Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 2, С. 3–14

УДК **517.5**

ПОПЕРЕЧНИКИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ И КОНЕЧНОМЕРНЫХ МНОЖЕСТВ[1]

Э. М. Галеев

Посвящается 75-летию со дня рождения
профессора В. М. Тихомирова

В работе[2] дается краткий обзор по колмогоровским и линейным поперечникам классов Соболева, Гёльдера — Никольского, Бесова периодических функций одной и нескольких переменных, а также конечномерных множеств. Приводятся теоремы о порядках поперечников, полученные в работах автора, Темлякова и др.

Ключевые слова: приближение, колмогоровские поперечники, линейные поперечники, классы периодических функций одной и нескольких переменных, вложение функциональных классов, вложение конечномерных множеств.

1. Предварительные сведения

1.1. Вложения функциональных классов. Для вектора $p \in \mathbb{R}^d$ $(0 < p < \infty)$ символ $\frac{1}{p}$ будет рассматриваться как вектор $\left(\frac{1}{p_1}, \dots, \frac{1}{p_d}\right)$. Условимся равенства и неравенства для векторов понимать как покоординатные. Функции $a(N)$ и $b(N)$ будем называть *функциями одного порядка* и писать $a \asymp b$, если существует константа N_0 такая, что при $N > N_0$ $C_1 a(N) \leqslant b(N) \leqslant C_2 a(N)$ $(C_1, C_2 > 0)$. Аналогично определяются порядковые неравенства $a \ll b$ и $a \gg b$. Вложение $A \Subset B$ означает, что существует константа $C > 0$ такая, что $A \Subset CB$. Аналогично определяется вложение $A \Supset B$.

Пусть $\mathbb{T}^d = (-\pi, \pi]^d$ — d-мерный тор, реализованный в виде произведения d полуинтервалов $(-\pi, \pi]$. Через $L_p = L_p(\mathbb{T}^d)$, $p = (p_1, \dots, p_d)$, $0 < p_j \leqslant \infty$, $j = 1, \dots, d$, обозначим пространство функций $x(t) = x(t_1, \dots, t_d)$ измеримых на $\mathbb{T}^d$, периодических по каждой переменной с периодом 2π таких, что конечна величина:

$$\|x(\cdot)\|_{L_p} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_T \left[\dots \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_T |x(t)|^{p_1} \, dt_1 \right)^{p_2/p_1} \dots \right]^{p_d/p_{d-1}} dt_d \right\}^{1/p_d}.$$

Здесь для скаляра $p = \infty$ выражение $\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |y(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$ понимается как существенный максимум функции $|y(t)|$. Если $1 \leqslant p_j \leqslant \infty$, $j = 1, \dots, d$, то $\|\cdot\|_{L_p}$ будет удовлетворять

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 08-01-00450-а, а также гранта Поддержки ведущей научной школы РФ НШ-3233.2008.1.

[2] Доклад был прочитан на конференции, посвященной 75-летию профессора Владимира Михайловича Тихомирова, в ноябре 2009 г.

аксиомам нормы. Свойства пространств со смешанной нормой на $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{T}^d$ описаны в монографии О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [1].

Функцию $x(\cdot) \in L_p(\mathbb{T}^d)$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ можно разложить в ряд Фурье

$$x(t) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} x_k e^{i\langle k,t\rangle},$$

где суммирование ведется по всем $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ — d-мерной целочисленной решетке, $\langle k,t\rangle = \sum_{i=1}^d k_i t_i$, а коэффициенты Фурье x_k определяются по формуле

$$x_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{T^d} x(t) e^{-i\langle k,t\rangle}\, dt.$$

Ряд Фурье сходится к функции $x(\cdot)$ в метрике пространства L_p при $1 < p < \infty$. Для упрощения формулировок будем рассматривать функции с нулевыми средними по всем аргументам, т. е. функции, коэффициенты Фурье которых x_k, имеющие хотя бы один нулевой индекс k_j, равны нулю: $x(t) = \sum_{k\in\mathring{\mathbb{Z}}^d} x_k e^{i\langle k,t\rangle}$, где $\mathring{\mathbb{Z}}^d := \{k = (k_1,\ \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : k_j \neq 0,\ j = 1, \ldots, d\}$.

Для такой функции и вектора $r = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{R}^d$ введем операцию дробного дифференцирования по формуле

$$x^{(r)}(t) = \sum_{k\in\mathring{\mathbb{Z}}^d} x_k (ik)^r e^{i\langle k,t\rangle},$$

где $(ik)^r = (ik_1)^{r_1} \ldots (ik_d)^{r_d}$, $(ik)^r = |k|^r e^{(i/2)\pi r \mathrm{sign} k}$ (для скаляров k и r). Каждому вектору $s = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{N}^d$ сопоставим множество $\square_s$ по следующему правилу:

$$\square_s = \{k \in \mathring{\mathbb{Z}}^d : 2^{s_j-1} \leqslant |k_j| < 2^{s_j},\ j = 1, \ldots, d\}.$$

Тогда функцию $x(\cdot)$ можно представлять суммой гармоник $e^{i\langle k,\cdot\rangle}$ с коэффициентами x_k и суммой по блокам $\delta_s x(\cdot)$:

$$x(t) = \sum_{k\in\mathring{\mathbb{Z}}^d} x_k e^{i\langle k,t\rangle} = \sum_{s\in\mathbb{N}^d} \delta_s x(t),$$

где $\delta_s x(t) := \sum_{k\in\square_s} x_k e^{i\langle k,t\rangle}$.

