Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 1, С. 13–20

УДК **517.2**

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА — ГИЛЬБЕРТА В КЛАССЕ BMO ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С. Б. Климентов

К девяностолетию со дня рождения
Глеба Павловича Акилова

В работе рассматривается разрешимость краевой задачи Римана — Гильберта в классе BMO для обобщенных аналитических функций в предположении, что коэффициент краевого условия принадлежит пространству мультипликаторов класса BMO. Ранее автором построены примеры, когда задача с неотрицательным индексом в такой наиболее естественной постановке неразрешима в классе голоморфных функций $BMOA$ [2] и были даны достаточные условия на коэффициент, при которых имеет место обычная картина разрешимости. В этой работе результаты для голоморфных функций из [2] переносятся на обобщенные аналитические функции.

Ключевые слова: краевая задача Римана — Гильберта, классы BMO.

1. Введение. Основные определения

Краевая задача Римана — Гильберта для обобщенных аналитических функций класса BMO рассматривалась в работе автора [1] в предположении, что коэффициент краевого условия гёльдеров (умножение функции класса BMO на окружности на гёльдерову функцию не выводит из класса BMO; этим и определялось требование на коэффициент). Разумеется, постановка задачи наиболее естественна при предположении, что коэффициент краевого условия принадлежит пространству мультипликаторов класса BMO.

В предположении, что коэффициент краевого условия принадлежит пространству мультипликаторов класса BMO, для голоморфных функций задача рассматривалась автором в [2]. В работе [2] обнаружено, что даже при непрерывном коэффициенте из пространства мультипликаторов задача с неотрицательным индексом может быть неразрешимой в BMO. Даны достаточные условия разрешимости. В настоящей работе результаты из [2] переносятся на обобщенные аналитические функции.

Обозначим $D = \{z : |z| < 1\}$ единичный круг комплексной z-плоскости, $z = x + iy$, $i^2 = -1$; $\Gamma = \partial D$ — граница круга D; $\bar{D} = D \cup \Gamma$; $A(z), B(z) \in L_s(\bar{D})$, $s > 2$ (используются обозначения книги [3]), — заданные комплексные функции.

Рассмотрим в $\bar{D}$ каноническую эллиптическую систему в комплексной записи

$$\partial_{\bar{z}}\, w + A(z)\, w + B(z)\, \bar{w} = 0, \tag{1}$$

где $w = w(z) = u(z) + iv(z)$ — искомая комплексная функция, u и v — ее действительная и мнимая части, $\partial_{\bar{z}} = 1/2(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$ — производная в смысле Соболева.

Решение $w(z)$ системы (1) называют *обобщенной аналитической функцией* [3, с. 148].

Определение 1. Следуя [4], будем говорить, что решение системы (1) принадлежит классу $H_p(A,B)$, $p>0$, если оно для некоторой положительной постоянной $M_p(w)<+\infty$ удовлетворяет условию

$$\mu(\rho,w)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|w(\rho e^{i\sigma})|^p d\sigma\leqslant M_p(w)\quad (\forall\,\rho:0\leqslant\rho<1,\ \rho e^{i\sigma}=z\in D).$$

При $A=B\equiv 0$ имеем обычный класс Харди H_p голоморфных функций [5, с. 57].

Определение 2. Вещественная функция $\varphi\in L_1(\Gamma)$, $\varphi=\varphi(e^{is})\equiv\varphi(s)$ называется функцией класса BMO_f (Bounded Mean Oscillation) [5, с. 227], [6], если

$$\sup_I\frac{1}{f(|I|)|I|}\int\limits_I|\varphi-\varphi_I|\,ds=\|\varphi\|_{*,f}<\infty,$$

где $I\subset\Gamma$ — произвольный интервал на Γ, $|I|$ — его длина,

$$\varphi_I=\frac{1}{|I|}\int\limits_I\varphi\,ds,$$

f — неубывающая положительная функция, определенная на $[0,\varepsilon]$, где $0<\varepsilon<2\pi$.

Для комплекснозначной функции $\varphi\in L_1(\Gamma)$ определение аналогично.

