Владикавказский математический журнал
2010, Том 12, Выпуск 4, С. 3–11

УДК **517.519**

ОПЕРАТОРЫ ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА $H^{\omega(t,x)}$

Б. Г. Вакулов, Е. С. Кочуров

В работе рассматриваются пространства обобщенной переменной гёльдеровости функций, заданных на отрезке действительной оси, локальный обобщенный модуль непрерывности которых имеет мажоранту, изменяющуюся от точки к точке. Доказываются теоремы о действии операторов дробного интегрирования переменного порядка из пространств обобщенной переменной гёльдеровости в пространства с «лучшей» мажорантой и операторов дробного дифференцирования из таких же пространств в пространства с «худшей» мажорантой. Переменный порядок принимает действительные значения между нулем и единицей.

Ключевые слова: операторы дробного интегрирования, операторы дробного дифференцирования, обобщенный модуль непрерывности, обобщенные пространства Гёльдера с переменными характеристиками.

1. Введение

В последнее время сильно возрос интерес к изучению пространств переменного порядка, когда параметры, определяющие пространство, обычно постоянные, могут изменяться от точки к точке. Типичным примером такого пространства является обобщенное пространство Лебега с переменным показателем, определяемое модуляром $\int_\Omega |f(x)|^{p(x)}dx$.

Другим примером является обобщенное пространство Гёльдера $H^{\lambda(\cdot)}$ переменного порядка, определяемое условием $\omega(f,t,x) \leqslant ct^{\lambda(x)}$, $x \in \mathbb{R}^n$, где локальный модуль непрерывности $\omega(f,t,x)$ функции f равен $\sup_{|h|<t} |f(x+h) - f(x)|$. Известны и более общие пространства, а именно, пространства функций, удовлетворяющих условию $\omega(f,t,x) \leqslant c\omega(t,x)$, где мажоранта $\omega(t,x)$ — функция типа модуля непрерывности (см. [8, с. 50]) по переменной t (для каждого $x \in [a,b]$). Такие пространства носят название *обобщенных пространств Гёльдера с переменной характеристикой.* В случае, когда характеристика $\omega(t,x) = t^{\lambda(x)}$, получаем пространство $H^{\lambda(\cdot)}$.

Мы рассматриваем оператор дробного интегрирования

$$I_{a+}^{\alpha(\cdot)} f(x) = \frac{1}{\Gamma[\alpha(x)]} \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha(x)}} \tag{1.1}$$

и оператор дробного дифференцирования

$$D_{a+}^{\alpha(\cdot)} f(x) = \frac{f(x)}{\Gamma[1-\alpha(x)](x-a)^{\alpha(x)}} + \frac{\alpha(x)}{\Gamma[1-\alpha(x)]} \int\limits_a^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha(x)}}\, dt \tag{1.2}$$

на обобщенных пространствах Гёльдера $H^{\omega(\cdot)}([a,b])$ с характеристикой $\omega = \omega(t,x)$, $0 < t < b-a$, зависящей от точки $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$. Основная цель — исследовать зависимость отображений, осуществляемых операторами $I_{a+}^{\alpha(\cdot)}$ и $D_{a+}^{\alpha(\cdot)}$, от локальных значений $\alpha(x)$ и $\omega(t,x)$. Мы рассматриваем функции $\omega(t,x)$, принадлежащие классу Зигмунда — Бари — Стечкина по t равномерно по x. Центральным результатом здесь является получение теорем о действии операторов дробного интегрирования и дифференцирования, определенных на том или ином пространстве Гёльдера, в пространство подобной природы. Для этого мы используем метод оценок типа Зигмунда. В нашем случае эти оценки носят локальный характер и зависят от точек $x \in [a,b]$.

Дробные интегралы и дробные производные постоянного порядка $\alpha(x) = \alpha = \mathrm{const}$ в пространствах переменной гёльдеровости рассматривались ранее в работах Н. К. Карапетянца и А. И. Гинзбург [7, 9]. Там же был получен изоморфизм этих пространств, осуществляемый дробным интегралом.