Для векторов $p, r \in \mathbb{R}^d$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, числа $\theta \in \mathbb{R}$, $0 < \theta \leqslant \infty$, и описанных выше функций с нулевыми средними по всем аргументам введем классы функций:

$W^r_p(\mathbb{T}^d) = \{x(\cdot) : \|x\|_{W^r_p} := \|x^{(r)}\|_{L_p} \leqslant 1\}$ — классы Соболева,

$H^r_p(\mathbb{T}^d) = \left\{x(\cdot) : \|x\|_{H^r_p} := \sup\limits_{s\in\mathbb{N}^d} \|\delta_s x^{(r)}\|_{L_p} \leqslant 1\right\}$ — классы Гёльдера — Никольского,

$B^r_{p,\theta}(\mathbb{T}^d) = \left\{x(\cdot) : \|x\|_{B^r_{p,\theta}} := \left(\sum_{s\in\mathbb{N}^d} \|\delta_s x^{(r)}\|^{\theta}_{L_p}\right)^{\frac{1}{\theta}} \leqslant 1\right\}$ — классы Бесова.

При $\theta = \infty$ имеем $B^r_{p,\infty}(\mathbb{T}^d) = H^r_p(\mathbb{T}^d)$.

1.2. Вложение конечномерных множеств. Для чисел $r \in \mathbb{R}$ и $0 < p \leqslant \infty$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ введем множество $B^r_p := B^r_p(\mathbb{R}^n) := \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x\|_{l^n_p} \leqslant n^{-r}\right\}$. Как обычно, обозначим

$$\|x\|_{l^n_p} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 0 < p < \infty, \\ \max\limits_{k=1,\ldots,n} |x_k|, & p = \infty. \end{cases}$$

Для множества K из $\mathbb{R}^2$, $K \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, будем рассматривать множество $B(K) = \bigcap_{(\frac{1}{p},r)\in K} B_p^r$, являющееся пересечением конечномерных множеств B_p^r, и $Q(K) = \operatorname{conv} \mathrm{K} + \operatorname{cone}\{(-1,0),(1,-1)\}$.

Имеет место следующая теорема вложения конечномерных множеств.

Теорема 1 (Галеев [7]). *Пусть $K \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $0 < q \leqslant \infty$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $(1/q, \gamma) \in Q(K)$. Тогда $B(K) \subset B_q^\gamma$.*

1.3. Вложения функциональных классов.

Теорема 2 (Галеев [6]). *Пусть $W^\Omega(\mathbb{T}^d) = \bigcap_{(\frac{1}{p},r)\in\Omega} W_p^r(\mathbb{T}^d)$,*

$$\Omega = \left\{ \left(\frac{1}{p^i}, r^i\right) \subset (0,\,1)^d \times \mathbb{R}^d : i = \;1, \ldots, m \right\},$$

$$G = \left\{ \operatorname{conv}\Omega + (\nu, 0) - (\lambda,\lambda) :\ \lambda, \nu \in \mathbb{R}_+^d \right\}, \quad \gamma, q \in \mathbb{R}^d,\ 1 < q < \infty.$$

Тогда $W^\Omega(\mathbb{T}^d) \Subset W_q^\gamma(\mathbb{T}^d)$ в том и только в том случае, если $(1/q,\gamma) \in G$.

2. Колмогоровские поперечники

В этом разделе определяются колмогоровские и линейные поперечники классов периодических функций одной и многих переменных $W_p^r(\mathbb{T}^d)$, $H_p^r(\mathbb{T}^d)$, $W^\Omega(\mathbb{T}^1)$. Во многих случаях вычисление поперечников классов функций сводится к задаче вычисления поперечников конечномерных множеств. Далее мы пользуемся оценками поперечников конечномерных множеств в тех случаях, когда они уже известны. В ряде случаев, когда эти оценки являлись неизвестными, решается задача их вычисления. Приводятся оценки поперечников классов функций многих переменных при малых гладкостях.

Колмогоров А. Н. [27] ввел следующую характеристику приближения центрально-симметричного множества $W \subset X$ из линейного нормированного пространства X:

$$d_n(W,X) = \inf_{L_n} \sup_{x\in W} \inf_{y\in L_n} \|x-y\|,$$

где $\{L_n\}$ — совокупность всех n-мерных подпространств в X.

2.1. Поперечники конечномерных множеств. В этом пункте будет приведен ряд теорем о поперечниках по Колмогорову конечномерных множеств.

Напомним, что через V_k^m мы обозначаем множество, являющееся выпуклой оболочкой в $\mathbb{R}^m$ точек, у которых k любых координат равны ± 1, остальные — нули.

Теорема 3 (Глускин [18, 20]). *Пусть $1 \leqslant n \leqslant \frac{m}{2}$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Тогда*

$$d_n(V_k^m, l_q^m) \asymp k^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \leqslant q \leqslant 2,$$

$$d_n(V_k^m, l_q^m) \gg \min\left\{ k^{\frac{1}{q}}, m^{\frac{1}{q}} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad 2 \leqslant q \leqslant \infty.$$

Через $B_{p,q}^{n,m}$ обозначим единичный шар нормированного пространства $l_{p,q}^{n,m}$ с нормой

$$\|x\|_{l_{p,q}^{n,m}} = \left(\sum_{s=1}^{m} \left(\sum_{k\in\Delta_s} |x_k|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \leqslant p,q \leqslant \infty,\ x \in \mathbb{R}^{nm},$$

где $\Delta_s = \{k \in \mathbb{N} : (s-1)n < k \leqslant sn\}$, $s = 1, \ldots, m$. Тогда $B^{n,m}_{1,\infty} = V^n_1 \times \ldots \times V^n_1$, $V^{n,m}_{k,\infty} = V^n_k \times \ldots \times V^n_k$.

