Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 1, С. 3–12

УДК **519.633**

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА

А. К. Баззаев

Посвящается девяностолетию со дня рождения Глеба Павловича Акилова

В данной статье рассматриваются локально-одномерные схемы для уравнения теплопроводности с незнакоопределенным оператором в эллиптической части. Получена априорная оценка для их решения. Доказаны устойчивость и сходимость решения разностной задачи.

Ключевые слова: локально-одномерная схема, третья краевая задача, уравнение теплопроводности, устойчивость и сходимость разностных схем.

1. Локально-одномерная разностная схема

В цилиндре $Q_T = G \times (0, T]$, основанием которого является прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 < x_\alpha < \ell_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \dots, p\}$ с границей Γ, рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha}(x,t)\,u(x,t) - \mu_{-\alpha}(x,t), & x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha}(x,t)\,u(x,t) - \mu_{+\alpha}(x,t), & x_\alpha = \ell_\alpha, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{3}$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha(x,t)u,$$

$k_\alpha(x,t)$, $q_\alpha(x,t)$, $f(x,t)$, $\beta_{\pm\alpha}(x,t)$ — заданные функции x и t такие, что

$$0 < c_0 \leqslant k_\alpha(x,t) \leqslant c_1, \quad |q_\alpha|, |\beta_{\pm\alpha}| \leqslant c_2,$$

$$k_\alpha(x,t) \in C^{3,1}(\bar{Q}_T), \quad q_\alpha(x,t), f(x,t) \in C^{2,1}(\bar{Q}_T), \quad \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

где $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0, T]$, $\bar{G} = G + \Gamma$, $C^{m,n}$ — класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными порядков m и n по x и по t соответственно. Такие несколько завышенные условия гладкости потребуются при построении разностной схемы второго порядка аппроксимации.

Задача (1)–(3) рассматривалась в работе [1] в случае, когда $q_\alpha \geqslant q_* > 0$, $\beta_{\pm\alpha} \geqslant 0$, $\beta^2_{-\alpha}+\beta^2_{+\alpha} > 0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. А в работах [2] и [3] рассматривались локально-одномерные схемы (ЛОС) для нагруженного уравнения теплопроводности и для уравнения диффузии дробного порядка соответственно.

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_α с шагом $h_\alpha = \ell_\alpha/N_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p$.

$$\bar\omega_\alpha = \left\{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha : i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha\right\}, \quad \bar\omega_h = \prod_{\alpha=1}^{p} \bar\omega_\alpha,$$

$$\omega_\alpha = \left\{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha : i_\alpha = 1, \ldots, N_\alpha - 1\right\}, \quad \omega_h = \prod_{\alpha=1}^{p} \omega_\alpha,$$

$$\hbar_\alpha = \begin{cases} h_\alpha, & i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1, \\ h_\alpha/2, & i_\alpha = 0, N_\alpha, \end{cases}$$

ω_α — множество внутренних по отдельному направлению x_α узлов, γ_α — множество граничных по отдельному направлению x_α узлов, $\bar\omega_\alpha$ — множество всех внутренних и граничных по отдельному направлению x_α узлов, ω_h — множество всех внутренних узлов, $\bar\omega_h$ — множество всех внутренних и граничных узлов (по всем направлениям вместе).

На отрезке $[0, T]$ также введем равномерную сетку $\bar\omega_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots, j_0\}$ с шагом $\tau = T/j_0$. Каждый из отрезков $[t_j, t_{j+1}]$ разобьем на p частей, введя точки $t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \frac{\alpha}{p}\tau,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p-1$, и обозначим $\Delta_\alpha = \left(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}}\right],\ \alpha = 1, 2, \ldots, p$.

Уравнение (1) перепишем в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \mathscr{P}_\alpha u = 0, \quad \mathscr{P}_\alpha u = \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f.$$

Будем последовательно решать задачи [6]

$$\mathscr{P}_\alpha v_{(\alpha)} = \frac{1}{p}\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} - L_\alpha v_{(\alpha)} - f_\alpha = 0, \quad t \in \Delta_\alpha,\ \ \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{4}$$

$$\begin{cases} k_\alpha \frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha} v_{(\alpha)} - \mu_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha \frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha} v_{(\alpha)} - \mu_{+\alpha}, & x_\alpha = \ell_\alpha, \end{cases} \tag{5}$$

полагая при этом

$$\begin{gathered} v_{(1)}(x, 0) = u_0(x), \\ v_{(\alpha)}\left(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right) = v_{(\alpha-1)}\left(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right), \quad \alpha = 2, 3, \ldots, p, \\ v_{(1)}(x, t_j) = v_{(p)}(x, t_j). \end{gathered} \tag{6}$$