Дробные интегралы переменного порядка в пространствах переменной гёльдеровости рассматривались в работах Б. Росса и С. Г. Самко [11], С. Г. Самко [12].

Многомерные потенциалы и гиперсингулярные интегралы в пространствах переменной и обобщенной переменной гёльдеровости рассматривались в работах Б. Г. Вакулова [2–5, 14], Н. Г. Самко и Б. Г. Вакулова [6].

Наиболее общие результаты о действии операторов типа потенциала и соответствующих гиперсингулярных операторов в рамках обобщенных пространств с переменными характеристиками были получены в работе Н. Г. Самко, С. Г. Самко и Б. Г. Вакулова [6], где рассматривались пространства функций, определенных на однородных пространствах.

Рассматриваемые в настоящей работе объекты — операторы дробного интегрирования и дифференцирования — имеют, в сравнении с операторами типа потенциала и гиперсингулярными интегралами, одностороннюю природу (переменный предел интегрирования), что приводит к некоторой специфике исследования и получаемых результатов.

2. Вспомогательные утверждения

Всюду ниже предполагается, что $\omega(t,x)$ — функция типа модуля непрерывности по переменной t для каждого $x \in [a,b]$. Тогда, как известно,

$$\frac{\omega(t,x)}{t} \leqslant 2\frac{\omega(h,x)}{h}, \quad t > h. \tag{2.1}$$

В наших основных результатах мы предполагаем также, что $\omega(t,x)$ равномерно по x, не зануляется вне начала координат:

$$\inf_{\substack{x\in[a,b],\\ t\in(\delta,b-a)}} \omega(t,x) > 0, \quad \delta > 0. \tag{2.2}$$

Определение 2.1. Через $H^{\omega(\cdot)}([a,b])$ обозначим пространство функций $f \in C([a,b])$ таких, что $\omega(f,t,x) \leqslant c\omega(t,x)$ для всех $x \in [a,b]$, где $c > 0$ не зависит от x и t. Это пространство банахово относительно нормы

$$\|f\|_{H^{\omega(\cdot)}([a,b])} = \|f\|_{C([a,b])} + \sup_{\substack{x\in[a,b]\\ t>0}} \frac{\omega(f,t,x)}{\omega(t,x)}.$$

Через $H_0^{\omega(\cdot)}([a,b])$ обозначим подпространство функций из $H^{\omega(\cdot)}([a,b])$, обращающихся в нуль в точке a.

Лемма 2.1. *Пусть $\omega(t,x)$ — функция типа модуля непрерывности по переменной t для каждого $x \in [a,b]$ и $\omega_0 := \inf_{x\in[a,b]} \omega(b-a,x) > 0$. Оператор умножения на функцию $g \in \mathrm{Lip}([a,b])$ ограничен в $H^{\omega(\cdot)}([a,b])$ и $H_0^{\omega(\cdot)}([a,b])$.*

$\lhd$ Достаточно проверить, что существует постоянная $c > 0$ такая, что $h \leqslant c\omega(h,x)$. Это вытекает из (2.1) при выборе $t = b-a$, так что $c = \frac{2(b-a)}{\omega_0}$. $\rhd$

Определение 2.2 [10]. Говорят, что $\omega(t,x)$ принадлежит по переменной t *обобщенному классу Зигмунда — Бари — Стечкина* $\Phi^{\delta(\cdot)}_{\beta(\cdot)}$, где $0 \leqslant \delta(x) < \beta(x)$, $x \in [a,b]$, если:

1) $\omega(t,x)$ непрерывна и почти возрастает по t на $[0, b-a]$ равномерно по $x \in [a,b]$ и $\lim\limits_{t\to+0} \omega(t,x) = 0$ для каждого $x \in [a,b]$;

2) $\int\limits_0^h \left(\frac{h}{t}\right)^{\delta(x)} \frac{\omega(t,x)}{t}\, dt \leqslant c\,\omega(h,x)$;