Определение 3. Следуя [5, с. 269], будем говорить, что функция $\Phi(z)$ аналитическая в D, принадлежит классу $BMOA_f$, если $\Phi(z)$ принадлежит классу Харди H_2 и ее некасательные предельные значения $\Phi(e^{is})\equiv\Phi(s)$ на Γ принадлежат классу BMO_f.

Определение 4. Будем говорить, что решение $w(z)$ системы (1) принадлежит классу $BMO_f(A,B)$, если $w(z)\in H_2(A,B)$ и его некасательные предельные значения $w(t)$ на Γ принадлежат классу BMO_f.

При $A=B\equiv 0$ имеем голоморфный класс $BMOA_f$ из определения [3].

Если $f\equiv 1$, будем использовать обозначение $BMO_1=BMO$, $BMOA_1=BMOA$; если $f(r)=\ln^{-1}1/r$, будем использовать обозначения $BMO_f=LMO$, $BMOA_f=LMOA$.

Известно [6, 7], [8, с. 223], что $LMO\cap L_\infty(\Gamma)$ есть мультипликатор пространства BMO, т. е. максимально широкое множество функций, умножение на которые есть непрерывный линейный оператор из BMO в BMO.

Обозначим

$$Hu(s)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma. \tag{2}$$

Таким образом, $v(s)=Hu(s)$ — с точностью до постоянного слагаемого выражение краевых значений мнимой части аналитической в D функции через краевые значения действительной части [9, с. 59].

Множество $BMO(A,B)$ с нормой

$$\|w\|_{BMO}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma|w(t)|\,|dt|+\|w\|_*$$

является действительным банаховым пространством [1].

Множество BMO_f с нормой $\|\varphi\|_{BMO_f} = \|\varphi\|_{L_1(\Gamma)} + \|\varphi\|_{*f}$ является банаховым пространством [6].

Определение 5. Функцию $w(z) \in H_p(A, B)$, $p > 1$, будем называть *решением* краевой задачи Римана — Гильберта для уравнения (1), если ее некасательные предельные значения на Γ $w^+(t) \equiv w(t)$ почти всюду на Γ удовлетворяют краевому условию

$$\mathrm{Re}\{\overline{\lambda(t)}w(t)\} = g(t), \tag{3}$$

где $\lambda = \lambda(t)$ — ограниченная, измеримая по Лебегу на Γ комплексная функция, $g(t) \in L_p(\Gamma)$.

Определение 6. Однородной краевой задачей, сопряженной задаче (1), (3), будем называть задачу [3, с. 301]:

$$\partial_{\bar{z}} w' - Aw' - \bar{B}\bar{w}' = 0, \tag{4}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\lambda(t)t'(s)w'(t)\right\} = 0, \quad t \in \Gamma, \tag{5}$$

где s — длина дуги на Γ, $t'(s) \equiv dt/ds$.

Будем считать, что

$$0 < k_1 \leqslant |\lambda| \leqslant k_2, \tag{6}$$

где k_1 и k_2 — некоторые постоянные. Таким образом, $\lambda(t) = |\lambda|e^{i\theta(t)}$, где $\theta(t)$ — действительная измеримая функция.

На $\theta(t)$ наложим следующие дополнительные условия: существует такое конечное покрытие (B_k) контура Γ интервалами, что на каждом из них $|\theta(t)| < 2\pi$. В этих условиях корректно определен индекс краевого условия (3).

Индекс краевого условия. Возьмем на каждом интервале B_k из покрытия (B_k) точку t_k и разрежем B_k в этой точке, т. е. будем принимать точку t_k за две точки: t_k^+ и t_k^-. Фиксируя произвольно значение $\theta(t)$ в некоторой точке t_k^+ и следуя по направлению обхода контура Γ вдоль цепи интервалов B_k, будем последовательно определять $\theta(t)$ на встречающихся интервалах так, чтобы $|\theta(t) - \theta(t)| < 2\pi$, когда t и t' принадлежат пересечению соседних интервалов. В результате получим вполне определенную ветвь $\theta(t)$, которая в точках t_k имеет два значения: $\theta(t_k^-)$ до обхода и $\theta(t_k^+)$ после обхода.