Аппроксимируем каждое уравнение (4) номера α двухслойной неявной схемой на полуинтервале $\left(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}}\right]$, тогда получим цепочку p одномерных разностных уравнений

$$\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{7}$$

$$\Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar x_\alpha})_{x_\alpha} - d_\alpha y,$$

где коэффициенты a_α — сеточные функции, которые выбираются из условий второго порядка аппроксимации на равномерной сетке. Можно использовать следующую аппроксимацию коэффициентов $k_\alpha(x,t)$ [6]:

$$a_\alpha = k_\alpha\big(x_1,\dots,x_{\alpha-1},x_\alpha-0.5h_\alpha,x_{\alpha+1},x_p,\bar t\big),\quad \bar t = t_{j+1/2}.$$

К уравнению (7) надо присоединить граничные и начальные условия. Запишем разностный аналог для граничных условий (5):

$$\begin{cases} a^{(1_\alpha)} y_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \beta_{-\alpha} y_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - \mu_{-\alpha}, & x_\alpha = 0,\\ -a^{(N_\alpha)} y_{\bar x_\alpha,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \beta_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \mu_{+\alpha}, & x_\alpha = \ell_\alpha. \end{cases} \tag{8}$$

Условия (8) имеют порядок аппроксимации $O(h_\alpha)$. Повысим порядок аппроксимации до $O(h_\alpha^2)$ на решениях уравнения (4) при каком-либо α [7]:

$$a^{(1_\alpha)} v_{(\alpha)x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \beta_{-\alpha} v_{(\alpha),0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \mu_{-\alpha} + O(h_\alpha);$$

$$a^{(1_\alpha)} = k_{1/2}^{(\alpha)} = k + k'\frac{h_\alpha}{2} + k''\frac{h_\alpha^2}{8} + O(h_\alpha^3);$$

$$\frac{v_{(\alpha)}^1 - v_{(\alpha)}^0}{h_\alpha} \equiv v_{(\alpha)x_\alpha,0} = v'_{(\alpha)} + v''_{(\alpha)}\frac{h_\alpha}{2} + O(h_\alpha^2);$$

$$a^{(1_\alpha)} v_{(\alpha)x_\alpha,0} = k^{(\alpha)} v'_{(\alpha),0} + (k^{(\alpha)} v'_{(\alpha)})'\frac{h_\alpha}{2} + O(h_\alpha^2);$$

$$k^{(\alpha)} v'_{(\alpha)} = a^{(1_\alpha)} v_{(\alpha)x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha (k^{(\alpha)} v'_{(\alpha)})' + O(h_\alpha^2)$$

$$= a^{(1_\alpha)} v_{(\alpha)x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha\left(\frac{1}{p}\frac{\partial v_{(\alpha)}^{j+\frac{\alpha}{p}}}{\partial t} + q_\alpha v_{(\alpha)} - f_\alpha\right) + O(h_\alpha^2),$$

где $v'_{(\alpha)} = \frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha}$, $v''_{(\alpha)} = \frac{\partial^2 v_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha^2}$, $k' = \frac{\partial k^{(\alpha)}}{\partial x_\alpha}$, $k'' = \frac{\partial^2 k^{(\alpha)}}{\partial x_\alpha^2}$.

Итак,

$$a^{(1_\alpha)} v_{(\alpha)\,x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha\left(v_{(\alpha)\bar t}^{j+\frac{\alpha}{p}} + q_\alpha v_{(\alpha)} - f_\alpha\right) = \beta_{-\alpha} v_{(\alpha),0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \mu_{-\alpha} + O(h_\alpha^2) + O(h_\alpha\tau). \tag{9}$$

Отбросив величины порядка малости $O(h_\alpha^2)$ и $O(h_\alpha\tau)$ и заменив $v_{(\alpha)}$ на y, перепишем (9) в следующем виде:

$$a^{(1_\alpha)} y_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha y_{\bar t,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \bar\beta_{-\alpha} y_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - \mu_{-\alpha} - 0.5h_\alpha f_{\alpha,0},\quad x_\alpha = 0,$$

или

$$y_{\bar t,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \frac{a^{(1_\alpha)} y_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \bar\beta_{-\alpha} y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha} + \bar\mu_{-\alpha},\qquad x_\alpha = 0,$$

$$\bar\mu_{-\alpha} = \frac{\mu_{-\alpha}}{0.5h_\alpha} + f_{\alpha,0},\quad \bar\beta_{-\alpha} = \beta_{-\alpha} + 0.5h_\alpha d_\alpha^{(0)}.$$

Аналогично при $x_\alpha = \ell_\alpha$ имеем

$$y_{\bar t,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} = -\frac{a^{(N_\alpha)} y_{\bar x_\alpha,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + \bar\beta_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha} + \bar\mu_{+\alpha},$$

где $\bar\mu_{+\alpha} = \frac{\mu_{+\alpha}}{0.5h_\alpha} + f_{\alpha,N_\alpha}$, $\bar\beta_{+\alpha} = \beta_{+\alpha} + 0.5h_\alpha d_\alpha^{(N_\alpha)}$.