3) $\int\limits_h^{b-a} \left(\frac{h}{t}\right)^{\beta(x)} \frac{\omega(t,x)}{t}\, dt \leqslant c\,\omega(h,x)$,

где $0 < h < b-a$, постоянная c не зависит от h и $x \in [a,b]$. Через $\Phi^{\delta(\cdot)}$ мы также обозначаем соответствующий класс, для которого выполняется только условия 1 и 2, а через $\Phi_{\beta(\cdot)}$ — класс с условиями 1 и 3, так что $\Phi^{\delta(\cdot)}_{\beta(\cdot)} = \Phi^{\delta(\cdot)} \cap \Phi_{\beta(\cdot)}$.

Подобные классы Φ^δ_β в случае функций $\omega = \omega(t)$ и показателей β, δ, не зависящих от параметра x, были представлены в статье Бари — Стечкина [1] с $\delta = 0$, $\beta = 1, 2, 3, \ldots$ Классы Φ^δ_β с постоянными $0 \leqslant \delta < \beta$ были рассмотрены в [13], а их подробное исследование можно найти в [10].

Всюду в дальнейшем предполагаем, что зависящие от x параметры β и δ, определяющие класс $\Phi^{\delta(\cdot)}_{\beta(\cdot)}$, удовлетворяют условиям

$$\beta, \delta \in C([a,b]), \quad \min_{x\in[a,b]} [\beta(x) - \delta(x)] > 0. \tag{2.3}$$

Заметим, что последнее условие гарантирует непустоту класса $\Phi^{\delta(\cdot)}_{\beta(\cdot)}$.

Нам понадобятся следующие очевидные факты.

Лемма 2.2. *Пусть $\sup_{x\in[a,b]} \alpha(x) < 1$ и функция $\omega(t,x)$ неотрицательна. Если $\omega(t,x)$ почти возрастает по t равномерно по x, то*

$$h^{\alpha(x)}\omega(h,x) \leqslant ch \int\limits_h^{b-a} \frac{\omega(t,x)\,dt}{t^{2-\alpha(x)}}, \quad 0 < h < \frac{b-a}{2}, \tag{2.4}$$

а если $\frac{\omega(t,x)}{t}$ почти убывает по t равномерно по x, то

$$h^{-\alpha(x)}\omega(h,x) \leqslant c \int\limits_0^h \frac{\omega(t,x)\,dt}{t^{1+\alpha(x)}}, \quad 0 < h < b-a, \tag{2.5}$$

для всех $x \in [a,b]$, где c не зависит от h и x.

Заметим, что в случае, когда $\omega(t,x) = t^{\lambda(x)}$, $0 < \inf_{x\in[a,b]} \alpha(x) \leqslant \alpha(x) \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \alpha(x) < \inf_{x\in[a,b]} \lambda(x) \leqslant \lambda(x) \leqslant 1$ для всех $x \in [a,b]$, интеграл в правой части неравенства (2.5) сходится абсолютно. В противном случае он может как сходиться условно, так и расходиться. Но в любом случае неравенство (2.5) остается верным.

Лемма 2.3. *Пусть $\omega(t,x)$ — функция типа модуля непрерывности по переменной t для каждого $x \in [a,b]$. Тогда для всех $\lambda > 0$, $x \in [a,b]$ справедливо неравенство*

$$\omega(\lambda t, x) \leqslant (\lambda+1)\omega(t,x). \tag{2.6}$$

$\lhd$ Утверждение леммы доказывается аналогично соответствующему результату для случая, когда функция $\omega = \omega(t)$ не зависит от x (см., например, [8, с. 51]). $\rhd$

Мы воспользуемся ниже числовыми неравенствами

$$|x^\mu - y^\mu| \leqslant |\mu||x-y| \cdot [\min\{x,y\}]^{\mu-1}, \quad x>0,\ y>0,\ \mu \leqslant 1; \tag{2.7}$$

$$|x^\mu - y^\mu| \leqslant |\mu||x-y| \cdot [\max\{x,y\}]^{\mu-1}, \quad x>0,\ y>0,\ \mu \geqslant 0. \tag{2.8}$$

Неравенства (2.7) и (2.8) общеизвестны, мы сошлемся на [6], где такие неравенства были доказаны для случая, когда μ может принимать комплексные значения (с заменой μ на $\operatorname{Re}\mu$ в показателях степеней в правых частях), см. [6, (2.24)].

