Владикавказский математический журнал
2010, Том 12, Выпуск 4, С. 39–43

УДК **519.46**

СЕТИ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ СЕТЯМИ

В. А. Койбаев

Работа посвящена изучению сетей и элементарной группы, связанной с сетью. По элементарной сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ (т. е. сети без диагонали) аддитивных подгрупп σ_{ij}, $i \neq j$, коммутативного кольца R с единицей строятся две сети: сеть ω_σ, ассоциированная с σ, и сеть Ω^σ, ассоциированная с элементарной группой $E(\sigma)$, причем на недиагональных позициях справедливы включения $\omega_\sigma \subseteq \sigma \subseteq \Omega^\sigma$.

Ключевые слова: сети, сетевые группы, элементарная группа, трансвекция.

Пусть R — произвольное коммутативное кольцо с единицей, n — натуральное число. Система

$$\sigma = (\sigma_{ij}), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

аддитивных подгрупп кольца R называется *сетью* [1] над кольцом R порядка n, если

$$\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$$

при всех значениях индексов i, r, j. Сеть принято также называть ковром [2].

Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется *элементарной сетью* (элементарным ковром [3, 4], вопрос 15.46). Таким образом, элементарная сеть это набор $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, аддитивных подгрупп кольца R, для которых $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ для любой тройки попарно различных чисел i, r, j. Хорошо известно, что элементарную сеть можно дополнить до (полной) сети тогда и только тогда, когда

$$\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$$

для любых $i \neq j$ (см., например, [1]).

Если A, B — подгруппы аддитивной группы кольца R, то через AB мы обозначаем подгруппу аддитивной группы кольца R, порожденную всеми произведениями ab, $a \in A$, $b \in B$.

Пусть e — единичная матрица порядка n, e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных местах нули. Если $\alpha \in R$, то через $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$ обозначается элементарная трансвекция. Положим, далее,

$$t_{ij}(A) = \{t_{ij}(\alpha) : \alpha \in A\}.$$

Для элементарной сети (или сети) σ через $E(\sigma)$ обозначается элементарная группа:

$$E(\sigma) = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \rangle.$$

Далее, если ω — сеть, то через $G(\omega)$ обозначается сетевая группа [1].

На протяжении всей статьи предполагается, что n — натуральное число, $n \geqslant 3$, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над кольцом R порядка n.

1. Сеть, ассоциированная с элементарной сетью

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над кольцом R порядка n. Рассмотрим набор $\omega_\sigma = \omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца R, определенных для любых $i \neq j$ следующим образом:

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{kj},$$

где, очевидно (так как σ — элементарная сеть), суммирование берется по всем k, отличным от i и j. Ясно, что $\omega_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$, следовательно, для любой тройки попарно различных чисел i, r, j, мы имеем

$$\omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}.$$

Таким образом, набор $\omega_\sigma = \omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца R является элементарной сетью.

Пример. Пусть $n = 3$. Тогда $\omega_\sigma = \omega = (\omega_{ij})$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} * & \sigma_{13}\sigma_{32} & \sigma_{12}\sigma_{23} \\ \sigma_{23}\sigma_{31} & * & \sigma_{21}\sigma_{13} \\ \sigma_{32}\sigma_{21} & \sigma_{31}\sigma_{12} & * \end{pmatrix}.$$

Непосредственно из сетевого условия вытекают следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть. Для подгрупп элементарной сети имеют место следующие утверждения:*

(1) *если $i \neq j$, то $(\sigma_{ir}\sigma_{ri})(\sigma_{jr}\sigma_{rj}) \subseteq (\sigma_{ir}\sigma_{ri}) \cap (\sigma_{jr}\sigma_{rj}) \cap (\sigma_{ij}\sigma_{ji})$;*

(2) *если $i \neq r$, то $\sigma_{ik}\sigma_{kr}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ir}\sigma_{rj}$; если $i = r$, $k \neq j$, то $\sigma_{ik}\sigma_{kr}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ik}\sigma_{kj}$;*

(3) *если $k \neq j$, то $(\sigma_{ik}\sigma_{ki})\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ik}\sigma_{kj} \subseteq \sigma_{ij}$;*

