Владикавказский математический журнал
2010, Том 12, Выпуск 4, С. 60–66

УДК **512.544.2**

ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ПОДГРУППЫ ГРУПП СТЕЙНБЕРГА НАД ПОЛЕМ ЧАСТНЫХ КОЛЬЦА ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ[1]

Т. В. Моисеенкова, Я. Н. Нужин

Описаны промежуточные подгруппы групп Стейнберга типа ${}^2A_{2m-1}$, ${}^2D_{m+1}$, ${}^2E_6$, ${}^3D_4$ над полем частных кольца главных идеалов при некоторых ограничениях на мультипликативную группу кольца главных идеалов.

Ключевые слова: кольцо главных идеалов, группа Стейнберга, промежуточные подгруппы.

В 1970 г. Ю. И. Мерзляковым в «Коуровской тетради» была поставлена задача [1, вопрос 7.40].

Задача. Дать описание (решетки) подгрупп, заключенных между заданной классической группой матриц над кольцом K и подгруппой всех ее матриц с коэффициентами в подкольце D.

К настоящему времени эта задача рассматривалась, главным образом, в следующих двух случаях: а) K — алгебраическое расширение поля D [3, 6, 9, 17]; б) K — поле частных области целостности D [4–6, 8, 10–14]. В указанных выше работах установлено, что промежуточные подгруппы исчерпываются классическими группами того же типа над промежуточными подкольцами или их расширениями при помощи диагональной подгруппы — стандартными промежуточными подгруппами. При доказательстве подобных результатов полезны различные факторизации данной классической группы. Различные нестандартные промежуточные подгруппы указаны в [15, 16].

В [14] авторы установили разложение Ивасавы для групп Стейнберга над полем частных кольца главных идеалов и, используя его, описали их промежуточные подгруппы при некоторых ограничениях на характеристику и мультипликативную группу кольца главных идеалов. В данной работе показывается, что ограничения на характеристику основного кольца могут быть сняты.

1. Терминология и обозначения

Далее всюду K поле частных кольца главных идеалов D, $G = G(K)$ — группа Шевалле (нормального типа) над полем K, ассоциированная с системой корней Φ и решеткой весов L, лежащей между решеткой корней и решеткой фундаментальных весов. Для любого подкольца P поля K через $G(P)$ обозначим подгруппу в G, состоящую из элементов,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 01-09-00-717.

координаты которых относительно решетки L лежат в P. Группа G порождается своими корневыми подгруппами

$$X_r = \big\langle x_r(t) \mid t \in K \big\rangle, \quad r \in \Phi,$$

где $x_r(t)$ — соответствующий корневой элемент в группе G.

В применении результатов по линейным группам степени 2 к группам Шевалле или Стейнберга мы будем использовать известный гомоморфизм ϕ_r группы $SL_2(K)$ на подгруппу

$$G_r = \langle X_r, X_{-r} \rangle, \quad r \in \Phi,$$

продолжающий отображение

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to x_r(t), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \to x_{-r}(t).$$

Пусть $t \in K^*$, где K^* — мультипликативная группа поля K, тогда образы матриц

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

обозначаются соответственно через $h_r(t)$ и $n_r(t)$. При этом для любых $r, s \in \Phi$ и $t, u \in K^*$ имеем

$$n_r x_s(u)\, n_r^{-1} = x_{\omega_r(s)}(\pm u), \qquad h_r(t)\, x_s(u)\, h_r\big(t^{-1}\big) = x_s\Big(u t^{2(r,s)/(r,r)}\Big),$$

где $n_r = n_r(1)$, ω_r — отражение относительно корня r.

Выделим некоторые подгруппы в группе G. По определению:
$U = \big\langle X_r \mid r \in \Phi^+ \big\rangle$ — унипотентная подгруппа;
$H = \big\langle h_r(t) \mid r \in \Phi, t \in K^* \big\rangle$ — диагональная подгруппа;
$N = \big\langle n_r(t) \mid r \in \Phi, t \in K^* \big\rangle$ — мономиальная подгруппа;
$B = UH$ — борелевская подгруппа.

Система корней Φ типа A_l, D_l, E_6 с базой $\{r_1, \ldots, r_l\}$ обладает симметрией ρ порядка 2, а система типа D_4 имеет еще и симметрию порядка 3 (рис. 1).