Обозначим

$$\frac{1}{2\pi}\sum_k \left\{\theta(t_k^+) - \theta(t_k^-)\right\} = \mathrm{ind}_\Gamma\left[e^{i\theta(t)}\right] = \varkappa.$$

Поскольку $\theta(t_k^\pm)$ соответствует одной и той же точке $e^{i\theta(t_k)}$, число $\varkappa$ — целое. Очевидно, $\varkappa$ не зависит от выбора точек t_k и покрытия (B_k).

Определение 7. Число $\varkappa$ будем называть *индексом* задачи (3).

2. Формулировка основных результатов

Теорема 1. *Пусть в краевом условии* (3) $\lambda(t) \in L_\infty(\Gamma) \cap LMO$, $g(t) \in BMO$ *и* $H\theta(t) \in L_\infty(\Gamma)$[1].

При $\varkappa = \mathrm{ind}_\Gamma\,[\lambda(t)] \geqslant 0$ *однородная краевая задача* (1), (3) (*т. е. при* $g(t) \equiv 0$) *имеет точно* $2\varkappa + 1$ *линейно независимых в вещественном смысле решений, принадлежащих*

[1] При $\varphi \in L_\infty(\Gamma)$ всегда считаем, что $|\varphi| \leqslant \mathrm{const} < \infty$.

классу $LMO(A,B)\cap L_\infty$. *Неоднородная (при* $g(t)\not\equiv 0$*) задача* (1), (3) *всегда имеет решение класса* $BMO(A,B)$, *линейно содержащее* $2\varkappa+1$ *произвольных вещественных постоянных.*

При $\varkappa<0$ *однородная задача* (1), (3) *имеет только нулевое решение. Для существования (единственного) решения класса* $BMO(A,B)$ *неоднородной задачи* (1), (3) *необходимо и достаточно выполнение следующих условий на функцию* $g(t)$:

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{w_j'(t)g(t)}{\overline{\lambda(t)}}\,dt=0,\quad j=1,2,\ldots,-2\varkappa-1,\tag{7}$$

где $w_j'(z)\in BMO(-A,-\bar B)$ — *полный набор линейно независимых в вещественном смысле решений однородной сопряженной задачи* (4), (5).

3. Вспомогательные сведения

Некоторые свойства функций класса BMO_f**.** Имеет место следующее очевидное утверждение [6].

Лемма 1. *Если* $|F(x)-F(y)|\leqslant C|x-y|$, *где* C — *некоторая постоянная, то*

$$\int\limits_I|F(\varphi(\theta))-[F(\varphi)]_I|\,d\theta\leqslant 2C\int\limits_I|\varphi(\theta)-\varphi_I|\,d\theta.$$

Следствие 1. *Если* $\varphi\in BMO_f$, *то* $F(\varphi)\in BMO_f$.

Следствие 2. *Если значения комплекснозначной функции* $\varphi\in BMO_f$ *принадлежат области, в которой функция* F *удовлетворяет условию Липшица, то* $F(\varphi)\in BMO_f$.

Лемма 2 [2]**.** *Если* $\varphi\in BMO_f$, *то* $|\varphi|\in BMO_f$.

Если при этом $0<k_1\leqslant|\varphi|\leqslant k_2$, *где* k_1 *и* k_2 — *некоторые постоянные, то* $1/\varphi\in BMO_f$.

Если $\varphi_1,\varphi_2\in LMO\cap L_\infty(\Gamma)$, *то произведение* $\varphi_1\cdot\varphi_2\in LMO\cap L_\infty(\Gamma)$.

Следствие 3. *Если* $\lambda(t)\in LMO$ *и удовлетворяет* (6), *то* $\theta(t)=\arg\lambda(t)\in LMO$.

Теорема 3 [10]**.** *Множество* $LMO(A,B)$ *с нормой*

$$\|w\|_{LMO}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}|w(t)|\,|dt|+\|w\|_{*LMO}\tag{8}$$

является действительным банаховым пространством.

В частности, (8) — *банахова норма в* $LMOA$.

Пусть $\varkappa\geqslant 0$ — целое число. Следуя [3, с. 293], обозначим

$$T_\varkappa f(z)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}+\frac{z^{2\varkappa+1}\overline{f(\zeta)}}{1-\overline{\zeta}z}\right)d\xi d\eta,\quad \zeta=\xi+i\eta.\tag{9}$$

Отметим, что $\operatorname{Re}\{t^{-\varkappa}T_\varkappa f(t)\}=0$ при $t\in\Gamma$.