Далее все получаемые константы будем обозначать одним и тем же символом c.

3. Основные результаты

В теоремах 3.1 и 3.2 мы даем оценки типа Зигмунда для разностей функций, являющихся дробными интегралами или дробными производными соответственно.

Всюду ниже мы предполагаем, что

$$\alpha \in \mathrm{Lip}([a,b]), \quad 0 < \inf_{x\in[a,b]} \alpha(x) \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \alpha(x) < 1. \tag{3.1}$$

В силу леммы 2.1 и условий (3.1), при рассмотрении оператора (1.1) оценку типа Зигмунда достаточно получить для интеграла

$$\varphi(x) := \int\limits_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha(x)}} = \int\limits_0^{x-a} \frac{f(x-t)\,dt}{t^{1-\alpha(x)}}. \tag{3.2}$$

Мы используем обозначения

$$\omega_\alpha(t,x) := t^{\alpha(x)}\omega(t,x), \quad \omega_{-\alpha}(t,x) := t^{-\alpha(x)}\omega(t,x).$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия (3.1). Если $f \in H_0^{\omega(\cdot)}([a,b])$, то для функции φ справедлива следующая оценка типа Зигмунда*

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leqslant ch \int\limits_h^{b-a} \frac{\omega(t,x)\,dt}{t^{2-\alpha(x)}} \|f\|_{H^\omega}, \quad h > 0, \tag{3.3}$$

где c не зависит от x, h и f.

$\lhd$ В силу (2.2), оценку (3.3) достаточно доказать при малых h. Будем считать, что $0 < h < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$. Имеем $|\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leqslant |I_1| + |I_2| + |I_3|$, где

$$I_1 = \int\limits_0^{x-a} [f(x-t) - f(x)] \cdot [(t+h)^{\alpha(x+h)-1} - t^{\alpha(x)-1}]\,dt,$$

$$I_2 = \int\limits_{-h}^{0} \frac{f(x-t) - f(x)}{(t+h)^{1-\alpha(x+h)}}\,dt, \quad I_3 = f(x)\left[\frac{(x+h-a)^{\alpha(x+h)}}{\alpha(x+h)} - \frac{(x-a)^{\alpha(x)}}{\alpha(x)}\right].$$

Для I_1 получаем

$$|I_1| \leqslant \int\limits_0^{x-a} \omega(t,x) \left|(t+h)^{\alpha(x+h)-1} - t^{\alpha(x)-1}\right| dt \, \|f\|_{H^\omega} \leqslant (K_1+K_2)\|f\|_{H^\omega},$$

$$K_1 = \int\limits_0^{x-a} \omega(t,x) \left|(t+h)^{\alpha(x+h)-1} - (t+h)^{\alpha(x)-1}\right| dt,$$

$$K_2 = \int\limits_0^{x-a} \omega(t,x) \left|(t+h)^{\alpha(x)-1} - t^{\alpha(x)-1}\right| dt.$$

Оценим K_1. Имеем

$$K_1 \leqslant c \int\limits_0^{x-a} \frac{\omega(t+h,x)}{t+h} \left|(t+h)^{\alpha(x+h)} - (t+h)^{\alpha(x)}\right| dt$$

$$\leqslant c \int\limits_h^{x+h-a} \frac{\omega(t,x)}{t} t^{\alpha(x)} \left|t^{\alpha(x+h)-\alpha(x)} - 1\right| dt.$$