Если кольцо (а следовательно, и поле K) обладает автоморфизмом f, порядок которого совпадает с порядком симметрии ρ графа Кокстера, то определена группа Стейнберга $G^1 = G^1(K)$ над полем K как централизатор графового автоморфизма $\sigma = f\rho$, т. е.

$$G^1 = \big\{ g \in G \mid \sigma(g) = g \big\}.$$

С группой Стейнберга G^1 типа

$${}^2A_{2m},\ {}^2A_{2m-1},\ {}^2D_{m+1},\ {}^2E_6,\ {}^3D_4$$

естественно связана система корней Φ^1 типа

$$B_m,\ C_m,\ B_m,\ F_4,\ G_2$$

соответственно. Группа G^1 порождается своими корневыми подгруппами $X_S^1, S \in \Phi^1$, где S пробегает классы эквивалентности относительно симметрии ρ. Если тип G^1 отличен от ${}^2A_{2m}$, то все корневые подгруппы X_S^1 коммутативны, причем:
$X_S^1 = \big\{ x_S(t) = x_r(t) \mid t \in K_f \big\}$, если $S = \{r\}$;
$X_S^1 = \big\{ x_S(t) = x_r(t)\, x_{\bar r}(\bar t) \mid t \in K \big\}$, если $S = \{r, \bar r\}$;
$X_S^1 = \big\{ x_S(t) = x_r(t)\, x_{\bar r}(\bar t)\, x_{\bar{\bar r}}(\bar{\bar t}) \mid t \in K \big\}$, если $S = \{r, \bar r, \bar{\bar r}\}$.

Здесь K_f — подполе неподвижных элементов поля K относительно автоморфизма f, $\bar{t} = f(t)$ и $\bar{r} = \rho(r)$.

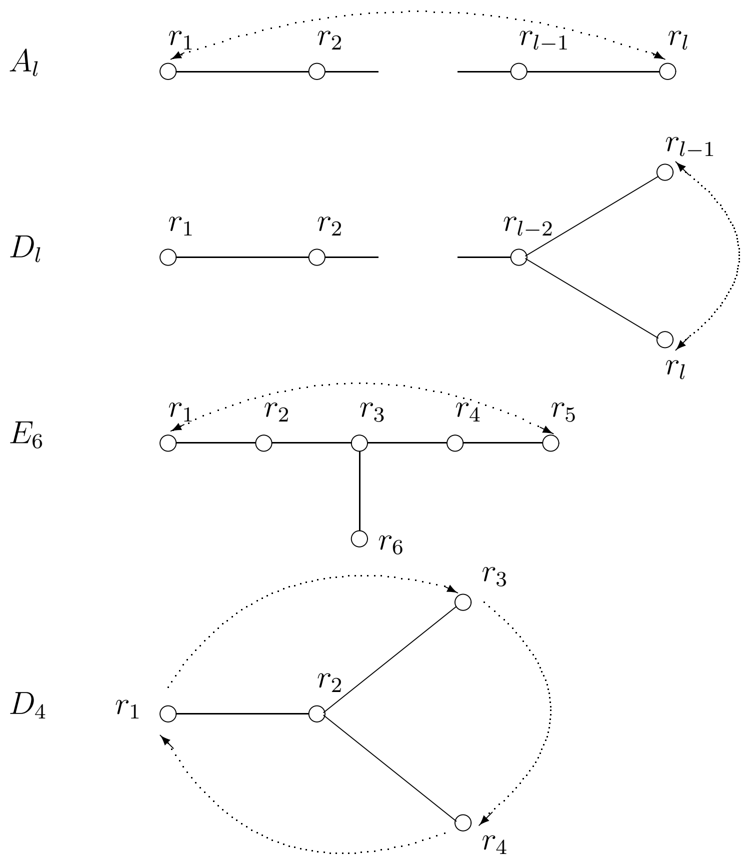

Рис. 1.