Теорема 4 (Галеев [11]). *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $2 \leqslant q < \infty$. Тогда существует константа C, зависящая только от q, и такая, что при $n \leqslant Cmk$*

$$d_n(B^{m,k}_{p,\infty}, l^{mk}_q) \gg \min\Big\{k^{\frac{1}{q}}, k^{\frac{1}{q}+\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{q}} n^{-\frac{1}{2}}\Big\}.$$

Теорема 5 (Пич [35], Стесин [37]). *Пусть $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, $n < m$. Тогда*

$$d_n(B^m_p, l^m_q) = (m-n)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

Теорема 6 (Кашин [26], Глускин [19]). *Пусть $\beta := \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) / \left(1 - \frac{2}{q}\right)$, $n < m$. Тогда*

$$d_n(B^m_p, l^m_q) \asymp \begin{cases} \min\Big\{1, m^{\frac{2\beta}{q}} n^{-\beta}\Big\}, & 2 \leqslant p < q < \infty, \\ \max\Big\{m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \min\Big\{1, m^{\frac{1}{q}} n^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \frac{n}{m}}\Big\}\Big\}, & 1 \leqslant p < 2 \leqslant q \leqslant \infty. \end{cases}$$

Используя вложение пересечения конечномерных множеств $B(K)$, оценки сверху поперечников $d_n(B^m_p, l^m_q)$ и оценки снизу поперечников множеств V^m_k, найдем поперечники пересечения конечномерных множеств.

Теорема 7. *Пусть $K \subset [0,1] \times \mathbb{R}$ — компакт из $\mathbb{R}^2$, $Q = \operatorname{conv} K + \operatorname{cone}\{(-1,0),(1,-1)\}$, $B(K) = \bigcap_{\left(\frac{1}{p},r\right)\in K} B^r_p(\mathbb{R}^{2n})$, $\Gamma(\xi) = \max_{(\xi,r)\in Q} r$. Тогда*

$$d_n(B(K), l^{2n}_q) \asymp \begin{cases} n^{-\Gamma(\frac{1}{q})}, & 1 \leqslant q \leqslant 2, \\ n^{-\Gamma(\frac{1}{2})+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}, & 2 \leqslant q \leqslant \infty. \end{cases}$$

При вычислении поперечников функциональных классов оценки сверху и снизу часто сводятся к оценкам поперечников конечномерных множеств. Так, например, в работе [14] при нахождении порядка поперечника по Колмогорову $d_N(H^r_p(\mathbb{T}^d), L_q)$ класса периодических функций многих переменных $H^r_p(\mathbb{T}^d)$ в пространстве L_q при $1 < p \leqslant q \leqslant 2$ оценка снизу сводится к оценке снизу поперечника $d_N(B^{n,m}_{1,\infty}, l^{n,m}_{2,q})$ конечномерного множества $B^{n,m}_{1,\infty}$ в смешанной норме $l^{n,m}_{2,q}$ с помощью теоремы Литтльвуда — Пэли, неравенства Темлякова и теоремы Марцинкевича — Зигмунда о дискретизации. И далее вычисляется порядок этого поперечника, т. е. доказывается следующая теорема.

Теорема 8 (Галеев [14]). *Пусть $1 < q < \infty$, $N \leqslant \frac{nm}{2}$. Тогда*

$$d_N(B^{n,m}_{1,\infty}, l^{n,m}_{2,q}) \asymp m^{\frac{1}{q}}.$$

Изложенное в работе [14] доказательство оценки снизу (оценки сверху здесь при всех значениях величины q тривиальны) без изменений проходит и для случая $q = \infty$. При выступлении на семинаре Б. С. Кашина мною была предложена задача для случая $q = 1$, решение которой требовало новых идей, которые могли бы быть в дальнейшем также использованы при нахождении порядков линейных поперечников классов Гёльдера — Никольского и классов Бесова. А. Д. Изааку, используя вероятностные методы, удалось получить следующую нетривиальную оценку.

Теорема 9 (Изаак [23]). *Пусть $N \leqslant \frac{nm}{2}$. Тогда*

$$m\frac{\sqrt{\log\log m}}{\log m} \ll d_N(B^{n,m}_{1,\infty}, l^{n,m}_{2,1}) \ll m.$$

Найдем порядок поперечника по Колмогорову $d_N(V^{n,m}_{k,\infty}, l^{n,m}_{p,q})$ множества $V^{n,m}_{k,\infty}$, являющегося обобщением множества $B^{n,m}_{1,\infty}$, в смешанной норме $l^{n,m}_{p,q}$ для $p=2$, $1<q\leqslant\infty$ и $1<p\leqslant\min\{q,2\}$, $1<q\leqslant\infty$. Множества $V^{n,m}_{k,\infty}$ появляются, например, при дискретизации задач об оценке снизу поперечников пересечения классов Гёльдера — Никольского периодических функций многих переменных $H^r_p(\mathbb{T}^d)$.

Для оценки поперечников конечномерных множеств в смешанной норме будем использовать два следующих факта.

Теорема 10 (Галеев [14]). *Пусть $0<q<\infty$, $p_i\in\mathbb{R}^n$, $i=1,\dots,m$. Тогда*

$$A\biggl(\sum_{i=1}^m |p_i|^2\biggr)^{1/2} \leqslant \biggl(\frac{1}{2^m}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\biggl|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i p_i\biggr|^q\biggr)^{1/q} \leqslant B\biggl(\sum_{i=1}^m |p_i|^2\biggr)^{1/2}$$

при некоторых положительных константах A и B, зависящих от q и не зависящих от m, n и векторов p_i.

Теорема является обобщением известного неравенства Хинчина для векторных величин p_i.