Теорема 3 [10]**.** *Если* $w(z)\in LMO(A,B)$, *то имеет место соотношение*

$$w(z)+T_\varkappa(Aw+B\overline{w})=\Phi(z),\tag{10}$$

где $\Phi(z) \in LMOA$ *и почти всюду на* Γ

$$\operatorname{Re}\left\{t^{-\varkappa}w(t)\right\} = \operatorname{Re}\left\{t^{-\varkappa}\Phi(t)\right\}, \quad t \in \Gamma. \tag{11}$$

Если $\Phi(z) \in LMOA$, *то соотношением* (10) *однозначно определяется функция* $w(z) \in LMO(A,B)$, *удовлетворяющая на* Γ *условию* (11), *и формула* (10) *устанавливает* (*вещественный*) *линейный изоморфизм банаховых пространств* $LMO(A,B)$ *и* $LMOA$.

Регуляризующий множитель. Перейдем к обсуждению краевого условия (3) в предположениях теоремы 1.

В силу леммы 2 $1/|\lambda(t)| \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, а поскольку $LMO \cap L_\infty(\Gamma)$ — мультипликатор пространства BMO, $g(t)/|\lambda(t)| \in BMO$ и мы без ограничения общности можем считать, что $|\lambda(t)| \equiv 1$, т. е. что $\lambda(t) = e^{i\theta(t)}$, и в силу следствия 2 и следствия 3 $\theta(t), e^{i\theta(t)} \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$.

Обозначим $\gamma(z) = \omega(z) + i\omega_1(z) = S(\theta(\tau) - \varkappa \cdot \arg\tau)(z)$, S — оператор Шварца, $\omega(z) = \operatorname{Re}\gamma(z)$, $\omega_1(t) = H\omega(t)$, $t \in \Gamma$. Тогда функция $e^{i\gamma(z)} \in L_\infty$, а следовательно, имеет почти всюду на Γ некасательные предельные значения $e^{i\gamma(t)} \in L_\infty(\Gamma)$ [5, с. 64]. Следуя [9, с. 275], будем называть функцию $e^{\omega_1(t)}$ *регуляризующим множителем* краевого условия (3).

Лемма 3. $e^{\omega_1(t)}$ *и* $e^{i\gamma(t)} \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, *а следовательно,* $e^{i\gamma(z)} \in LMOA \cap L_\infty$.

$\lhd$ Поскольку сингулярный оператор в LMO ограничен [11, 12], $e^{\omega_1(t)} \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$. $\rhd$

4. Доказательство теоремы

Случай канонического краевого условия. Рассмотрим краевую задачу (1), (3) в частном случае $\lambda(t) = t^{\varkappa}$:

$$\operatorname{Re}\left\{t^{-\varkappa}w(t)\right\} = g(t). \tag{12}$$

Следуя [3, с. 246], краевое условие (12) будем называть *каноническим.*

Рассмотрим сначала случай $\varkappa \geqslant 0$. Формулой (10) устанавливается (вещественный) линейный изоморфизм между решениями краевой задачи (1), (12) и решениями краевой задачи для голоморфных функций

$$\operatorname{Re}\left\{t^{-\varkappa}\Phi(t)\right\} = g(t). \tag{13}$$

Учитывая результаты из [2] для краевой задачи (13), получаем соответствующее утверждение теоремы 1.

Случай $\varkappa < 0$ исследуется сведением к случаю нулевого индекса посредством замены $w_0(z) = z^{-\varkappa}w(z)$ дословным повторением соответствующих рассуждений из [3, с. 298–301].

Случай неканонического краевого условия. Умножим краевое условие (3) на регуляризующий множитель коэффициента $\lambda(t) = e^{i\theta(t)}$:

$$\operatorname{Re}\left\{t^{-\varkappa}e^{-i\gamma(t)}w(t)\right\} = e^{\omega_1(t)}g(t).$$

Обозначим $e^{\omega_1(t)}g(t) = g^*(t) \in BMO$ (в силу леммы 3),

$$e^{i\gamma(z)}w(z) = w^*(z). \tag{14}$$

Функция $w^* = w^*(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\bar z} w^* + A(z)w^* + B^*(z)\bar w^* = 0, \tag{15}$$

где

$$B^*(z) = B(z)e^{-2i\operatorname{Re}\gamma(z)} \in L_s(\bar D), \tag{16}$$

и краевому условию

$$\operatorname{Re}\left\{t^{-\varkappa} w^*(t)\right\} = g^*(t). \tag{17}$$

Поскольку $LMO \cap L_\infty(\Gamma)$ есть мультипликатор BMO, $w^*(z) \in BMO(A, B^*)$ при условии, что $w(z) \in BMO(A, B)$ (и наоборот).