В случае, когда $x+h-a \leqslant 1$, к разности в подынтегральном выражении применим неравенство (2.7). А при $x+h-a > 1$ разобьем промежуток интегрирования на два: от h до 1 и от 1 до $x+h-a$. К первому из полученных интегралов применим формулу (2.7), а ко второму — формулу (2.8). Будем иметь

$$K_1 \leqslant ch \int\limits_h^{b-a} \frac{\omega(t,x)\,dt}{t^{2-\alpha(x+h)}} \leqslant ch \int\limits_h^{b-a} \frac{\omega(t,x)\,dt}{t^{2-\alpha(x)}}.$$

Рассмотрим теперь K_2:

$$K_2 \leqslant h^{\alpha(x)} \int\limits_0^1 \frac{\omega(th,x)\,dt}{(t+1)^{1-\alpha(x)}} + h^{\alpha(x)} \int\limits_0^1 \frac{\omega(th,x)\,dt}{t^{1-\alpha(x)}} + h^{\alpha(x)} \int\limits_1^{+\infty} \omega(th,x) \left|(t+1)^{\alpha(x)-1} - t^{\alpha(x)-1}\right| dt.$$

В силу неравенства (2.6), первое и второе слагаемые нетрудно оценить величиной $ch^{\alpha(x)}\omega(h,x)$. Для третьего же слагаемого, учитывая (2.6) и (2.7), имеем

$$h^{\alpha(x)} \int\limits_1^{+\infty} \omega(th,x) \left|(t+1)^{\alpha(x)-1} - t^{\alpha(x)-1}\right| dt$$

$$\leqslant h^{\alpha(x)} \int\limits_1^{+\infty} \frac{\omega(th,x)\,dt}{t^{2-\alpha(x)}} \leqslant h^{\alpha(x)}\omega(h,x) \int\limits_1^{+\infty} \frac{(t+1)\,dt}{t^{2-\alpha(x)}} \leqslant ch^{\alpha(x)}\omega(h,x).$$

Поэтому, применяя неравенство (2.4), получаем

$$K_2 \leqslant ch \int\limits_h^{b-a} \frac{\omega(t,x)\,dt}{t^{2-\alpha(x)}}.$$

Итак, мы оценили слагаемое I_1. Оценка для I_2 очевидна. Действительно,

$$|I_2| \leqslant \omega(h,x)\int\limits_0^h \frac{dt}{t^{1-\alpha(x+h)}}\|f\|_{H^\omega} \leqslant ch^{\alpha(x)}\omega(h,x)\|f\|_{H^\omega} \leqslant ch\int\limits_h^{b-a}\frac{\omega(t,x)\,dt}{t^{2-\alpha(x)}}\|f\|_{H^\omega}.$$

Для I_3 имеем: $|I_3| \leqslant c\,(K_3+K_4+K_5)\|f\|_{H^\omega}$, где

$$\begin{aligned} K_3 &= \omega(x-a,x)\left|(x+h-a)^{\alpha(x+h)}-(x-a)^{\alpha(x+h)}\right|,\\ K_4 &= \omega(x-a,x)\left|(x-a)^{\alpha(x+h)}-(x-a)^{\alpha(x)}\right|,\\ K_5 &= \omega(x-a,x)(x-a)^{\alpha(x)}|\alpha(x+h)-\alpha(x)|. \end{aligned}$$

Получить оценки для слагаемых K_4 и K_5 легко, если следовать схеме работы [9]. При оценке K_3 отдельно рассмотрим случаи $x-a\leqslant h$ и $x-a>h$. Для $x-a\leqslant h$, учитывая неравенства (2.8) и (2.4), имеем

$$\begin{aligned} K_3 &\leqslant c\omega(h,x)\left|(x+h-a)^{\alpha(x+h)}-(x-a)^{\alpha(x+h)}\right| \leqslant \frac{c\omega(h,x)h}{(x+h-a)^{1-\alpha(x+h)}}\\ &= \frac{c\omega(h,x)h^{\alpha(x+h)}}{\left(1+\frac{x-a}{h}\right)^{1-\alpha(x+h)}} \leqslant c\omega(h,x)h^{\alpha(x)} \leqslant ch\int\limits_h^{b-a}\frac{\omega(y,x)\,dy}{y^{2-\alpha(x)}}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $x-a>h$. Тогда, применяя неравенство (2.7), получаем