Лемма 1 (Галеев [15]). *Пусть $T=\{t=\bigcup_{s=1}^m t_s : t_s\subset\triangle_s,\ \operatorname{card} t_s = k,\ s=1,\dots,m\}$, $0\leqslant x_i\leqslant 1$, $i=1,\dots,mn$, $\sum_{i=1}^{mn} x_i\leqslant n$, $0<q<\infty$. Тогда*

$$I=\biggl(\frac{1}{|T|}\sum_{t\in T}\biggl(\sum_{i\in t} x_i\biggr)^q\biggr)^{1/q} \leqslant Ck,$$

где константа C зависит от q и не зависит от k, n, m и набора x_i.

Используя выписанные усреднения и теорему двойственности (см. Н. П. Корнейчук [28, с. 34] о расстоянии от точки до подпространства, доказывается следующая теорема.

Теорема 11 (Галеев [15]). *Пусть $1<q\leqslant\infty$, $N\leqslant\frac{nm}{2}$, $1\leqslant k\leqslant n$. Тогда*

$$d_N(V^{n,m}_{k,\infty}, l^{n,m}_{p,q}) \asymp k^{\frac1p} m^{\frac1q},$$

если $p=2$ или $1<p\leqslant\min\{q,2\}$.

2.2. Поперечники классов функций одной переменной. В этом пункте формулируется теорема о порядке поперечника по Колмогорову $d_N(W^r_p, L_q)$ и определяется порядок $d_N(W^\Omega, L_q)$. А также улучшаются оценки поперечников для критического показателя работы Е. Д. Куланина [29].

Теорема 12. *Имеет место оценка*

$$d_N(W^r_p(\mathbb{T}^1), L_q) \asymp \begin{cases} N^{-r}, & 1\leqslant q\leqslant p\leqslant\infty, \quad r>0,\\ N^{-r+1/p-1/q}, & 1<p\leqslant q<2, \quad r>\frac1p-\frac1q,\\ N^{-r+1/p-1/2}, & 1<p\leqslant 2\leqslant q\leqslant\infty, \quad r>\frac1p,\\ N^{-r}, & 2\leqslant p\leqslant q<\infty, \quad r>\frac{1/p-1/q}{1-2/q}.\end{cases}$$

При $p=q=2$ точные значения получены А. Н. Колмогоровым [27]; для $p=1$, $q=2$ и $p=q=\infty$ порядок найден С. Б. Стечкиным [38]; при $p=q=\infty$ точные значения определены В. М. Тихомировым [43]; при $1 \leqslant p = q < \infty$ порядки найдены С. Б. Бабаджановым и В. М. Тихомировым [2]; $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$ — Ю. И. Маковозом [33]; $1 = p < q \leqslant 2$ — М. З. Соломяком и В. М. Тихомировым [36]; $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2$ — Р. С. Исмагиловым [24, 25], $p = 1$, $q > 2$ — Е. Д. Глускиным [17], в остальных случаях при $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $q \geqslant 2$ — Б. С. Кашиным [26].

Используя вложение пересечения классов $W^{\Omega}(\mathbb{T}^1)$, оценки сверху поперечников для $d_N(W^r_p(\mathbb{T}^1), L_q)$, дискретизацию и оценки снизу поперечников пересечения конечномерных шаров, найдем поперечники пересечения функциональных классов.

Теорема 13. *Пусть* $W^{\Omega}(\mathbb{T}^1) = \bigcap_{(\frac{1}{p},r)\in\Omega} W^r_p(\mathbb{T}^1)$, $\Omega = \left\{\left(\frac{1}{p^i}, r^i\right) \subset (0,1)\times\mathbb{R} : i = 1,\dots,m\right\}$, $G = \operatorname{conv}\Omega + \operatorname{cone}\{(-1,-1),(1,0)\}$, $\gamma(\xi) = \sup_{(\xi,r)\in G} r$. *Тогда*

$$d_N(W^{\Omega}(\mathbb{T}^1), L_q) \asymp \begin{cases} N^{-\gamma(\frac{1}{q})}, & \gamma(\frac{1}{q}) > 0, \quad 1 \leqslant q \leqslant 2, \\ N^{-\gamma(\frac{1}{2})}, & \gamma(\frac{1}{2}) > \frac{1}{2}, \quad 2 < q \leqslant \infty. \end{cases}$$

Приведем теорему, уточняющую для критического показателя оценки поперечников работы Е. Д. Куланина [29].

Теорема 14 (о поперечнике по Колмогорову класса Соболева при критических гладкостях [13])**.** *Имеют место соотношения:*

а) *при* $2 \leqslant p < q < \infty$, $r = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)/\left(1 - \frac{2}{q}\right)$

$$N^{-r} \ll d_N(W^r_p, L_q) \ll N^{-r}(\log N)^{r+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}};$$

б) *при* $1 < p \leqslant 2 < q < \infty$, $r = \frac{1}{p}$

$$N^{-\frac{1}{2}} \ll d_N(W^r_p, L_q) \ll N^{-\frac{1}{2}}(\log N)^{\frac{1}{2}}.$$

В работе Куланина степени логарифма равны соответственно $r+1$ и $\frac{3}{2}$.

2.3. Поперечники классов функций многих переменных. Исследования поперечников классов периодических функций многих переменных начаты К. И. Бабенко [3] и продолжены в работах Б. С. Митягина [34], С. А. Теляковского, Я. С. Бугрова, Н. С. Никольской, Э. М. Галеева, Динь Зунга, В. Н. Темлякова и др.

Выпишем некоторые формулы для оценок сверху колмогоровских поперечников функциональных классов. Для этого нам понадобится следующая лемма, которая легко выводится из определения колмогоровского поперечника, теоремы Литтльвуда — Пэли и теоремы о дискретизации.