В группе G^1 также определяются унипотентная, диагональная, мономиальная и борелевская подгруппы

$$U^1 = G^1 \cap U,$$
$$H^1 = G^1 \cap H,$$
$$N^1 = G^1 \cap N,$$
$$B^1 = G^1 \cap B$$

соответственно. Если тип G^1 отличен от ${}^2A_{2m}$, то существует также гомоморфизм ϕ группы $SL_2(K)$ или группы $SL_2(K_f)$, если $S = \{r\}$, на подгруппу

$$G^1_S = \langle X^1_S, X^1_{-S} \rangle, \ S \in \Phi^1,$$

продолжающий отображение

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to x_S(t), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \to x_{-S}(t).$$

В заключение отметим, что классическим примером кольца главных идеалов и даже евклидова кольца, обладающего автоморфизмом порядка два, является кольцо целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$. Его автоморфизмом порядка два является обычное сопряжение комплексных чисел. В этом случае в наших обозначения

$$D = \mathbb{Z}+i\mathbb{Z},$$
$$K = \mathbb{Q}+i\mathbb{Q},$$

а группа Стейнберга G^1 типа $^2A_{2m-1}$ изоморфна специальной унитарной группе

$$SU_{2m}(\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}),$$

если решетка весов L совпадает со всей решеткой фундаментальных весов, или проективной специальной унитарной группе

$$PSU_{2m}(\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}),$$

если решетка весов L совпадает с решеткой корней.

2. Предварительные результаты

В [11] описаны подгруппы лежащие между группами $SL_n(D)$ и $SL_n(K)$. Ранее для евклидова кольца D аналогичное описание получено в [6]. В частности, при $n=2$ получаем следующий результат.

Лемма 2.1. *Пусть подгруппа M удовлетворяет условию*

$$SL_2(D) \subseteq M \subseteq SL_2(K).$$

Тогда

$$M = SL_2(P)$$

для некоторого промежуточного подкольца P, $D \subseteq P \subseteq K$.

Лемма 2.2 (Разложение Ивасавы для групп Стейнберга)**.**

$$G^1 = B^1G^1(D).$$

Лемма 2.3. *Если диагональный элемент $h \in H^1$ нормализует группу $G^1(P)$, где $D \subseteq P \subseteq K$, то $h \in G^1(P)$.*

Разложение Ивасавы для групп Стейнберга и утверждение леммы 2.3 доказаны авторами в [14]. Отметим, что доказательство разложения Ивасавы для групп Шевалле (нормального типа) приведено в книге Р. Стейнберга [7].

Положим

$$A^n = \{a^n \mid a \in A\}.$$

По определению подгруппа A мультипликативной группы P^* кольца P *удовлетворяет условию* (k,n), если аддитивная группа, порожденная множеством $(1-A^k)\,A^n$, содержит единицу кольца P.

Лемма 2.4. *Пусть M — подгруппа группы $U^1H^1 \subset G^1(K)$, нормализуемая группой $H^1 \cap G^1(T)$, где T — подкольцо поля K, а T_f — его подкольцо неподвижных элементов относительно автоморфизма f. Пусть мультипликативная группа T_f^* удовлетворяет условию $(2,1)$ и, кроме того, условию $(2,2)$ для $G^1(K)$ типа $^2A_{2m-1}$ и условию $(3,1)$ для $G^1(K)$ типа $^3D_4$. Тогда, если*

$$x_{R_1}(t_1)\,x_{R_2}(t_1)\ldots x_{R_k}(t_k)\,h \in M,$$

где $0 < R_1 < R_2 < \ldots < R_k$ *и* $h \in H^1$, *то* $h \in M$ *и*

$$x_{R_i}(t_i) \in M, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Утверждение леммы 2.4 является частным случаем теоремы 3 из [2] для групп Стейнберга.

Нам потребуются также следующая техническая лемма.

Лемма 2.5. *Любое промежуточное подкольцо* P, $D \subseteq P \subseteq K$, *порождается подкольцом* D *и любой своей степенью* P^n, $n = 1, 2, \ldots$

$\lhd$ Пусть a, b — взаимно простые элементы из D и элемент

$$p = \frac{a}{b}$$

лежит в P. Из определения кольца главных идеалов следует, что существуют элементы $c, d \in D$ такие, что

$$a^n c + b^n d = 1.$$

Поэтому

$$\frac{a^n}{b^n}\, c + d = \frac{a^n c + b^n d}{b^n} = \frac{1}{b^n}.$$

Отсюда элемент p лежит в кольце, порожденном подкольцом D и элементом p^n. $\rhd$

3. Основная теорема

Теорема 3.1. *Пусть* $G^1(K)$ — *группа Стейнберга типа* ${}^2A_{2m-1}$, ${}^2D_{m+1}$, ${}^2E_6$, *или* ${}^3D_4$ *над полем частных* K *кольца главных идеалов* D. *Предположим, что:*

1) D_f^* *удовлетворяет условию* $(2, 2)$, *если* $G^1(K)$ *типа* ${}^2A_{2m-1}$ $(m \geqslant 2)$;

2) D_f^* *удовлетворяет условию* $(2, 1)$, *если* $G^1(K)$ *типа* ${}^2D_{m+1}$ $(m \geqslant 3)$ *или* ${}^2E_6$;

3) D_f^* *удовлетворяет условиям* $(2, 1)$, $(3, 1)$, *если* $G^1(K)$ *типа* ${}^3D_4$.