Итак, получили разностный аналог задачи (4)–(6):

$$\begin{cases} y_{\bar t}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \Lambda_{(\alpha)} y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, & \alpha = 1,2,\ldots,p, \;\; x_\alpha \in \omega_\alpha, \\ y_{\bar t,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \frac{a^{(1\alpha)} y_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \bar\beta_{-\alpha} y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha} + \bar\mu_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ y_{\bar t,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} = -\frac{a^{(N\alpha)} y_{\bar x_\alpha,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + \bar\beta_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha} + \bar\mu_{+\alpha}, & x_\alpha = \ell_\alpha, \end{cases}$$

$$y(x,0) = u_0(x)$$

или в краткой записи

$$\begin{gathered} y_{\bar t}^{(\alpha)} = \bar\Lambda_\alpha y^{(\alpha)} + \Phi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \qquad \alpha = 1,2,\ldots,p, \;\; x \in \bar\omega_h, \\ y(x,0) = u_0(x), \end{gathered} \tag{10}$$

где

$$\bar\Lambda_\alpha y^{(\alpha)} = \begin{cases} \Lambda_\alpha y^{(\alpha)} = \left(a_\alpha y_{\bar x_\alpha}^{(\alpha)}\right)_{x_\alpha} - d_\alpha y^{(\alpha)}, & x_\alpha \in \omega_\alpha, \\ \Lambda_\alpha^- y^{(\alpha)} = \frac{a^{(1\alpha)} y_{x_\alpha,0}^{(\alpha)} - \bar\beta_{-\alpha} y_0^{(\alpha)}}{0.5h_\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ \Lambda_\alpha^+ y^{(\alpha)} = -\frac{a^{(N\alpha)} y_{\bar x_\alpha,N_\alpha}^{(\alpha)} + \bar\beta_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)}}{0.5h_\alpha}, & x_\alpha = \ell_\alpha, \end{cases}$$

$$\Phi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \begin{cases} \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, & x_\alpha \in \omega_\alpha, \\ \bar\mu_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ \bar\mu_{+\alpha}, & x_\alpha = \ell_\alpha. \end{cases}$$

2. Погрешность аппроксимации ЛОС

Характеристикой точности решения ЛОС является разность $z^{j+\frac{\alpha}{p}} = y^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha}{p}}$, где $u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ — решение исходной дифференциальной задачи (1)–(3). Подставляя $y^{j+\frac{\alpha}{p}} = z^{j+\frac{\alpha}{p}} + u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ в разностные уравнения (7), получим для погрешности уравнение

$$\frac{z^{j+\frac{\alpha}{p}} - z^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha z^{j+\frac{\alpha}{p}} + \psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}},$$

где $\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}$.

Обозначая

$$\overset{\circ}{\psi}_\alpha = \left(L_\alpha u + f_\alpha - \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+\frac{1}{2}}$$

и замечая, что $\sum_{\alpha=1}^p \overset{\circ}{\psi}_\alpha = 0$, если $\sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f$, представим $\psi_\alpha = \psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \overset{\circ}{\psi}_\alpha + \overset{*}{\psi}_\alpha$. Тогда

$$\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} + \overset{\circ}{\psi}_\alpha - \overset{\circ}{\psi}_\alpha$$

$$= \overset{\circ}{\psi}_\alpha + \left(\Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} - L_\alpha u^{j+\frac{1}{2}}\right) + \left(\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} - f_\alpha^{j+\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+\frac{1}{2}}\right) = \overset{\circ}{\psi}_\alpha + \overset{*}{\psi}_\alpha,$$

где $\overset{*}{\psi}_\alpha = \left(\Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} - L_\alpha u^{j+\frac{1}{2}}\right) + \left(\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} - f_\alpha^{j+\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+\frac{1}{2}}\right)$.