Лемма 2 (Галеев [16])**.** *Пусть* $s \in \mathbb{N}^d$, $\mathscr{T}_s := \operatorname{lin}\{e^{i\langle k,t\rangle} : k \in \square_s\}$, $N_s \in \mathbb{Z}_+$, $N_s \leqslant 2^{\langle s,1\rangle}$, $r \in \mathbb{R}^d$, $1 < p,\ q < \infty$. *Тогда существует линейное подпространство* $L_{N_s} \subset \mathscr{T}_s$ *размерности* N_s *и оператор* $P_{N_s}\colon \mathscr{T}_s \to L_{N_s}$ *такой, что*

$$\|\delta_s x - P_{N_s}\delta_s x\|_{L_q} \ll d_{N_s}\left(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}}\right) 2^{\left\langle s,-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right\rangle}\|\delta_s x^{(r)}\|_{L_p}.$$

Возьмем оператор $P_N\colon L_q \to L_N$, действующий на функцию $x = \sum_{s\in\mathbb{N}^d}\delta_s x$ по формуле $P_N x = \sum_{s\in\mathbb{N}^d} P_{N_s}\delta_s x$, где P_{N_s} и L_{N_s} — соответственно операторы и подпространства $L_N = \bigcup_{s\in\mathbb{N}^d} L_{N_s}$.

Обозначим для краткости записи $q^* := \min\{q, 2\}$, $\alpha := r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Тогда

$$d_N(B^r_{p,\theta}, L_q) \ll \begin{cases} \sup\limits_{s\in\mathbb{N}^d} 2^{\langle s,-\alpha\rangle} d_{N_s}\Big(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}}\Big), & \theta \leqslant q^*, \\ \Bigg(\sum\limits_{s\in\mathbb{N}^d}\Big(2^{\langle s,-\alpha\rangle} d_{N_s}\Big(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}}\Big)\Big)^{\frac{q^*\theta}{\theta-q^*}}\Bigg)^{\frac{1}{q^*}-\frac{1}{\theta}}, & \theta > q^*. \end{cases}$$

В частности, для классов $H^r_p = B^r_{p,\infty}$ при $1 < p < \infty$ имеем

$$d_N(H^r_p, L_q) \ll \Bigg(\sum_{s\in\mathbb{N}^d}\Big(2^{\langle s,-\alpha\rangle} d_{N_s}\Big(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}}\Big)\Big)^{q^*}\Bigg)^{\frac{1}{q^*}}.$$

Поскольку $W^r_p(\mathbb{T}^d) \Subset B^r_{p,p^{**}}(\mathbb{T}^d)$ ($p^{**} := \max\{p, 2\}$), а $\theta = p^{**} \leqslant q^* \Leftrightarrow p \leqslant 2 \leqslant q$, то

$$d_N(W^r_p, L_q) \ll \begin{cases} \sup\limits_{s\in\mathbb{N}^d} 2^{\langle s,-\alpha\rangle} d_{N_s}\Big(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}}\Big), & p \leqslant 2 \leqslant q, \\ \Bigg(\sum\limits_{s\in\mathbb{N}^d}\Big(2^{\langle s,-\alpha\rangle} d_{N_s}\Big(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}}\Big)\Big)^{\frac{q^*p^{**}}{p^{**}-q^*}}\Bigg)^{\frac{1}{q^*}-\frac{1}{p^{**}}}, & p \geqslant 2 \geqslant q. \end{cases}$$

Выпишем формулы для оценок снизу колмогоровских поперечников функциональных классов. Пусть $S \in \mathbb{N}^d$, $K = \bigcup_{s\in S} \square_s$, $\mathscr{T} = \operatorname{lin}\{e^{i\langle k,t\rangle} : k \in K\}$, $r \in \mathbb{R}^d$, $0 < r_1 = \ldots = r_{l+1} < r_{l+2} \leqslant \ldots \leqslant r_d$. Возьмем $S = \{s = (s_1, \ldots, s_{l+1}, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^d : \langle s, 1\rangle = m\}$. Тогда $|S| \asymp m^l$ и

$$d_N(B^r_{p,\theta}, L_q) \gg 2^{-m(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} d_N\big(B^{2^m, m^l}_{p,\theta}, l^{2^m, m^l}_{q,q^{**}}\big).$$

Если воспользоваться другими неравенствами, то при $q \leqslant 2$ аналогично получим другую формулу для оценки снизу поперечника:

$$d_N(B^r_{p,\theta}, L_q) \gg 2^{-m\left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} d_N\big(B^{2^m, m^l}_{p,\theta}, l^{2^m, m^l}_{2,q}\big).$$

Поскольку $W^r_p(\mathbb{T}^d) \Supset B^r_{p,p^*}(\mathbb{T}^d)$ ($p^* := \min\{p, 2\}$), то

$$d_N(W^r_p, L_q) \gg 2^{-m\left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} d_N\big(B^{2^m, m^l}_{p,p^*}, l^{2^m, m^l}_{q,q^{**}}\big).$$

Полученными формулами будем пользоваться в дальнейшем для вычисления поперечников функциональных классов.

Замечание. Формулы справедливы не только для колмогоровских поперечников, но и для других поперечников (линейных, проекционных, ортопроекционных и т. д.).

