее, $u^{\langle g\rangle}$ не содержит треугольников и степень графа $u^{\langle g\rangle}$ равна 2 или 4. Противоречие с тем, что имеются $\langle g\rangle$-орбита, являющаяся графом степени по крайней мере 6.

Пусть $|\Omega| = 84$, $u \in \Gamma - \Omega$ и вершины u, u^g смежны. Тогда $|\Gamma - \Omega| = 24 \cdot 13$, $\chi_2(g) = (128 - \alpha_1(g)/3)/10$,и $\alpha_1(g) = 156$ и для любого $i \in \{1, \ldots, 6\}$ имеются двенадцать $\langle g\rangle$-орбит, в которых вершина w смежна с w^{g^i}.

Пусть $u^{\langle g\rangle}$ содержит треугольник U. Тогда $X_0(U) \cup X_3(U) = \Omega$, поэтому $u^{\langle g\rangle}$ не содержит 4-клик, и каждая вершина из $u^{\langle g\rangle}$ смежна с некоторой вершиной из U. Отсюда степень графа $u^{\langle g\rangle}$ равна 6 или 8.

Если некоторая $\langle g\rangle$-орбита является графом степени 8, то ввиду леммы 1.5 она содержит 4-клику, противоречие.

Значит, на Γ нет $\langle g\rangle$-орбит степени 8, и каждая $\langle g\rangle$-орбита длины 13 является регулярным графом степени 6. В этом случае вершина из $\Gamma - (\Omega \cup u^{\langle g\rangle})$ смежна по крайней мере с 5 вершинами из $u^{\langle g\rangle}$, степень u в графе $\Gamma - \Omega$ не меньше $6 + 5 \cdot 23$ и $|[u] \cap \Omega| \leqslant 14$. Поэтому вершина из Ω смежна в среднем с 52 вершинами из $\Gamma - \Omega$ и Ω является 84-кликой, противоречие.

Пусть $|\Omega| = 71$. Тогда $|\Gamma - \Omega| = 13 \cdot 25$. По целочисленности $\chi_2(g)$ имеем $\alpha_1(g) = 195$.

Пусть $|\Omega| = 58$. Тогда $|\Gamma - \Omega| = 13 \cdot 26$. По целочисленности $\chi_2(g)$ имеем $\alpha_1(g) = 156$.

Пусть $|\Omega| = 45$. Тогда $|\Gamma - \Omega| = 13 \cdot 27$. По целочисленности $\chi_2(g)$ имеем $\alpha_1(g) = 117$.

Пусть $|\Omega| = 32$. Тогда $|\Gamma - \Omega| = 13 \cdot 28$. По целочисленности $\chi_2(g)$ имеем $\alpha_1(g) = 78$. $\rhd$

Лемма 2.6. *Если* $p = 11$, *то либо* $|\Omega| = 66$ *и* $\alpha_1(g) = 0$, *либо* $|\Omega| = 77$ *и* $\alpha_1(g) = 33$, *либо* $|\Omega| = 88$ *и* $\alpha_1(g) = 66$, *либо* $|\Omega| = 99$ *и* $\alpha_1(g) = 99$.

$\lhd$ Пусть $p = 11$. Тогда $|\Omega| \in \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110, 121, 132, 143\}$. Если $|\Omega| > 105$, то по лемме 2.2 любая орбита $u^{\langle g\rangle}$ является кокликой.

Если $\alpha_1(g) = 0$, то $\alpha_0(g)+4$ делится на 10, и $|\Omega| = 66$. Если $|\Omega| = 66$, то $\alpha_1(g) \in \{0, 330\}$. Но в случае $\alpha_1(g) = 330$, каждая $\langle g\rangle$-орбита длины 11 является кликой, противоречие.

Степень вершины в графе Ω сравнима с 3 по модулю 11. Для двух вершин $a, b \in \Omega$ число $|\Omega(a)\cap[b]|$ сравнимо с 8 по модулю 11, если a, b смежны, сравнимо с 10 по модулю 11, если a, b не смежны.

Пусть $|\Omega| = 99$. Тогда $|\Gamma - \Omega| = 11 \cdot 27$ и любая $\langle g\rangle$-орбита длины 11 не содержит треугольников. По целочисленности $\chi_2(g)$ имеем $\alpha_1(g) = 99$.