Очевидно, что

$$\psi_\alpha^* = O(h_\alpha^2 + \tau), \quad \psi_\alpha^\circ = O(1).$$

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha^* = O\left(|h|^2 + \tau\right).$$

Запишем граничное условие при $x_\alpha = 0$ следующим образом:

$$0.5h_\alpha y_{\bar{t}}^{(\alpha)} = a^{(1\alpha)} y_{x_\alpha,0}^{(\alpha)} - \bar{\beta}_{-\alpha} y_0 + 0.5h_\alpha f_{\alpha,0} + \mu_{-\alpha}. \tag{11}$$

Пусть $z^{j+\frac{\alpha}{p}} = y^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha}{p}}$, где u — решение исходной задачи (1)–(3). Подставим $y^{j+\frac{\alpha}{p}} = z^{j+\frac{\alpha}{p}} + u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ в (11). Тогда получим

$$0.5h_\alpha z_{\bar{t}}^{j+\frac{\alpha}{p}} = a_\alpha^{(1\alpha)} z_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \beta_{-\alpha} z_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha d_{\alpha,0} z_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - \beta_{-\alpha} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}}$$
$$-0.5h_\alpha d_{\alpha,0} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha u_{\bar{t}}^{j+\frac{\alpha}{p}} + a_\alpha^{(1\alpha)} u_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} + 0.5h_\alpha f_{\alpha,0} + \mu_{-\alpha}.$$

К правой части полученного выражения добавим и вычтем

$$0.5h_\alpha \overset{\circ}{\psi}_{-\alpha} = 0.5h_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha u + f_\alpha - \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right]_0^{j+\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$\psi_{-\alpha} = 0.5h_\alpha\left(f_\alpha - u_{\bar{t}}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right) + a_\alpha^{(1\alpha)} u_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \beta_{-\alpha} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha d_{\alpha,0} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} + \mu_{-\alpha}$$
$$-0.5h_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha u + f_\alpha - \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right]^{j+\frac{1}{2}} + 0.5h_\alpha \overset{\circ}{\psi}_{-\alpha}$$
$$= 0.5h_\alpha\left(f_\alpha - u_{\bar{t}}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right) + a_\alpha^{(1\alpha)} u_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \beta_{-\alpha} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha d_{\alpha,0} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} + \mu_{-\alpha}$$
$$-0.5h_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)\right]^{j+\frac{1}{2}} - 0.5h_\alpha\left(f_\alpha - u_{\bar{t}}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right) + 0.5h_\alpha q_\alpha u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} + O(h_\alpha\tau) + 0.5h_\alpha \overset{\circ}{\psi}_{-\alpha}$$
$$= a_\alpha^{(1\alpha)} u_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \beta_{-\alpha} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} + \mu_{-\alpha} - 0.5h_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)\right]^{j+\frac{1}{2}} + 0.5h_\alpha \overset{\circ}{\psi}_{-\alpha} + O(h_\alpha\tau)$$
$$= k_\alpha \frac{\partial u^{j+\frac{\alpha}{p}}}{\partial x_\alpha} + 0.5h_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^{j+\frac{\alpha}{p}} - \beta_{-\alpha} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} + \mu_{-\alpha} - 0.5h_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^{j+\frac{\alpha}{p}}$$
$$+ 0.5h_\alpha \overset{\circ}{\psi}_{-\alpha} + O(h_\alpha^2) + O(h_\alpha\tau) = \left[k_\alpha \frac{\partial u^{j+\frac{\alpha}{p}}}{\partial x_\alpha} - \beta_{-\alpha} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} + \mu_{-\alpha}\right]_{x_\alpha=0}$$
$$+ 0.5h_\alpha \overset{\circ}{\psi}_{-\alpha} + O(h_\alpha\tau) + O(h_\alpha^2).$$

В силу граничных условий (2) выражение, стоящее в квадратных скобках, есть нуль. Поэтому $\psi_{-\alpha} = 0.5h_\alpha \overset{\circ}{\psi}_{-\alpha} + \psi_{-\alpha}^*$, $\psi_{-\alpha}^* = O(h_\alpha^2 + \tau) + O(h_\alpha\tau)$.

Итак,

$$0.5h_\alpha z_{t,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} = a_\alpha^{(1\alpha)} z_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \bar{\beta}_{-\alpha} z_0^{j+\frac{\alpha}{p}} + 0.5h_\alpha \overset{\circ}{\psi}_{-\alpha} + \psi_{-\alpha}^*.$$

Или

$$z_{\bar{t},0}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \Lambda_\alpha^- z^{j+\frac{\alpha}{p}} + \psi_{-\alpha}, \quad \psi_{-\alpha} = \overset{\circ}{\psi}_{-\alpha} + \frac{\psi^*_{-\alpha}}{0.5h_\alpha}. \tag{12}$$

Аналогично при $x_\alpha = \ell_\alpha$ имеем

$$z_{\bar{t},N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \Lambda_\alpha^+ z_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + \psi_{+\alpha}, \quad \psi_{+\alpha} = \overset{\circ}{\psi}_{+\alpha} + \frac{\psi^*_{+\alpha}}{0.5h_\alpha}. \tag{13}$$

3. Априорная оценка

Умножив уравнение (10) скалярно на $y^{j+\frac{\alpha}{p}} = y^{(\alpha)}$, получим

$$\Big[y_{\bar{t}}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big] - \Big[\bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big] = \Big[\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big], \tag{14}$$