Теорема 15 (о поперечнике по Колмогорову класса Соболева)**.** *Пусть* $r \in \mathbb{R}^d$, $r_1 = \ldots = r_{l+1} < r_{l+2} \leqslant \ldots \leqslant r_d$, $2 < p,\ q < \infty$. *Тогда*

$$d_N(W^r_p(\mathbb{T}^d), L_q) \asymp \begin{cases} \Big(\frac{\log^l N}{N}\Big)^{r_1}, & q \leqslant p,\ r_1 > 0; \\ \Big(\frac{\log^l N}{N}\Big)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}, & p \leqslant q \leqslant 2,\ r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}; \\ \Big(\frac{\log^l N}{N}\Big)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}}, & p \leqslant 2 < q,\ r_1 > \frac{1}{p}; \\ \Big(\frac{\log^l N}{N}\Big)^{r_1}, & 2 \leqslant p < q,\ r_1 > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Теорема 15 содержится в работах автора при $2 \leqslant q \leqslant p$ [5], $q = p$ [6], $q \leqslant p$ [9]; Темлякова при $p < q \leqslant 2$ [39], $p < q$, $q \geqslant 2$ [40].

Теорема 16 (о поперечнике по Колмогорову класса Гёльдера — Никольского)**.** *Пусть* $r \in \mathbb{R}^d$, $r_1 = \ldots = r_{l+1} < r_{l+2} \leqslant \ldots \leqslant r_d$, $1 < p,\ q < \infty$, $\beta := \frac{1/p-1/q}{1-2/q}$. *Тогда*

$$d_N(H_p^r(\mathbb{T}^d), L_q) \asymp \begin{cases} \log^{\frac{l}{2}} N \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1}, & p \geqslant \max\{q,2\},\ r_1 > 0; \\ \log^{\frac{l}{q}} N \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}, & p \leqslant 2,\ r_1 > \frac{1}{p}-\frac{1}{q}; \\ \log^{\frac{l}{2}} N \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}, & p \leqslant 2 < q,\ r_1 > \frac{1}{p}; \\ \log^{\frac{l}{2}} N \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1}, & 2 \leqslant p < q,\ r_1 > \beta. \end{cases}$$

Теорема 16 содержится в работах Темлякова при $p = q \leqslant 2$ [42], $p \leqslant q$, $q \geqslant 2$ [40, 41]; Динь Зунга при $2 \leqslant q \leqslant p$ [21, 22]; автора при $q < 2 \leqslant p$ [9, 10]; $2 \leqslant p \leqslant q$, $\beta < r_1 \leqslant \frac{1}{2}$ [10]; $p \leqslant q \leqslant 2$ [14].

2.3. Малые гладкости.

Теорема 17 (о поперечнике по Колмогорову класса Соболева при малых гладкостях)**.** *Пусть* $r \in \mathbb{R}^d$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 = \ldots = r_{l+1} < r_{l+2} \leqslant \ldots \leqslant r_d$, $1 < p,\ q < \infty$, $\beta := (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})/(1 - \frac{2}{q})$. *Тогда*

$$\left(\frac{\log^{\frac{2l}{q}} N}{N}\right)^{\frac{q}{2}\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} \ll d_N(W_p^r(\mathbb{T}^d), L_q)$$

$$\ll \begin{cases} \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{q}{2}\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} \log^{\frac{l}{2}-\frac{l}{p}} N, & 2 \leqslant p < q,\ r_1 < \beta, \\ \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{q}{2}\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}, & p \leqslant 2 < q,\ r_1 < \frac{1}{p}. \end{cases}$$

Теорема 18 (о поперечнике по Колмогорову класса Гёльдера — Никольского при малых гладкостях)**.** *Пусть* $r \in \mathbb{R}^d$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 = \ldots = r_{l+1} < r_{l+2} \leqslant \ldots \leqslant r_d$, $1 < p,\ q < \infty$, $\beta := \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)/\left(1 - \frac{2}{q}\right)$. *Тогда при* $2 \leqslant p < q$, $r_1 < \beta$, *или при* $p \leqslant 2 < q$, $r_1 < \frac{1}{p}$,

$$\log^{\frac{l}{q}} N \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{q}{2}\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} \ll d_N(H_p^r(\mathbb{T}^d), L_q) \ll \log^{\frac{l}{2}} N \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{q}{2}\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}.$$

Теоремы 17, 18 приводятся впервые. Более слабые (по степени $\log N$) оценки d_N сверху и снизу содержатся в работах автора [11, 12]. Еще более слабые (по степени $\log N$) оценки $d_N(W_p^r, L_q)$ сверху и снизу содержатся в кандидатской диссертации Е. Д. Куланина [30].

3. Линейные поперечники

В этом пункте определяются линейные поперечники классов периодических функций одной и нескольких переменных $W_p^r(\mathbb{T}^d)$ и $H_p^r(\mathbb{T}^d)$ в пространстве L_q.

Линейный поперечник был введен В. М. Тихомировым [43]. Напомним, что *линейным N-поперечником* множества W в линейном нормированном пространстве X называется величина $\lambda_N(W,X)=\inf_P\sup_{x\in W}\|x-Px\|_X$, где инфимум берется по всем действующим в X линейным непрерывным операторам P ранга N.

При выводе порядков линейных поперечников функциональных классов мы используем теорему двойственности Р. С. Исмагилова и оценки Е. Д. Глускина линейных поперечников конечномерных множеств.

Теорема 19 (Исмагилов [25]). *Пусть BX, BY — единичные шары в банаховых пространствах X и Y соответственно, $(BX)^\circ$, $(BY)^\circ$ — поляры этих множеств. Пространство Y^* вложено в пространство X. Тогда*

$$\lambda_N((BY)^\circ,X)=\lambda_N((BX)^\circ,Y). \tag{1}$$

Теорема 20 (Глускин [19]). *Пусть $1\leqslant p<2\leqslant q<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 1$, $N<m$. Тогда*

$$\lambda_N(B_p^m,l_q^m)\asymp\max\left\{m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}},\min\left\{1,m^{\frac{1}{q}}N^{-\frac{1}{2}}\right\}\sqrt{1-\frac{N}{m}}\right\}.$$

Сформулируем теоремы о линейных поперечниках классов периодических функций одной и нескольких переменных.