Пусть $|\Omega| = 88$. Тогда $|\Gamma - \Omega| = 11 \cdot 28$. По целочисленности $\chi_2(g)$ имеем $\alpha_1(g) = 66$.

Пусть $|\Omega| = 77$. Тогда $|\Gamma - \Omega| = 11 \cdot 29$. По целочисленности $\chi_2(g)$ имеем $\alpha_1(g) = 33$.

Пусть $|\Omega| = 55$. Тогда $|\Gamma - \Omega| = 11 \cdot 31$. По целочисленности $\chi_2(g)$ имеем $\alpha_1(g) = 297$. Противоречие с тем, что на $\Gamma - \Omega$ имеется кликовая $\langle g\rangle$-орбита длины 11.

Пусть $|\Omega| = 44$. Тогда $|\Gamma - \Omega| = 11 \cdot 32$. По целочисленности $\chi_2(g)$ имеем $\alpha_1(g) = 264$. Пусть β — число коккликовых $\langle g\rangle$-орбит длины 11. Тогда на $\Gamma - \Omega$ имеется по крайней мере $24 + 3\beta$ орбит $u_i^{\langle g\rangle}$ длины 11 и степени 8. Каждая такая орбита содержит 5-клику L и вершину вне L, смежную с 4 вершинами из L. Поэтому указанная орбита не попадает в окрестность никакой вершины из Ω. Теперь число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, деленное на 11 не меньше $9 \cdot 44$, но не больше $54\beta + 30(8 - 4\beta)$, противоречие.

Пусть $|\Omega| = 22$. Тогда Ω — сильно регулярный граф с параметрами (22,14,8,10), противоречие.

Пусть $|\Omega| = 33$. Тогда $|\Gamma - \Omega| = 11 \cdot 33$ и степень вершины в Ω равна 14 или 25. Если Ω содержит вершину a степени 25, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $33 \cdot 5$, но не больше $7 \cdot 21$. Значит, Ω — сильно регулярный граф с параметрами (33,14,8,10), противоречие. $\rhd$

3. Автоморфизмы малых порядков

В этом параграфе предполагается, что Γ является сильно регулярным графом с параметрами (396,135,30,54), g — автоморфизм простого порядка $p \leqslant 7$ графа Γ и подграф $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ содержит геодезический 2-путь.

Лемма 3.1. *Пусть $p = 7$. Тогда верно одно из утверждений:*

(1) $|\Omega| = 116$ *и* $\alpha_1(g) = 0$*;*

(2) $|\Omega| = 81$, $\alpha_1(g) = 105$ *и на* $\Gamma - \Omega$ *имеется* 45 *семиугольных* $\langle g\rangle$*-орбит;*

(3) $|\Omega| \in \{74, 67, 60, 53, 39, 32\}$ *и* $\alpha_1(g) \in \{84, 63, 42, 21, 189, 168\}$ *соответственно;*

(4) $|\Omega| = 46$ *и* $\alpha_1(g) \in \{0, 210\}$.

$\lhd$ Пусть $p = 7$. Тогда $|\Omega|$ сравнимо с 4 по модулю 7. Далее, степень вершины в графе Ω сравнима с 2 по модулю 7, $\lambda_\Omega \in \{2, 9, \dots, 30\}$ и $\mu_\Omega \in \{5, 12, \dots, 54\}$. Если Ω содержит вершину a степени $|\Omega| - 2$, то для $b \in \Omega - a^\perp$ имеем $\Omega(b) = \Omega(b) \cap [a]$, противоречие.

Если $|\Omega| = 18$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами (18,9,2,5), противоречие.

Пусть $|\Omega| = 25$. Тогда степени вершин в Ω равны 9 или 16. Если Ω содержит вершину a степени 9, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $75 = 6x + 13(9 - x)$, поэтому $x = 6$. Теперь для трех вершин $b_1, b_2, b_3 \in \Omega(a)$ степени 16 в Ω подграф $\Omega - a^\perp$ содержит 9 вершин из $[b_1] \cap [b_2] \cap [b_3]$ и по 2 вершины, смежные с парами вершин из из $\{b_1, b_2, b_3\}$, противоречие с тем, что некоторая вершина из $\Omega(a) \cap [b_i]$ смежна с a и по крайней мере с 3 вершинами из $\Omega(b_1) \cap [b_2] \cap [b_3]$.