где

$$[u,v] = \sum_{x\in\bar{\omega}_h} uvH, \quad H = \prod_{\alpha=1}^{p} \hbar_\alpha, \quad [u,v]_\alpha = \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} u_{i_\alpha} v_{i_\alpha} \hbar_\alpha.$$

Преобразуем каждое слагаемое тождества (14):

$$\Big[y_{\bar{t}}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big] = \frac{1}{2}\Big(\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}\Big)_{\bar{t}} + \frac{\tau}{2}\|y_{\bar{t}}^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}; \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\Big[\bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big]_\alpha &= \Big(\Lambda_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big)_\alpha + \Lambda_\alpha^- y_0^{(\alpha)} y^{(\alpha)}\hbar_\alpha + \Lambda_\alpha^+ y^{(\alpha)} y_{N_\alpha}^{(\alpha)}\hbar_\alpha \\
&= \Big(\Big(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\Big)_{x_\alpha}, y^{(\alpha)}\Big)_\alpha - \Big(d_\alpha^{(i_\alpha)} y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big)_\alpha + \Lambda_\alpha^- y^{(\alpha)} y_0^{(\alpha)}\hbar_\alpha + \Lambda_\alpha^+ y^{(\alpha)} y_{N_\alpha}^{(\alpha)}\hbar_\alpha \\
&= -\Big(a_\alpha, y^2_{\bar{x}_\alpha}\Big]_\alpha - \Big(d_\alpha^{(i_\alpha)} y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big)_\alpha + a_\alpha^{(N_\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha,N_\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)} - a_\alpha^{(1_\alpha)} y_{x_\alpha,0} y_0^{(\alpha)} \\
&\quad + a_\alpha^{(1_\alpha)} y_{x_\alpha,0}^{(\alpha)} y_0^{(\alpha)} - \bar{\beta}_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} y_0^{(\alpha)} - a_\alpha^{(N_\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha,N_\alpha}^{(\alpha)} y_{N_\alpha}^{(\alpha)} - \bar{\beta}_{+\alpha}\Big(y_{N_\alpha}^{(\alpha)}\Big)^2 \\
&= -\big(a_\alpha, y^2_{\bar{x}_\alpha}\big]_\alpha - \Big(d_\alpha^{(i_\alpha)} y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big)_\alpha - \beta_{-\alpha}\Big(y_0^{(\alpha)}\Big)^2 - \beta_{+\alpha}\Big(y_{N_\alpha}^{(\alpha)}\Big)^2 \\
&\quad - 0.5h_\alpha d_\alpha^{(0)} y_0^{(\alpha)} - 0.5h_\alpha d_\alpha^{(N_\alpha)} y_{N_\alpha}^{(\alpha)} \\
&= -\big(a_\alpha, y^2_{\bar{x}_\alpha}\big]_\alpha - \Big[d_\alpha^{(i_\alpha)} y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big]_\alpha - \beta_{-\alpha}\Big(y_0^{(\alpha)}\Big)^2 - \beta_{+\alpha}\Big(y_{N_\alpha}^{(\alpha)}\Big)^2.
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\Big[\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big]_\alpha = \Big[\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big]_\alpha + \mu_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} + \mu_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)}. \tag{17}$$

Просуммировав (16) и (17) по всем $i_s \neq i_\alpha$, $s = 1, 2, \ldots, p$, получаем

$$\begin{aligned}
\Big[\bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big] &= \sum_{i_s\neq i_\alpha}\left(\sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} \bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)} y^{(\alpha)}\hbar_\alpha\right) H/\hbar_\alpha \\
&= -\sum_{i_s\neq i_\alpha}\Big\{\big(a_\alpha, y^2_{\bar{x}_\alpha}\big]_\alpha + \Big[d_\alpha^{(i_\alpha)} y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big]_\alpha + \beta_{-\alpha}\Big(y^{(\alpha)}|_{i_\alpha=0}\Big)^2 \\
&\quad + \beta_{+\alpha}\Big(y^{(\alpha)}|_{i_\alpha=N_\alpha}\Big)^2\Big\} H/\hbar_\alpha,
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\Big[\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big] = \sum_{i_s\neq i_\alpha}\left(\Big[\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big]_\alpha + \mu_{-\alpha} y^{(\alpha)}\Big|_{i_\alpha=0} + \mu_{+\alpha} y^{(\alpha)}\Big|_{i_\alpha=N_\alpha}\right) H/\hbar_\alpha. \tag{19}$$