(4) *(цикл) имеет место включение*

$$\sigma_{ik}\sigma_{kr}\sigma_{ri} \subseteq (\sigma_{ir}\sigma_{ri}) \cap (\sigma_{kr}\sigma_{rk}) \cap (\sigma_{ik}\sigma_{ki});$$

(5) *если $i \neq j$, то (m — натуральное) $(\sigma_{ik}\sigma_{kj})(\sigma_{rj}\sigma_{jr})^m \subseteq \sigma_{ik}\sigma_{kj}$.*

Предложение 1. *Элементарная сеть $\omega = \omega_\sigma$ является дополняемой, т. е. дополняется до (полной) сети. Другими словами, для любых $i \neq j$*

$$\omega_{ij}\omega_{ji}\omega_{ij} \subseteq \omega_{ij}. \tag{1}$$

Элементарную сеть ω можно дополнить до (полной) сети стандартным способом, полагая для произвольного i, $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\omega_{ii} = \sum_{k \neq i} \omega_{ki}\omega_{ik},$$

где суммирование ведется по всем $k = 1, 2, \ldots, n$, $k \neq i$. Однако мы предлагаем другой (необходимый нам для дальнейшей работы с элементарными группами) способ дополнения элементарной сети ω до полной. Для любых $i \neq j$ положим (прямая сумма)

$$\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m.$$

Тогда диагональные элементы ω_{ii}, $1 \leqslant i \leqslant n$, определим следующим образом:

$$\omega_{ii} = \sum_{k \neq s} (\gamma_{ik} \cap \gamma_{is} \cap \gamma_{ks}), \tag{2}$$

где суммирование ведется по всем $1 \leqslant k \neq s \leqslant n$ (ясно, что $k \neq i$, $s \neq i$).

Если, например, $n = 3$, то $\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = \gamma_{12} \cap \gamma_{13} \cap \gamma_{23}$.

Ясно, что ω_{ii} состоит из сумм элементов вида

$$t(i,k,s) = \sum_{m=1}^{m_1} (\sigma_{ik}\sigma_{ki})^m \cap \sum_{p=1}^{p_1} (\sigma_{is}\sigma_{si})^p \cap \sum_{l=1}^{l_1} (\sigma_{sk}\sigma_{ks})^l. \tag{3}$$

Лемма 2. *Пусть i, j, k, p, m — натуральные, причем i, j, k попарно различны. Тогда*

$$(\sigma_{ij}\sigma_{ji})^m (\sigma_{ik}\sigma_{ki})^p \subseteq (\sigma_{ij}\sigma_{ji})^m \cap (\sigma_{ik}\sigma_{ki})^p \cap (\sigma_{kj}\sigma_{jk})^q,$$

где $q = \min(m,p)$. В частности,

$$(\sigma_{ij}\sigma_{ji})^m (\sigma_{ik}\sigma_{ki})^p \subseteq \gamma_{ij} \cap \gamma_{ik} \cap \gamma_{kj}.$$

Предложение 2. *Элементарная сеть ω, дополненная диагональю по формуле (2), является (полной) сетью.*

Определение. Пусть σ — элементарная сеть, тогда (полную) сеть $\omega_\sigma = \omega$, определенную формулой (2), мы называем *сетью, ассоциированной с σ*.

Предложение 3. *Пусть σ — элементарная сеть, $\omega_\sigma = \omega$, сеть, ассоциированная с σ, $r \neq j$. Тогда для любых i, r мы имеем*

$$\omega_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \omega_{ij}, \quad \sigma_{jr}\omega_{ri} \subseteq \omega_{ji}. \tag{4}$$

2. Сеть, ассоциированная с элементарной группой

В этом параграфе мы построим сеть связанную с элементарной группой. В основе построения такой сети лежит следующее утверждение.