Теорема 21. *Пусть $1<p$, $q<\infty$, $r>\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)_+$. Тогда*

$$\lambda_N(W_p^r(\mathbb{T}^1),L_q)\asymp\begin{cases}N^{-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}, & q\leqslant 2 \text{ или } 2\leqslant p;\\ N^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & \frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 1,\ q>2,\ r>\frac{1}{p};\\ N^{e-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}, & \frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leqslant 1,\ p<2,\ r>1-\frac{1}{q}.\end{cases}$$

Теорема 21 была доказана Р. С. Исмагиловым [25] при $q\leqslant 2$ или $p\geqslant 2$; В. Е. Майоровым [31, 32] при $1<p\leqslant 2\leqslant q$ и К. Хеллигом [44].

Теорема 22 (Галеев [12]). *Пусть $r\in\mathbb{R}^d$, $\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)_+<r_1=\ldots=r_{l+1}<r_{l+2}\leqslant\ldots\leqslant r_d$, $1<p,q<\infty$, $W_p^r=W_p^r(\mathbb{T}^d)$. Тогда*

$$\lambda_N(W_p^r,L_q)\asymp\begin{cases}\left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)_+}, & q\leqslant 2 \text{ или } 2\leqslant p;\\ \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}, & \frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 1,\quad q>2,\ r_1>\frac{1}{p};\\ \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}, & \frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leqslant 1,\ p<2,\ r_1>1-\frac{1}{q}.\end{cases}$$

Теорема 23 (Галеев [12, 16]). *Пусть $r\in\mathbb{R}^d$, $0<r_1=\ldots=r_{l+1}<r_{l+2}\leqslant\ldots\leqslant r_d$, $1<p$, $q<\infty$, $H_p^r=H_p^r(\mathbb{T}^d)$. Тогда*

1) *при $p\geqslant\max\{q,2\}$*

$$\lambda_N(H_p^r,L_q)\asymp(N^{-1}\log^l N)^{r_1}\log^{\frac{l}{2}}N;$$

2) *при $q\leqslant p\leqslant 2$*

$$(N^{-1}\log^l N)^{r_1}\log^{\frac{l}{2}}N\ll\lambda_N(H_p^r,L_q)\ll(N^{-1}\log^l N)^{r_1}\log^{\frac{l}{p}}N;$$

3) *при $p\leqslant q\leqslant 2$, $r_1>\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$*

$$\lambda_N(H_p^r,L_q)\asymp(N^{-1}\log^l N)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\log^{\frac{l}{q}}N;$$

4) *при* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant 1$, $q\geqslant 2$, $r_1>\frac{1}{p}$

$$\lambda_N(H_p^r,L_q)\asymp\left(N^{-1}\log^l N\right)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}\log^{\frac{l}{2}}N;$$

5) *при* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$, $p\leqslant 2$, $r_1>1-\frac{1}{q}$

$$\frac{\sqrt{\log\log\log N}}{\log\log N}\left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}\log^{\frac{l}{q}}N\ll\lambda_N(H_p^r,L_q)\ll\left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}\log^{\frac{l}{q}}N;$$

6) *при* $2\leqslant p<q$, $r_1>\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$

$$\frac{\sqrt{\log\log\log N}}{\log\log N}\left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\log^{\frac{l}{q}}N\ll\lambda_N(H_p^r,L_q)\ll\left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\log^{\frac{l}{q}}N.$$

Литература

1. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения.—М.: Наука, 1975.—480 с.
2. *Бабаджанов С. Б., Тихомиров В. М.* О поперечниках одного класса в пространствах L^p // Изв. АН Узб. ССР. Сер. физ.-мат.—1967.—Т. 2.—С. 24–30.
3. *Бабенко К. И.* О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР.—1960.—Т. 132, № 2.—С. 247–250.
4. *Бабенко К. И.* О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР.—1960.—Т. 132, № 5.—С. 982–985.
5. *Галеев Э. М.* Приближение некоторых классов периодических функций многих переменных суммами Фурье в метрике $\tilde{L}_p$ // Успехи мат. наук.—1977.—Т. 32, № 4.—С. 251–252.
6. *Галеев Э. М.* Приближение суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными // Мат. заметки.—1978.—Т. 23, № 2.—С. 197–211.
7. *Галеев Э. М.* Поперечники по Колмогорову пересечения классов периодических функций и конечномерных множеств // Мат. заметки.—1981.—Т. 29, № 5.—С. 749–760.
8. *Галеев Э. М.* Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных W_p и H_p в пространстве L_q // Теория функций и приближений.—Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1986.—Ч. 2.—С. 70–72.
9. *Галеев Э. М.* Поперечники по Колмогорову некоторых классов периодических функций многих переменных // Конструктивная теория функций. Тр. Междунар. конф. по конструктивной теории функций.—1984.—С. 27–32.
10. *Галеев Э. М.* Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $W_p^{\bar{r}}$ и $H_p^{\bar{r}}$ в пространстве L_q // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1985.—Т. 49.—С. 916–934.
11. *Галеев Э. М.* Оценка колмогоровских поперечников классов H_p^r периодических функций многих переменных малой гладкости // Теория функций и ее прил. Сб. тр. конф. молодых ученых.—1986.—С. 17–24.
12. *Галеев Э. М.* Оценки поперечников по Колмогорову классов периодических функций многих переменных малой гладкости // Вестн. МГУ. Сер. мат.-мех.—1987.—№ 1.—С. 26–30.
13. *Галеев Э. М.* О линейных поперечниках классов периодических функций многих переменных // Вестн. МГУ. Сер. мат.-мех.—1987.—№ 4.—С. 13–16.
14. *Галеев Э. М.* Поперечники по Колмогорову классов периодических функций одной и нескольких переменных // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1990.—Т. 54, № 2.—С. 418–430.
15. *Галеев Э. М.* Поперечники по Колмогорову некоторых конечномерных множеств в смешанной норме // Мат. заметки.—1995.—Т. 58, № 1.—С. 32–41.
16. *Галеев Э. М.* Линейные поперечники классов Гёльдера — Никольского периодических функций многих переменных // Мат. заметки.—1996.—Т. 59, № 2.—С. 189–199.
17. *Глускин Е. Д.* Об оценках норм некоторых p-абсолютно суммирующих операторов // Функциональный анализ.—1978.—Т. 12, № 2.—С. 23–31.