Подставляя (15), (18) и (19) в тождество (14), получаем

$$\begin{gathered}\left(\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)_{\bar t}+\tau\|y_{\bar t}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+c_0\left\|y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\\ \leqslant\left[\varphi^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right]+\sum_{i_s\neq i_\alpha}\left(\mu_{-\alpha}y^{(\alpha)}\Big|_{i_\alpha=0}+\mu_{+\alpha}y^{(\alpha)}\Big|_{i_\alpha=N_\alpha}\right)H/\hbar_\alpha \\ -\left[d_\alpha y^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right]-\sum_{i_s\neq i_\alpha}\left(\beta_{-\alpha}\left(y^{(\alpha)}\Big|_{i_\alpha=0}\right)^2+\beta_{+\alpha}\left(y^{(\alpha)}\Big|_{i_\alpha=N_\alpha}\right)^2\right)H/\hbar_\alpha.\end{gathered}\tag{20}$$

Оценим слагаемые, стоящие в правой части (20):

$$\left[\varphi^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right]\leqslant\frac12\left\|\varphi^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\frac12\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)};\tag{21}$$

$$\begin{gathered}\sum_{i_s\neq i_\alpha}\left(\mu_{-\alpha}y^{(\alpha)}\Big|_{i_\alpha=0}+\mu_{+\alpha}y^{(\alpha)}\Big|_{i_\alpha=N_\alpha}\right)H/\hbar_\alpha\\ \leqslant\sum_{i_s\neq i_\alpha}\left(\frac{\mu^2_{-\alpha}}{2}+\frac{\mu^2_{+\alpha}}{2}+\frac{\left(y^{(\alpha)}|_{i_\alpha=0}\right)^2}{2}+\frac{\left(y^{(\alpha)}|_{i_\alpha=N_\alpha}\right)^2}{2}\right)H/\hbar_\alpha\\ \leqslant\frac12\sum_{i_s\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_j)+\mu^2_{+\alpha}(t_j)\right)H/\hbar_\alpha\\ +\sum_{i_s\neq i_\alpha}\left(\varepsilon\left\|y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\alpha)}+\left(\frac1{\ell_\alpha}+\frac1\varepsilon\right)\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\alpha)}\right)H/\hbar_\alpha\\ =\frac12\sum_{i_s\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_j)+\mu^2_{+\alpha}(t_j)\right)H/\hbar_\alpha+\varepsilon\left\|y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\left(\frac1{\ell_\alpha}+\frac1\varepsilon\right)\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)};\end{gathered}\tag{22}$$

$$-\left[d_\alpha y^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right]\leqslant c_2\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\omega_h)};$$

$$\begin{gathered}-\sum_{i_s\neq i_\alpha}\left(\beta_{-\alpha}\left(y^{(\alpha)}\Big|_{i_\alpha=0}\right)^2+\beta_{+\alpha}\left(y^{(\alpha)}\Big|_{i_\alpha=N_\alpha}\right)^2\right)H/\hbar_\alpha\\ \leqslant 2C_2\varepsilon\left\|y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+2c_2\left(\frac1{\ell_\alpha}+\frac1\varepsilon\right)\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)},\end{gathered}$$

где $\|\cdot\|_{L_2(\alpha)}$ означает, что норма берется по переменной x_α при фиксированных значениях остальных переменных,

$$\left\|y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}=\sum_{i_s\neq i_\alpha}\left\|y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\alpha)}H/\hbar_\alpha,\quad \left\|y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\alpha)}=\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha}y^2_{\bar x_\alpha}\hbar_\alpha.$$

Подставляя неравенства (21) и (22) в (20), находим

$$\begin{gathered}\left(\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)_{\bar t}+c_0\left\|y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\leqslant\frac12\left\|\varphi^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\\ +\left(\frac12+\left(\frac1{\ell_\alpha}+\frac1\varepsilon\right)+c_2+2c_2\left(\frac1{\ell_\alpha}+\frac1\varepsilon\right)\right)\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\\ +(2c_2+1)\varepsilon\left\|y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\frac12\sum_{i_s\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_j)+\mu^2_{+\alpha}(t_j)\right)H/\hbar_\alpha.\end{gathered}\tag{23}$$

Положим

$$\varepsilon=\frac{c_0}{2(1+2c_2)},\quad c_3=\frac{1}{2}+c_2+\left(\frac{1}{\ell_\alpha}+\frac{1}{\varepsilon}\right)(1+2c_2).$$

Тогда неравенство (23) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}-\left\|y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\frac{c_0}{2}\tau\left\|y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\\ \leqslant\frac{\tau}{2}\left\|\varphi^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+c_3\tau\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\frac{\tau}{2}\sum_{i_s\neq i_\alpha}\big(\mu^2_{-\alpha}+\mu^2_{+\alpha}\big)H/\hbar_\alpha.\end{gathered}\tag{24}$$