Пусть подгруппа M *удовлетворяет условию*

$$G^1(D) \subseteq M \subseteq G^1(K).$$

Тогда

$$M = G^1(P)$$

для некоторого промежуточного подкольца P, $D \subseteq P \subseteq K$.

$\lhd$ Пусть $g \in M$. По лемме 2.2

$$g = bg_1,$$

где

$$b \in B^1, \quad g_1 \in G^1(D) \subset M.$$

Поэтому $b \in M$. Элемент b однозначно представляется в виде uh, где $u \in U^1$, $h \in H^1$. В свою очередь, элемент u однозначно представляется в виде

$$x_{R_1}(t_1)\, x_{R_2}(t_1) \ldots x_{R_k}(t_k),$$

для некоторых R_i с условием $0 < R_1 < R_2 < \ldots < R_k$ и некоторых $t_i \in K$. По лемме 2.4 из включения $b \in M$ следуют включение $h \in M$ и включения

$$x_{R_i}(t_i) \in M, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Таким образом,

$$M = \langle G^1(D), M \cap H^1, M \cap X_S^1 \mid S \in \Phi^1 \rangle.$$

Пусть

$$P_S = \{t \mid x_S(t) \in M\}.$$

По условию теоремы

$$M \cap G_S^1 \supset \langle G_S^1(D), x_S(P_S), x_{-S}(P_{-S}) \rangle.$$

Так как мономиальная подгруппа $N^1(D)$ лежит в M и действует транзитивно на корневых подгруппах, то множества P_S совпадают для корней S одинаковой длины. Пусть $P_S = P$, если S — короткий корень, и $P_S = F$ для длинных корней S. Ясно, что $F \subseteq K_f$. По лемме 2.1

$$M \cap G_S^1 = G_S^1(T_S)$$

для некоторого подкольца $P_S \subseteq K$, поэтому множества P и F являются кольцами.

Пусть тип G^1 отличен от ${}^3D_4$. Возьмем корни $R, S \in \Phi^1$, составляющие базу системы корней типа B_2, где корень R короткий, а S длинный. Тогда из коммутаторной формулы Шевалле вытекает равенство

$$\bigl[x_R(u), x_S(t)\bigr] = x_{R+S}(\pm ut)\, x_{2R+S}(\pm u\bar{u}t), \quad u \in P, \ \ t \in F.$$

По лемме 2.4 каждый из двух сомножителей этого равенства лежит в M. Поэтому получаем при $u = 1$ включение $F \subseteq P_f$, а при $t = 1$ включение $P_f^2 \subseteq F$. Сейчас в силу леммы 2.5 $F = P_f$.

Пусть G^1 типа ${}^3D_4$ и корни $R, S \in \Phi^1$ составляют базу системы корней типа G_2, где корень R короткий, а S длинный. Тогда из коммутаторной формулы Шевалле следует равенство

$$\bigl[x_R(u), x_S(t)\bigr] = x_{R+S}(\pm ut)\, x_{2R+S}(\pm u\bar{u}t)\, x_{3R+S}(\pm u\bar{u}\bar{\bar{u}}t)\, x_{3R+2S}(\pm u\bar{u}\bar{\bar{u}}t^2), \quad u \in P, \ \ t \in F.$$

По лемме 2.4 каждый из четырех сомножителей последнего равенства лежит в M. Поэтому получаем при $u = 1$ включение $F \subseteq P_f$, а при $t = 1$ включение $P_f^3 \subseteq F$. По лемме 2.5 $F = P_f$.

Таким образом, мы показали, что для некоторого промежуточного подкольца P

$$M = \langle G^1(P), M \cap H^1 \rangle$$

и пересечение $M \cap H^1$ нормализует подгруппу $G^1(P)$. По лемме 2.3 $M = G^1(P)$. $\triangleright$

В заключение отметим, что утверждение теоремы 3.1 было доказано авторами в [14] при дополнительном условии обратимости 2 в кольце D для типов ${}^2A_{2m-1}$, ${}^2D_{m+1}$, ${}^2E_6$ и обратимости 3 для типа ${}^3D_4$.