Задача (15), (17) с каноническим краевым условием нами уже исследована. Пусть $w^*(z) \in BMO(A, B^*)$ — решение этой краевой задачи при $\varkappa \geqslant 0$. Аналогично [3, с. 296] представим $w^*(z)$ в виде

$$w^*(z) = \Phi^*(z) w_0(z), \tag{18}$$

где $\Phi^*(z)$ голоморфна в D,

$$w_0(z) = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{z\overline{f(\zeta)}}{1 - \bar\zeta z}\right] d\xi d\eta\right\} \in C_\alpha(\bar D), \quad \alpha = \frac{s-2}{s},$$

$$f(z) = \begin{cases} A(z) + B^*(z)\frac{\bar w^*}{w^*}, & w^*(z) \neq 0, \\ 0, & w^*(z) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Очевидно, $w^*(z) \in BMO(A, B^*)$ тогда и только тогда, когда $\Phi^*(z) \in BMOA$; также очевидно, что $\operatorname{Im} w_0(t) = 0$, $t \in \Gamma$.

Подставив (18) в (17), получим, что голоморфная функция $\Phi^*(z) \in BMOA$ есть решение краевой задачи

$$\operatorname{Re}\left\{t^{-\varkappa}\Phi^*(t)\right\} = g^*(t) w_0^{-1}(t) \in BMO. \tag{20}$$

Отсюда [2, (20)]

$$\Phi^*(z) = z^\varkappa \left[S(g^* w_0^{-1}) + Q(z)\right], \tag{21}$$

где S — оператор Шварца, $Q(z) = i\beta_0 + \sum_{k=1}^{\varkappa}(c_k z^k - \bar c_k z^{-k})$, c_k — комплексные постоянные, β_0 — вещественная постоянная.

Умножим (18) на $e^{i\gamma(z)}$, где $e^{i\gamma(z)}$ — та же голоморфная в D функция, что и в (14), и обозначим

$$w(z) = w^*(z)e^{i\gamma(z)}; \quad \Phi(z) = \Phi^*(z)e^{i\gamma(z)}. \tag{22}$$

При этом (18) перепишется в виде

$$w(z) = \Phi(z) w_0(z). \tag{23}$$

Вместе с тем, в представлении для $w_0(z)$, с учетом (16) и (19), будем иметь

$$f(z) = \begin{cases} A(z) + B(z)\frac{\bar w}{w}, & w(z) \neq 0, \\ 0, & w(z) = 0, \end{cases}$$

откуда получаем, что $w(z)$ в (23) есть решение уравнения (1).

Поскольку, по лемме 3, $e^{i\gamma(z)} \in LMOA \cap L_\infty$, $w(z) \in BMO(A, B)$, $\Phi(z) \in BMOA$.

Покажем, что $w(z)$ удовлетворяет краевому условию (3). Для этого достаточно показать, что $\Phi(z)$ в (23) удовлетворяет краевому условию

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-i\theta(t)}\Phi(t)\right\} = g(t)w_0^{-1}(t), \quad t \in \Gamma. \tag{24}$$

Подставим выражение для $\Phi^*(z)$ из (22) в (21). Отсюда получим, что $\Phi(z)$ удовлетворяет (24).