Просуммируем (24) сначала по $\alpha=1,2,\ldots,p$:

$$\begin{gathered}\left\|y^{j+1}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\frac{c_0}{2}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|y^{(\alpha)}_{\bar x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\leqslant\left\|y^{j}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+c_3\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\\ +\frac{\tau}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\varphi^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\frac{\tau}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_s\neq i_\alpha}\big(\mu^2_{-\alpha}+\mu^2_{+\alpha}\big)H/\hbar_\alpha,\end{gathered}$$

а затем по j' от 0 до j:

$$\begin{gathered}\left\|y^{j+1}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\frac{c_0}{2}\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}_{\bar x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\\ \leqslant\left\|y^{0}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+c_3\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\frac{1}{2}\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\\ +\frac{1}{2}\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_s\neq i_\alpha}\big(\mu^2_{-\alpha}(t_{j'})+\mu^2_{+\alpha}(t_{j'})\big)H/\hbar_\alpha.\end{gathered}\tag{25}$$

Из (25), пользуясь дискретным аналогом леммы Гронуолла (см. [4, с. 171]) при малых $\tau\leqslant\tau_0$, находим требуемую оценку

$$\begin{gathered}\left\|y^{j+1}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}_{\bar x_\alpha}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\leqslant M\Bigg(\left\|y^{0}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\\ +\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_s\neq i_\alpha}\big(\mu^2_{-\alpha}(t_{j'})+\mu^2_{+\alpha}(t_{j'})\big)H/\hbar_\alpha\Bigg),\end{gathered}\tag{26}$$

где M зависит от размерности области.

4. Сходимость ЛОС

По аналогии с [5, с. 528] представим решение задачи для погрешности $z^{j+\frac{\alpha}{p}}$:

$$z^{(\alpha)}_{\bar t}=\bar\Lambda_\alpha z^{(\alpha)}+\Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}},$$

где

$$\bar\Lambda_\alpha=\begin{cases}\Lambda_\alpha, & x_\alpha\in\omega_\alpha,\\ \Lambda^-_\alpha, & x_\alpha=0,\\ \Lambda^+_\alpha, & x_\alpha=\ell_\alpha,\end{cases}\qquad \Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}=\begin{cases}\psi_\alpha, & x_\alpha\in\omega_\alpha,\\ \psi_{-\alpha}, & x_\alpha=0,\\ \psi_{+\alpha}, & x_\alpha=\ell_\alpha,\end{cases}$$

$$\psi_\alpha=\overset{\circ}{\psi}_\alpha+\overset{*}{\psi}_\alpha,\quad \overset{\circ}{\psi}_\alpha=O(1),\quad \overset{*}{\psi}_\alpha=O(h_\alpha^2+\tau),$$

$$\psi_{-\alpha} = \psi^{\circ}_{-\alpha} + \frac{\psi^{*}_{-\alpha}}{0.5h_\alpha}, \quad \psi_{+\alpha} = \psi^{\circ}_{+\alpha} + \frac{\psi^{*}_{+\alpha}}{0.5h_\alpha},$$

$$\psi^{*}_{\pm\alpha} = O(h^2_\alpha) + O(h_\alpha\tau), \quad \sum_{\alpha=1}^{p} \psi^{\circ}_{\pm\alpha} = 0,$$

в виде суммы $z_{(\alpha)} = v_{(\alpha)} + \eta_{(\alpha)}$, $z_{(\alpha)} = z^{j+\frac{\alpha}{p}}$, где $\eta_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\begin{cases} \frac{\eta_{(\alpha)}-\eta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Psi^{\circ}_{\alpha}, \quad x \in \omega_h + \gamma_\alpha, \ \alpha = 1, 2, \ldots, p, \\ \eta(x, 0) = 0, \end{cases} \tag{27}$$

$$\overset{\circ}{\Psi}_\alpha = \begin{cases} \psi^{\circ}_{\alpha}, & x_\alpha \in \omega_\alpha, \\ \psi^{\circ}_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ \psi^{\circ}_{+\alpha}, & x_\alpha = \ell_\alpha. \end{cases}$$

Из (27) следует, что $\eta^{j+1} = \eta_{(p)} = \eta^j + \tau\Big(\psi_1{}^\circ + \psi_2{}^\circ + \ldots + \psi_p{}^\circ\Big) = \eta^j = \ldots = \eta^0 = 0$. Функция $v_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_\alpha v_{(\alpha)} + \widetilde{\Psi}_\alpha, \quad \widetilde{\Psi}_\alpha = \Lambda_\alpha \eta_{(\alpha)} + \psi^{*}_\alpha, \ \ x_\alpha \in \omega_\alpha, \tag{28}$$