$$\begin{aligned} K_3 &\leqslant c\omega(x-a,x)(x-a)^{\alpha(x+h)}\left[\left(1+\frac{h}{x-a}\right)^{\alpha(x+h)}-1\right]\\ &\leqslant \frac{c\omega(x-a,x)h}{(x-a)^{1-\alpha(x+h)}} \leqslant ch\omega(x-a,x)\int\limits_{x-a}^{b-a}\frac{y^{\alpha(x+h)-\alpha(x)}dy}{y^{2-\alpha(x)}}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что величина $y^{\alpha(x+h)-\alpha(x)}$ под знаком интеграла ограничена. Поэтому

$$K_3 \leqslant ch\int\limits_{x-a}^{b-a}\frac{\omega(y,x)dy}{y^{2-\alpha(x)}} \leqslant ch\int\limits_h^{b-a}\frac{\omega(y,x)dy}{y^{2-\alpha(x)}}.$$

Таким образом, мы оценили слагаемое I_3. Собирая оценки для I_1, I_2 и I_3, приходим к неравенству (3.3). $\rhd$

Как и выше, в силу леммы 2.1 и условий (3.1), при рассмотрении оператора дробного дифференцирования достаточно получить оценку Зигмунда для множителя

$$g(x) := \frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha(x)}} \tag{3.4}$$

во внеинтегральном выражении из (1.2) и для интеграла

$$\theta(x) := \int\limits_a^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha(x)}}\,dt = \int\limits_0^{x-a}\frac{f(x)-f(x-t)}{t^{1+\alpha(x)}}\,dt. \tag{3.5}$$

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* (3.1). *Если* $f \in H_0^{\omega(\cdot)}([a,b])$, *то для функций* $g(x)$ *и* $\theta(x)$ *справедливы следующие оценки*

$$|g(x+h)-g(x)| \leqslant c \int\limits_0^h \frac{\omega(t,x)}{t^{1+\alpha(x)}}\,dt \|f\|_{H^\omega}, \tag{3.6}$$

$$|\theta(x+h)-\theta(x)| \leqslant c \int\limits_0^h \left[\frac{\omega(t,x)}{t^{1+\alpha(x)}} + \frac{\omega(t,x+h)}{t^{1+\alpha(x+h)}}\right] dt \|f\|_{H^\omega}, \tag{3.7}$$

где c *не зависит от* x, h *и* f.

$\lhd$ Проводится аналогично доказательству теоремы 3.1. Мы также считаем, что $0 < h < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$. Тогда при оценке $g(x)$ получаем $|g(x+h)-g(x)| \leqslant |A_1| + |A_2|$, где

$$\begin{aligned} A_1 &= \big[f(x+h)-f(x)\big]\big(x+h-a\big)^{-\alpha(x+h)}, \\ A_2 &= \big[f(x)-f(a)\big]\cdot\big[(x+h-a)^{-\alpha(x+h)} - (x-a)^{-\alpha(x)}\big]. \end{aligned}$$

А для функции $\theta(x)$ имеем $|\theta(x+h)-\theta(x)| \leqslant |A_3| + |A_4| + |A_5|$, где

$$A_3 = \int\limits_0^{x-a} [f(x)-f(x-t)]\cdot[(t+h)^{-1-\alpha(x+h)} - t^{-1-\alpha(x)}]\,dt,$$

$$A_4 = \int\limits_{-h}^{0} \frac{[f(x+h)-f(x-t)]}{(t+h)^{1+\alpha(x+h)}}\,dt, \quad A_5 = \int\limits_0^{x-a} \frac{[f(x+h)-f(x)]}{(t+h)^{1+\alpha(x+h)}}\,dt.$$