Литература

1. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Изд. 17-е, доп.—Новосибирск: ИМ СО РАН, 2010.—219 с.
2. *Левчук В. М.* Параболические подгруппы некототорых ABA-групп // Мат. заметки.—1982.—Т. 31, № 4.—С. 509–525.
3. *Нужин Я. Н.* Группы, лежащие между группами лиева типа над различными полями // Алгебра и логика.—1983.—Т. 22, № 5.—С. 526–541.

4. *Нужин Я. Н.* О группах, лежащих между группами Шевалле над различными кольцами.— Красноярск: Красноярский политехн. ин-т, 1984.—6 с. Деп. в ВИНИТИ № 7764–84.
5. *Нужин Я. Н., Якушевич А. В.* Промежуточные подгруппы групп Шевалле над полем частных кольца главных идеалов // Алгебра и логика.—2000.—Т. 39, № 3.—С. 199–206.
6. *Романовский Н. С.* Подгруппы, лежащие между специальными линейными группами над кольцом и его подкольцом // Мат. заметки.—1969.—Т. 6, № 3.—С. 335–345.
7. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле.—М.: Мир, 1975.—262 с.
8. *Степанов А. В.* Описание подгрупп общей линейной группы над кольцом с ипользованием условий стабильности // Кольца и линейные группы.—1988.—С. 82–91.
9. *Шкуратский А. И.* О подгруппах симплектической группы над алгебраически замкнутым полем // Алгебра и логика.—1983.—Т. 22, № 4.—С. 466–473.
10. *Шкуратский А. И.* О подгруппах симплектической группы над полем частных евклидова кольца // Алгебра и логика.—1984.—Т. 23, № 5.—С. 578–596.
11. *Шмидт Р. А.* О подгруппах полной линейной группы над полем частных кольца главных идеалов // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР.—1979.—Т. 86—С. 185–187.
12. *Шмидт Р. А.* О подгруппах полной линейной группы над полем частных дедекиндова кольца // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР.—1979.—Т. 94.—С. 119–130.
13. *Шмидт Р. А.* О подгруппах полной линейной группы над полем частных кольца Безу // Структурные свойства алгебраических систем.—Нальчик, 1981.—С. 133–135.
14. *Moiseenkova T. V.* The Ivasava decomposition and intermediate subgroups of the Steinberg groups over the field of fractions of a principal ideal ring // Scien. in China Series A: Math.—2009.—Vol. 52, № 2.—P. 318–322.
15. *Stepanov A. V.* Nonstandard subgroups between $E_n(R)$ and $GL_n(A)$ // Algebra Colloquium.—2004.— Vol. 10, № 3.—P. 321–334.
16. *Stepanov A. V.* Free product subgroups between Chevalley groups $G(\Phi, F)$ and $G(\Phi, F[t])$ // J. Algebra.—2010.—Vol. 324.—P. 1549–1557.
17. *Wang D., Li S.* Overgroups of $l(k)$ in $l(f)$ // Algebra Colloquium.—1998.—Vol. 5, № 4—P. 417–424.

Статья поступила 4 октября 2010 г.

Моисеенкова Татьяна Владимировна
Сибирский федеральный университет,
старший преподаватель
РОССИЯ, 660074, Красноярск, ул. Киренского 26
E-mail: `mpi75@rambler.ru`

Нужин Яков Нифантьевич
Сибирский федеральный университет, *профессор*
РОССИЯ, 660074, Красноярск, ул. Киренского 26
E-mail: `nuzhin2008@rambler.ru`

INTERMEDIATE SUBGROUPS OF THE STEINBERG GROUPS OVER THE FIELD OF FRACTIONS OF A PRINCIPAL IDEAL RING

Moiseenkova T. V., Nuzhin Ya. N.

It is described Intermediate subgroups of the Steinberg groups of type ${}^2A_{2l-1}$, ${}^2D_l$, ${}^2E_6$, ${}^3D_4$ over the field of fractions of a principal ideal ring are described under some restrictions on the ring.

Key words: Principal ideal ring, Steinberg group, intermediate subgroups.