Пусть $\alpha, \beta \subseteq R^+$ — подгруппы аддитивной группы кольца R. Рассмотрим элементарную сеть σ_0 второго порядка

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} * & \alpha \\ \beta & * \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha\beta)^k.$$

Предложение 4. *Рассмотрим элементарную группу*

$$E(\sigma_0) = \langle t_{21}(\beta),\, t_{12}(\alpha) \rangle.$$

Если $a \in E(\sigma_0)$,

$$a = \begin{pmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1 + a_{22} \end{pmatrix},$$

то

$$a_{11}, a_{22} \in \gamma, \quad a_{12} \in \alpha + \alpha\gamma, \quad a_{21} \in \beta + \beta\gamma.$$

Доказательство предложения проводится простыми вычислениями.

Замечание. Символ $\sum_{k=0}^{\infty}$ обозначает прямую сумму групп, т. е. если $\theta \in \sum_{k=0}^{\infty}$, то для некоторого n мы имеем $\theta \in \sum_{k=0}^{n}$.

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над кольцом R порядка n, $\sigma_{ij} \in R^+$, $i \neq j$. Для произвольных $i \neq j$ положим

$$\Omega_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}\gamma_{ij},$$

где

$$\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m. \tag{5}$$

Лемма 3. *Если $r \neq j$, то $\omega_{ij}\gamma_{rj} \subseteq \omega_{ij}$.*

Предложение 5. *Таблица $\Omega^\sigma = \Omega = \Omega_{ij}$ является элементарной сетью, причем дополняемой, т. е. справедливы включения*

$$\Omega_{ij}\Omega_{ji}\Omega_{ij} \subseteq \Omega_{ij}$$

для любых $i \neq j$.

В силу предложения 5 дополним элементарную сеть Ω до (полной) сети, положив

$$\Omega_{ii} = \sum_{k \neq i} \Omega_{ik}\Omega_{ki},$$

где суммирование берется по $k = 1, 2, \ldots, n$, $k \neq i$. Нетрудно видеть, что

$$\Omega_{ii} = \sum_{k=1,\, k \neq i}^{n} \gamma_{ik}.$$

Так, например,

$$\Omega_{11} = \gamma_{12} + \gamma_{13} + \ldots + \gamma_{1n}.$$

Заметим, что $\omega_{ii} \subseteq \Omega_{ii}$ для всякого i.

Так, определенную (полную) сеть $\Omega = \Omega^\sigma$ мы называем *сетью ассоциированной с элементарной группой* $E(\sigma)$ для элементарной сети σ.

Ясно, что $\omega_\sigma \leqslant \Omega^\sigma$ и (для недиагональных позиций) $\omega_\sigma \leqslant \sigma \leqslant \Omega^\sigma$.

Сети Ω^σ и ω_σ связаны следующим предложением.

Предложение 6. *Для любых i, r, j имеем*

$$\omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}, \quad \Omega_{jr}\omega_{ri} \subseteq \omega_{ji}.$$

Автор приносит искреннюю благодарность В. М. Левчуку и Я. Н. Нужину за плодотворные беседы в г. Красноярске, результатом которых явилась настоящая работа.

Литература

1. *Боревич З. И.* О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1978.—Т. 75.—С. 22–31.
2. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.—М.: Наука, 1982.—288 с.
3. *Левчук В. М.* Замечание к теореме Л. Диксона // Алгебра и логика.—1983.—Т. 22, № 5.—С. 504–517.

4. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Изд. 17-е, дополненное.—Новосибирск: ИМ СО РАН, 2010.—219 с.

Статья поступила 15 октября 2010 г.

Койбаев Владимир Амурханович
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова,
заведующий кафедрой алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
ведущий научный сотрудник лаб. теории операторов
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `koibaev-K1@yandex.ru`

NETS ASSOCIATED WITH THE ELEMENTARY NETS

Koibaev V. A.

For an elementary net (i. e. a net without diagonal) $\sigma = (\sigma_{ij})$ of additive subgroups σ_{ij}, $i \neq j$, of a commutative ring R with 1 two nets are constructed: the net ω_σ associated with σ and the net Ω^σ associated with the elementary group $E(\sigma)$, and (on the off-diagonal positions) we have $\omega_\sigma \subseteq \sigma \subseteq \Omega^\sigma$.

Key words: nets, net groups, elementary group, transvection.