Теперь Ω — регулярный граф степени 16, поэтому Ω — сильно регулярный граф с параметрами (25,16,9,12), противоречие.

Если $|\Omega| > 105$, то каждая $\langle g\rangle$-орбита длины 7 является кокликой. Если $\alpha_1(g) = 0$, то по лемме 2.2 имеем $|\Omega| \in \{46, 116\}$.

Пусть $|\Omega| = 102$. Тогда $|\Gamma - \Omega| = 7\cdot 42$. По целочисленности $\chi_2(g)$ имеем $\alpha_1(g) = 168 = 7\cdot 24$. Поэтому некоторая орбита $u^{\langle g\rangle}$ имеет степень 4 и содержит 3-клику, противоречие.

Пусть $|\Omega| = 95$. Тогда $|\Gamma - \Omega| = 7\cdot 43$. Из целочисленности $\chi_2(g)$ получим $\alpha_1(g) = 147$. Поэтому некоторая орбита $u^{\langle g\rangle}$ имеет степень 4 и содержит 3-клику, противоречие.

Пусть $|\Omega| = 88$. Тогда $|\Gamma - \Omega| = 7\cdot 44$. Из целочисленности $\chi_2(g)$ получим $\alpha_1(g) = 126$. Поэтому некоторая орбита $u^{\langle g\rangle}$ имеет степень 4 и содержит 3-клику, противоречие.

Пусть $|\Omega| = 81$. Тогда $|\Gamma - \Omega| = 7\cdot 45$. Из целочисленности $\chi_2(g)$ получим $\alpha_1(g) = 105$. Поэтому либо на $\Gamma - \Omega$ имеется 45 семиугольных $\langle g\rangle$-орбит, либо имеется орбита $u^{\langle g\rangle}$ степени 4. В последнем случае для 3-клики U из $u^{\langle g\rangle}$ подграф $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит 81 вершин из Ω. Поэтому каждая вершина из $\Gamma - (\Omega \cup u^{\langle g\rangle})$ смежна по крайней мере с 3 вершинами из $u^{\langle g\rangle}$, и $|[u]| \geqslant 4 + 3\cdot 44$, противоречие.

Если $|\Omega| \in \{74, 67, 60, 53\}$, то $\alpha_1(g) \in \{84, 63, 42, 21\}$ соответственно (в случае $|\Omega| = 53$ и $\alpha_1(g) = 231$ найдется кликовая $\langle g\rangle$-орбита длины 7).

Если $|\Omega| = 46$, то $\alpha_1(g) \in \{0, 210\}$.

Если $|\Omega| \in \{39, 32\}$, то $\alpha_1(g) \in \{189, 168\}$ соответственно. $\triangleright$

Лемма 3.2. *Если $p = 5$, то $|\Omega| = 5r + 1$, $4 \leqslant r \leqslant 19$ и $\alpha_1(g) + 15r + 15$ делится на 150.*

$\triangleleft$ Пусть $p = 5$. Тогда $|\Omega|$ сравнимо с 1 по модулю 5. Далее, степень вершины в графе Ω делится на 5, $\lambda_\Omega \in \{0, 5, \dots, 30\}$ и $\mu_\Omega \in \{4, 9, \dots, 54\}$. Если Ω содержит вершину a степени $|\Omega| - 1$, то для $b \in \Omega(a)$ имеем $\Omega(b) = \Omega(b) \cap a^\perp$, противоречие.

Если $|\Omega| = 11$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами (11,5,0,4), противоречие. Пусть $|\Omega| = 16$. Тогда степени вершин в графе Ω равны 5 и 10. Для вершины a степени 5 в Ω число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^\perp$ равно $10\cdot 4 = 4x + 9(5 - x)$, поэтому $x = 1$. Пусть вершина b из $\Omega(a)$ имеет степень 5 в Ω. Тогда каждая вершина из $\Omega - ([a] \cup [b])$ смежна с 8 вершинами из $\Omega(a) \cup \Omega(b)$, поэтому $\Omega - ([a] \cup [b])$ — регулярный граф степени 2 на 6 вершинах, противоречие.