18. *Глускин Е. Д.* О некоторых конечномерных задачах теории поперечников // Вестн. ЛГУ.—1981.—№ 13.—С. 5–10.
19. *Глускин Е. Д.* Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Мат. сб.—1983.—Т. 120.—С. 120–189.
20. *Глускин Е. Д.* Пересечения куба с октаэдром плохо аппроксимируются подпространствами малой размерности // Приближение функций специальными классами операторов.—Вологда: Вологодский гос. пед. ин-т, 1987.—С. 35–41.
21. *Динь Зунг.* О приближении периодических функций многих переменных // Успехи мат. наук.—1983.—Т. 38, № 6.—С. 111–112.
22. *Динь Зунг.* Приближение классов гладких функций многих переменных // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.—1984.—№ 10.—С. 207–226.
23. *Изаак А. Д.* Поперечники по Колмогорову в конечномерных пространствах со смешанной нормой // Мат. заметки.—1994.—Т. 55, № 5.—С. 43–52.
24. *Исмагилов Р. С.* Об n-мерных поперечниках компактов в гильбертовом пространстве // Функциональный анализ и его прил.—1968.—Т. 2, № 2.—С. 32–39.
25. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими полиномами // Успехи мат. наук.—1974.—Т. 29, № 3.—С. 161–178.
26. *Кашин Б. С.* Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1977.—Т. 41, № 2.—С. 334–351.
27. *Колмогоров А. Н.* Uber die beste Annaherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse // Ann. of Math.—1936.—Vol. 37.—P. 107–110.
28. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.—М.: Наука, 1976.—320 с.
29. *Куланин Е. Д.* Оценки поперечников класса Соболева малой гладкости // Вестн. МГУ. Сер. мат.-мех.—1983.—№ 2.—С. 24–30.
30. *Куланин Е. Д.* Оценки поперечников класса Соболева малой гладкости: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—М.: МГУ, 1985.—130 с.
31. *Майоров В. Е.* О линейных поперечниках соболевских классов // Докл. АН СССР.—1978.—Т. 243, № 5.—С. 1127–1130.
32. *Майоров В. Е.* О линейных поперечниках соболевских классов и цепочках экстремальных подпространств // Мат. сб.—1980.—Т. 113(115), № 3.—С. 437–463.
33. *Маковоз Ю. И.* Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховом пространстве // Мат. сб.—1972.—Т. 87, № 1.—С. 136–142.
34. *Митягин Б. С.* Приближение функций в пространствах L^p и C на торе // Мат. сб.—1962.—Т. 58, № 4.—С. 397–414.
35. *Pietch A.* s-numbers of operators in Banach spaces // Stud. Math.—1974.—Vol. 51, № 3.—P. 201–223.
36. *Соломяк М. З., Тихомиров В. М.* О геометрических характеристиках вложения классов W_p в C // Изв. вузов. Сер. мат.—1967.—№ 10.—С. 76–82.
37. *Стесин М. И.* Александровские поперечники конечномерных множеств и классов гладких функций // Докл. АН СССР.—1975.—Т. 220, № 6.—С. 1278–1281.
38. *Стечкин С. Б.* О наилучших приближениях заданных классов любыми полиномами // Успехи мат. наук.—1954.—Т. 9, № 1.—С. 133–134.
39. *Темляков В. Н.* О приближении периодических функций нескольких переменных с ограниченной смешанной разностью // Докл. АН СССР.—1980.—Т. 253, № 3.—С. 544–548.
40. *Темляков В. Н.* Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 267, № 3.—С. 314–317.
41. *Темляков В. Н.* Приближение периодических функций нескольких переменных тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1985.—Т. 49, № 5.—С. 986–1030.
42. *Темляков В. Н.* Об оценках ε-энтропии и поперечников классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Докл. АН СССР.—1988.—Т. 301, № 2.—С. 288–291.

43. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук.—1960.—Т. 15, № 3.—С. 81–120.
44. *Hollig K.* Approximationszchalen von Sobolev // Einbettungen: Dis.—Bonn, 1979.

Статья поступила 15 сентября 2010 г.

Галеев Эльфат Михайлович
Московский государственный университет,
профессор кафедры Общих проблем управления
РОССИЯ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1
E-mail: `galeevem@mail.ru`

KOLMOGOROV AND LINEAR DIAMETERS OF FUNCTIONAL CLASSES AND FINITE DIMENSIONAL SETS

Galeev E. M.

In this paper we give a brief review of results concerning the Kolmogorov and linear diameters of Sobolev, Holder–Nikol'skii and Besov classes of periodic functions of one and several variables as well as of finite-dimensional sets. We present theorems for the order estimates of diameters obtained by the author, Temlyakov and others.

Key words: approximation, classes of periodic functions of one and several variables, Kolmogorov diameters, linear diameters, imbedding of functional classes, imbedding of finite dimensional sets.