Слагаемые $A_1 - A_5$ оцениваются согласно схеме доказательства теоремы 3.1. Мы опускаем детали доказательства. $\rhd$

Оценки (3.3), (3.6) и (3.7) позволяют нам получить следующие теоремы о действии операторов дробного интегрирования и дифференцирования в пространствах обобщенной переменной гельдеровости.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия* (3.1), *функция* $\omega(t,x)$ *является функцией типа модуля непрерывности по* t *для каждого* $x \in [a,b]$ *и* $\omega(t,x) \in \Phi_{1-\alpha(x)}$. *Тогда оператор* $I_{a+}^{\alpha(\cdot)}$ *ограниченно действует из пространства* $H_0^{\omega(\cdot)}([a,b])$ *в пространство* $H_0^{\omega_\alpha(\cdot)}([a,b])$.

$\lhd$ Пусть $f \in H_0^{\omega_\alpha(\cdot)}([a,b])$. В обозначениях (3.2) имеем $I_{a+}^{\alpha(\cdot)} f(x) = \frac{\varphi(x)}{\Gamma[\alpha(x)]}$. Из леммы 2.1 следует, что оценку достаточно получить для функции $\varphi(x)$. В силу оценки (3.3), имеем

$$|\varphi(x+h)-\varphi(x)| \leqslant ch \int\limits_h^{b-a} \frac{\omega(t,x)\,dt}{t^{2-\alpha(x)}} \|f\|_{H^\omega}.$$

Тогда по определению класса $\Phi_{1-\alpha(x)}$:

$$|\varphi(x+h)-\varphi(x)| \leqslant ch^{\alpha(x)}\omega(h,x)\|f\|_{H^\omega}.$$

Равенство же $\varphi(a) = 0$ сразу следует из оценки

$$|\varphi(x)| \leqslant c\omega(x-a,x)(x-a)^{\alpha(x)}\|f\|_{H^\omega}. \rhd$$

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия* (3.1), *функция* $\frac{\omega(t,x)}{t^{\alpha(x)}}$ *является функцией типа модуля непрерывности по* t *для каждого* $x \in [a,b]$, $\omega(t,x) \in \Phi^{\alpha(x)}$ *и*

$$\omega(h, x+h) \leqslant c\omega(h,x), \quad h > 0, \tag{3.8}$$

где c *не зависит от* x *и* h. *Тогда оператор* $D^{\alpha(\cdot)}_{a+}$ *ограниченно действует из пространства* $H_0^{\omega(\cdot)}([a,b])$ *в пространство* $H_0^{\omega_{-\alpha}(\cdot)}([a,b])$.

$\lhd$ Доказательство теоремы 3.4 получается также, как и для теоремы 3.3, при помощи оценок (3.6), (3.7) из теоремы 3.2 и неравенства (3.8). $\rhd$

Замечание. Теорема 3.4 доказывается при дополнительном условии (3.8), которое позволяет говорить о действии оператора дробного дифференцирования из пространства с характеристикой $\omega(t,x)$ в пространство с естественным образом записываемой характеристикой $\frac{\omega(t,x)}{t^{\alpha(x)}}$. Можно опустить условие (3.8), но тогда нужно будет говорить о действии в пространство с модифицированной характеристикой $\widetilde{\omega}_{-\alpha}(t,x) = \sup_{y:|y-x|<t} \omega_{-\alpha}(t,y)$, как это сделано в [6] в случае пространственных гиперсингулярных интегралов (неодносторонней природы). Заметим, что характеристики $\widetilde{\omega}_{-\alpha}(t,x)$ и $\omega_{-\alpha}(t,x)$ эквивалентны при условии (3.8): $\omega_{-\alpha}(t,x) \leqslant \widetilde{\omega}_{-\alpha}(t,x) \leqslant 2c\omega_{-\alpha}(t,x)$, где c — постоянная из (3.8).