Пусть $u \in \Gamma - \Omega$, Y_i — множество вершин из $\Gamma - u^{\langle g\rangle}$, смежных точно с i вершинами из $u^{\langle g\rangle}$ и $y_i = |Y_i|$. Если $u^{\langle g\rangle}$ — пятиугольник, то $\sum y_i = 391$, $\sum iy_i = 665$, $\sum \binom{i}{2} y_i = 150 + 265 = 415$, поэтому $y_0 + \sum \binom{i-1}{2} y_i = 141$. Если $u^{\langle g\rangle}$ — коклика, то $\sum y_i = 391$, $\sum iy_i = 675$, $\sum \binom{i}{2} y_i = 540$, поэтому $y_0 + \sum \binom{i-1}{2} y_i = 256$.

Если $|\Omega| > 105$, то $\alpha_1(g) = 0$. Если $\alpha_1(g) = 0$, то $\alpha_0(g) = 10r + 6$ и $\chi_2(g) = r + 5$. Так как $44 - \chi_2(g)$ делится на 5, то $|\Omega| \in \{46, 96, 146\}$. Допустим, что $|\Omega| = 146$. Пусть $u \in \Gamma - \Omega$ и U является 3-кокликой из $u^{\langle g\rangle}$. Тогда $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит 146 вершин из Ω, 2 вершины из $u^{\langle g\rangle}$ и еще две вершины. Если $w \in Y_1$, то $w^{\langle g\rangle}$ содержит 2 вершины из $X_0(U)$. Если $w \in Y_4$, то $w^{\langle g\rangle}$ содержит 2 вершины из $X_3(U)$. Поэтому $y_0 + y_5 = 146$ и $y_1 + y_4 \leqslant 5$. Если $w \in Y_2$, то каждая вершина из $w^{\langle g\rangle}$ не смежна с тройкой вершин из $u^{\langle g\rangle}$. Поэтому $y_2 \leqslant 20$. Если $w \in Y_3$, то каждая вершина из $w^{\langle g\rangle}$ смежна с тройкой вершин из $u^{\langle g\rangle}$. Поэтому $y_3 \leqslant 20$, противоречие с тем, что $\sum y_i \leqslant 146 + 5 + 40$.

Если $|\Omega| \geqslant 81$, то нет кликовых орбит $u^{\langle g\rangle}$ длины 5, иначе для 3-клики U из $u^{\langle g\rangle}$ подграф $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит не менее 81 вершин из Ω и 2 вершины из U.

Пусть $|\Omega| = 101$. Тогда $44 - \chi_2(g) = 65/2 + \alpha_1(g)/30$, поэтому $\alpha_1(g)$ — нечетное число, делящееся на 75. В этом случае имеются 30 пятиугольных $\langle g\rangle$-орбит и 29 кокликовых. Пусть $u \in \Gamma - \Omega$ и U является 2-путем из $u^{\langle g\rangle}$. Тогда $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит 101 вершину из Ω и еще 4 вершины. Если $w \in Y_1$, то $w^{\langle g\rangle}$ содержит 2 вершины из $X_0(U)$. Если $w \in Y_4$, то $w^{\langle g\rangle}$ содержит 2 вершины из $X_3(U)$. Поэтому $y_1+y_4\leqslant 10$. Если $w\in Y_2$, то вершина из $w^{\langle g\rangle}$ не смежна либо с 2-путем из $u^{\langle g\rangle}$, либо с изолированной вершиной и ребром. Если $w\in Y_3$, то вершина из $w^{\langle g\rangle}$ смежна либо с 2-путем из $u^{\langle g\rangle}$, либо с изолированной вершиной и ребром. Теперь $y_2+y_3\geqslant 280$, причем $Y_2\cup Y_3$ содержит не более 4 вершин из $X_0(U)\cup X_3(U)$ для любого 2-пути U из $u^{\langle g\rangle}$. Противоречие с тем, что $Y_2\cup Y_3$ содержит не менее 52 вершин из $X_0(U)\cup X_3(U)$ для любого подграфа U из $u^{\langle g\rangle}$, являющегося объединением изолированной вершины и ребра.