$$\frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda^{-}_\alpha v_{(\alpha)} + \widetilde{\Psi}_{-\alpha}, \quad \widetilde{\Psi}_{-\alpha} = \Lambda^{-}_\alpha \eta_{(\alpha)} + \frac{\psi^{*}_{-\alpha}}{0.5h_\alpha}, \ \ x_\alpha = 0, \tag{29}$$

$$\frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda^{+}_\alpha v_{(\alpha)} + \widetilde{\Psi}_{+\alpha}, \quad \widetilde{\Psi}_{+\alpha} = \Lambda^{+}_\alpha \eta_{(\alpha)} + \frac{\psi^{*}_{+\alpha}}{0.5h_\alpha}, \ \ x_\alpha = \ell_\alpha, \tag{30}$$

$$v(x, 0) = 0. \tag{31}$$

Решение задачи (28)–(31) оценим с помощью оценки (26)

$$\begin{gathered} \big\|v^{j+1}\big\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \Big\|v^{j'+\frac{\alpha}{p}}_{\bar x_\alpha}\Big\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} \\ \leqslant M\Bigg(\sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \big\|\widetilde{\Psi}_\alpha\big\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_\gamma \neq i_\alpha} \Big(\widetilde{\Psi}^2_{-\alpha}(t_{j'}) + \widetilde{\Psi}^2_{+\alpha}(t_{j'})\Big) H/\hbar_\alpha\Bigg), \end{gathered} \tag{32}$$

где

$$\widetilde{\Psi}_{-\alpha} = \overset{*}{\psi}_\alpha + a^{(1_\alpha)}_\alpha \big(\eta_{(\alpha)}\big)_{x_{\alpha,0}} - \beta_{-\alpha}\eta_{(\alpha),0} - d^{(0)}_\alpha \eta_{(\alpha),0} = O\big(h^2_\alpha + \tau\big),$$

$$\widetilde{\Psi}_{+\alpha} = \overset{*}{\psi}_\alpha - a^{(N_\alpha)}_\alpha \big(\eta_{(\alpha)}\big)_{\bar x_{\alpha,N_\alpha}} - \beta_{+\alpha}\eta_{(\alpha),N_\alpha} - d^{(N_\alpha)}_\alpha \eta_{(\alpha),N_\alpha} = O\big(h^2_\alpha + \tau\big).$$

Так как $\eta^j = 0$, $\eta_{(\alpha)} = O(\tau)$, $\|z^j\| \leqslant \|v^j\|$, то из оценки (32) следует следующая

Теорема. *Пусть задача (1)–(3) имеет единственное непрерывное в $\bar Q_T$ решение $u(x,t)$ и существуют непрерывные в $\bar Q_T$ производные $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2_\alpha \partial x^2_\nu}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2_\alpha \partial t}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2_\alpha}$, $1 \leqslant \alpha,\ \nu \leqslant p$. Тогда разностная схема (10) сходится со скоростью $O(|h|^2 + \tau)$, так что*

$$\big\|y^{j+1} - u^{j+1}\big\|^2_1 \leqslant M\big(|h|^2 + \tau\big), \quad |h|^2 = \hbar^2_1 + \hbar^2_2 + \ldots + \hbar^2_p,$$

где

$$\big\|y^{j+1}\big\|^2_1 = \big\|y^{j+1}\big\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \Big\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}_{\bar x_\alpha}\Big\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}.$$

Литература

1. *Фрязинов И. В.* О разностной аппроксимации граничных условий для третьей краевой задачи // Журн. вычислит. мат. и мат. физ.—1964.—Т. 4.—С. 1106–1112.
2. *Шхануков-Лафишев М. Х.* Локально-одномерная схема для нагруженного уравнения теплопроводности с краевыми условиями III рода // Журн. вычислит. мат. и мат. физ.—2009.—Т. 49.—С. 1223–1231.
3. *Лафишева М. М., Шхануков-Лафишев М. Х.* Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка // Журн. вычислит. мат. и мат. физ.—2008.—Т. 48, № 10.—С. 1878–1887.
4. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем.—М.: Наука, 1973.—416 с.
5. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1977.—656 с.
6. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Аддитивные схемы для задач математической физики.—М.: Наука, 2001.—320 с.
7. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Вычислительная теплопередача.—М.: Едиториал УРСС, 2003.—784 с.

Статья поступила 5 июня 2009 г.

Баззаев Александр Казбекович
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова,
ассистент кафедры прикладной математики
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: alexander.bazzaev@gmail.com

LOCAL ONE-DIMENSIONAL SCHEME FOR THE THIRD BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION

Bazzaev A. K.

In this paper we study the third boundary value problem for the heat equation with variable coefficients. By the method of energy inequalities, we find a priori estimate for difference problem. Stability and convergence of local one-dimensional schemes for the considered equation are proved.

Key words: local one-dimensional scheme, the third boundary value problem, the heat equation, a priori estimate, stability, convergence.