В случае $\varkappa < 0$ проделаем ту же замену (14) и так же придем к задаче (15), (17). Условие ее разрешимости:

$$\int\limits_{\Gamma} t^{\varkappa} w_j'^*(t) g^*(t)dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, -2\varkappa - 1, \tag{25}$$

где $w_j'^*(z)$ — полная система линейно независимых в вещественном смысле решений задачи

$$\begin{gathered}\partial_{\bar z} w'^* - A(z)w'^* - \overline{B^*(z)}\bar w'^* = 0,\\ \operatorname{Re}\left\{t^{\varkappa} t'(s) w'^*(t)\right\} = 0.\end{gathered}$$

Обратная замена (22) так же приведет к решению $w(z) \in BMO(A, B)$ задачи (1), (3), только в рассуждениях ссылки на [2, (20)] надо заменить ссылками на [2, (21)]. Условие разрешимости (25) после замены $w'^*(z) = w'(z)\, e^{i\gamma(z)}$ перейдет в условие

$$\int\limits_{\Gamma} e^{i\theta(t)} w_j'(t) g(t)dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, -2\varkappa - 1, \tag{26}$$

где $w_j'(z) \in LMO(-A, -\bar B)$ — полная система линейно независимых в вещественном смысле решений задачи, сопряженной однородной задаче (1), (3):

$$\begin{gathered}\partial_{\bar z} w' - A(z)w' - \overline{B(z)}\bar w' = 0,\\ \operatorname{Re}\left\{e^{i\theta(t)} t'(s) w'(t)\right\} = 0.\end{gathered}$$

Итак, формулы (14) и (22) устанавливают линейное в вещественном смысле взаимнооднозначное соответствие между решениями класса $BMO(A, B)$ краевой задачи (1), (3) в предположении $|\lambda(t)| \equiv 1$ и решениями класса $BMO(A, B^*)$ краевой задачи с каноническим краевым условием (15), (17). Отсюда получаем утверждение теоремы 1.

Литература

1. *Климентов С. Б.* Классы BMO обобщенных аналитических функций // Владикавк. мат. журн.—2006.—Т. 8, вып. 1.—С. 27–39.
2. *Климентов С. Б.* Краевые задачи Римана и Гильберта в классе BMO для аналитических функций // Владикавк. мат. журн.—2010.—Т. 12, вып. 4.—С. 28–38.
3. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции.—М.: Физматгиз, 1959.—628 с.
4. *Климентов С. Б.* Классы Харди обобщенных аналитических функций // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки.—2003.—№ 3.—С. 6–10.
5. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции.—М.: Мир, 1984.—469 с.
6. *Janson S.* On functions with conditions on the mean oscillation // Ark. Math.—1976.—Vol. 14, № 2.—P. 189–196.
7. *Stegenga D. A.* Bounded Toeplitz operators on H^1 and applications of the duality between H^1 and the functions of bounded mean oscillation // American J. of Math.—1976.—Vol. 98, № 3.—P. 573–589.

8. *Мазья В. Г., Шапошникова Т. О.* Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций.—Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1986.—404 с.
9. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.—М.: Наука, 1977.—640 с.
10. *Климентов С. Б.* Представления второго рода для классов LMO обобщенных аналитических функций // Исследования по дифференциальным уравнениями и математическому моделированию / отв. ред. С. Б. Климентов, Е. С. Каменецкий.—Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2009.—156 с.
11. *Peetre J.* On convolution operators leaving $L^{p,\lambda}$ spaces invariant // Ann. Mat. Pura Appl.—1966.—Vol. 72, № 4.—P. 295–304.
12. *Bramanti M., Brandolini L.* Estimates of BMO type for singular integrals on spaces of homogeneous type and applications to hypoelliptic pdes // Rev. Mat. Iberoamericana.—2005.—Vol. 21, № 2.—P. 511–556.

Статья поступила 2 октября 2009 г.

Климентов Сергей Борисович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
главный научный сотрудник лаб. компл. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

Южный федеральный университет,
заведующий кафедрой геометрии
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: sklimentov@pochta.ru

RIEMANN–HILBERT BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN BMO CLASSES FOR GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS

Klimentov S. B.

The classical Riemann–Hilbert boundary value problems for generalized analytic functions are under consideration. We search the solution in BMO class under assumption that the coefficient of the boundary condition belongs to the set of pointwise multipliers of BMO. Earlier in [2] the author constructed examples when the problem for golomorphic functions with non-negative index in the such natural setting has no solution in $BMOA$. Sufficient conditions on the coefficient are given when we have usual pattern of solvability in BMO class.

Key words: Riemann–Hilbert boundary value problems, BMO classes, generalized analytic functions.