Литература

1. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. общества.—1956.—Т. 5.—С. 483–522.
2. *Вакулов Б. Г.* Сферические потенциалы в весовых пространствах Гёльдера переменного порядка // Докл. АН.—2005.—Т. 400, № 1.—С. 7–10.
3. *Вакулов Б. Г.* Сферические операторы типа потенциала в весовых пространствах Гёльдера переменного порядка // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, № 2.—С. 26–40.
4. *Вакулов Б. Г.* Операторы сферической свертки со степенно-логарифмическим ядром в пространствах обобщенной переменной гёльдеровости // Изв. вузов Сев.-Кавк. рег. Естеств. науки.—2006.—№ 1.—С. 7–10.
5. *Вакулов Б. Г.* Операторы сферической свертки в пространствах переменной гёльдеровости // Мат. заметки.—2006.—Т. 80, № 5.—С. 683–695.
6. *Вакулов Б. Г., Самко Н. Г., Самко С. Г.* Операторы типа потенциала и гиперсингулярные интегралы в пространствах Гёльдера переменного порядка на однородных пространствах // Изв. вузов. Сев.-Кавк. рег. Естеств. науки. Актуальные проблемы мат. гидродинамики. Спецвыпуск.—2009.—С. 40–45.
7. *Гинзбург А. И., Карапетянц Н. К.* Дробное интегродифференцирование в гёльдеровских классах переменного порядка // Докл. АН.—1994.—Т. 339, № 4.—С.439–441.
8. *Гусейнов А. И., Мухтаров Х. Ш.* Введение в теорию нелинейных сингулярных уравнений.—М.: Наука, 1980.—416 с.
9. *Karapetyants N. K., Ginzburg A. I.* Fractional integrodifferentiation in Holder classes of arbitrary order // Georg. Math. J.—1995.—Vol. 2, № 2.—P. 141–150.
10. *Karapetyants N. K., Samko N. G.* Weighted theorems on fractional integrals in the generalized Holder spaces $H_0^w(\varrho)$ via the indices m_w and M_w // Fract. Calc. Appl. Anal.—2004.—Vol. 7, № 4.—P. 437–458.
11. *Ross B., Samko S. G.* Fractional integration operator of variable order in the Holder spaces $H^{\lambda(x)}$ // Intern. J. Math. and Math. Sci.—1995.—Vol. 18, № 4.—P. 777–788.
12. *Samko S. G.* Differentiation and integration of variable order and the Spaces $L^{p(x)}$ // Contemporary Math.—1998.—Vol. 212.—P. 203–219.
13. *Samko S. G., Murdaev Kh. M.* Weighted Zygmund estimates for fractional differentiation and integration, and their applications // Proceedings of the Steklov Institute of Math.—1989.—№ 3.—P. 233–235.
14. *Vakulov B. G.* Spherical potentials of complex order in the variable Holder spaces // Integral Trans. and Spec. Funct.—2005.—Vol. 16, № 5–6.—P. 489–497.

Статья поступила 11 августа 2009 г.

Вакулов Борис Григорьевич
Южный федеральный университет,
доцент кафедры дифференц. и интегр. уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
старший научный сотрудник лаб. вещественного анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: vakulov@math.rsu.ru

Кочуров Евгений Сергеевич
Южный федеральный университет,
аспирант кафедры дифференц. и интегр. уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: ekochurov@yandex.ru

FRACTIONAL INTEGRALS AND DIFFERENTIALS OF VARIABLE ORDER IN HÖLDER SPACES $H^{\omega(t,x)}$

Vakulov B. G., Kochurov E. S.

We consider generalized Hölder spaces of functions on the segment of real axis, whose local continuity modulus has a dominant which may vary from a point to point. We establish theorems on the mapping properties of fractional integrals of variable order, from such a variable generalized Hölder space to another one with a «better» dominant, and similar mapping properties of fractional differentials of variable order from such a space into the space with «worse» dominant. Variable order can take values between zero and unity.

Key words: fractional integrals, fractional differentials, generalized continuity modulus, generalized Hölder spaces with variable characteristics.