Пусть $21\leqslant|\Omega|=5r+1\leqslant 96$. Тогда $44-\chi_2(g)=(15r+15+\alpha_1(g))/30$, поэтому $\alpha_1(g)+15r+15$ делится на 150. $\rhd$

Лемма 3.3. *Если* $p=3$, *то* $|\Omega|=3t$, $\alpha_1(g)/3-3t-4$ *делится на* 10 *и* $2\leqslant t\leqslant 27$ *или* $t\in\{32,42\}$.

$\lhd$ Пусть $p=3$ и $|\Omega|=3t$. Тогда степень вершины в графе Ω равна $3i$, любое ребро графа Ω лежит в $3j$ треугольниках из Ω, а для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Ω имеем $|\Omega(a)\cap[b]|=3l$.

Пусть $U=u^{\langle g\rangle}$ — орбита длины 3, Y_i — множество вершин из $\Gamma-U$, смежных точно с i вершинами из U, $y_i=|Y_i|$. Если U — клика, то $y_2=24-3y_3$, $y_1=144+3y_3$, поэтому $y_3\leqslant 8$. Если U — коклика, то $y_2=63-3y_3$, $y_1=72+3y_3$, поэтому $y_3\leqslant 21$.

Пусть $t>27$. Тогда $\alpha_1(g)=0$. Если $\alpha_1(g)=0$, то $|\Omega|\in\{36,66,96,126\}$.

Пусть $2\leqslant t\leqslant 27$. Тогда $\chi_2(g)=(3t+44-\alpha_1(g)/3)/10$, поэтому $\alpha_1(g)/3-3t-4$ делится на 10. $\rhd$

Лемма 3.4. *Пусть* $p=2$. *Тогда* $|\Omega|=2t$, $t\geqslant 3$, $(\alpha_1(g)-12-6t)/30$ *четно и либо* $t\leqslant 78$, *либо* $t=88$.

$\lhd$ Пусть $p=2$ и $|\Omega|=2t$. Тогда степень вершины в графе Ω равна $2i+1$, любое ребро графа Ω лежит в $2j$ треугольниках из Ω, а для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Ω имеем $|\Omega(a)\cap[b]|=2l$. Заметим, что любая вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω, поэтому $t>1$. Если $t=2$, то Ω — объединение двух изолированных ребер, $x_0+x_2+x_4=392$, $2x_2+4x_4=536$, $x_2+6x_4=276$, поэтому $x_4=2$, $x_2=274/6$, противоречие.

Пусть $\alpha_1(g)=0$. Тогда $44-\chi_2(g)=(198-t)/5$, поэтому $t=10r-2$, $1\leqslant r\leqslant 9$.

Пусть вершины u, u^g смежны. Тогда $3\leqslant t\leqslant 78$ и число $(\alpha_1(g)+12-6t)/30$ четно. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны. $\rhd$

Литература

1. *Cameron P., Van Lint J.* Designs, graphs, codes and their links.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981.—240 p.—(London Math. Soc. Student Texts 22.)
2. *Macay M., Siran J.* Search for properties of the missing Moore graph // Linear Algebra and its Appl.—2009.—Vol. 432.—P. 2381–2398.
3. *Журтов А. Х., Махнев А. А., Нирова М. С.* Об автоморфизмах 4-изорегулярных графов // Труды Института математики и механики УрО РАН.—2010.—Т. 16, № 3.—С. 78–86.
4. *Махнев А. А.* Частичные геометрии и их расширения // Успехи мат. наук.—1999.—Т. 54, № 5.—С. 21–72.

Статья поступила 7 апреля 2010 г.

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики УрО РАН,
заведующий отделом алгебры и топологии
РОССИЯ, 620219, Екатеринбург, ГСП-384, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: makhnev@imm.uran.ru

Исакова Мариана Малиловна
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
старший препод. каф. геометрии и высшей алгебры
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: isakova2206@mail.ru

ON AUTOMORPHISMS OF STRONGLY REGULAR GRAPH WITH PARAMETERS (396,135,30,54)

Isakova M. M., Makhnev A. A.

We found the possible orders and the structures of subgraphs of the fixed points of automorphisms of strongly regular graph with parameters (396,135,30,54). These results can be used to study automorphisms of strongly regular graph with parameters (640,243,66,108) (in such a graph the second neighborhood of vertices are strongly regular with parameters (396,135,30,54)).

Key words: strongly regular graph, automorphisms of graph, subgraphs of the fixed points of automorphisms.