Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 2, С. 45–55

УДК **512.5**

КЛАССЫ СОПРЯЖЕННЫХ В ГРУППЕ ШЕВАЛЛЕ ТИПА F_4 БОЛЬШИХ АБЕЛЕВЫХ ПОДГРУПП УНИПОТЕНТНОЙ ПОДГРУППЫ[1]

Г. С. Сулейманова

Завершено описание больших абелевых подгрупп унипотентной подгруппы группы Шевалле типа F_4 над конечным полем.

Ключевые слова: группа Шевалле, унипотентная подгруппа, большая абелева подгруппа.

Введение

В конечной группе для любого теоретико-группового свойства $\mathscr{P}$ всякую $\mathscr{P}$-подгруппу наивысшего порядка называют *большой $\mathscr{P}$-подгруппой.* Пусть G — группа лиева типа над конечным полем K. Ее максимальная унипотентная подгруппа U [10] является силовской. Вопрос описания больших абелевых подгрупп в U изучен в 70–80-е гг. для классических типов, а для исключительных типов это проблема, сформулированна в обзоре А. С. Кондратьева [3, Проблема (1.6)]. Порядки больших абелевых подгрупп в U указал Е. П. Вдовин [2], развивая метод А. И. Мальцева [7]. Оценки порядков в [2] и [7] позволяют показать, что перечисленные в [5, 6, 9], наряду с максимальными, все большие нормальные абелевы подгруппы в U есть, в точности, все нормальные большие абелевы подгруппы в U.

Автор и В. М. Левчук [6, 12], [11, § 1], исследуя вопрос описания больших абелевых подгрупп в U с точностью до G-сопряженности, установили, что *в группе U любая большая абелева подгруппа G-сопряжена с нормальной подгруппой в U; исключения возможны лишь для типа G_2, F_4, ${}^3D_4$, ${}^2E_6$ и E_8.* В настоящей статье для групп U типа F_4 показано существование исключений (как и для типа G_2 в [6]); вместе с [9], основная теорема 1 завершает описание больших абелевых подгрупп.

В группе Шевалле $\Phi(K)$ над полем K, ассоциированной с системой корней Φ, унипотентную подгруппу U порождают корневые подгруппы X_r $(r \in \Phi^+)$ с фиксированной положительной системой корней Φ^+ [10]. Пусть $\{r\}^+$ есть совокупность корней $s \in \Phi^+$ с неотрицательными коэффициентами в линейном выражении $s - r$ через простые корни. Полагаем, что

$$T(r) = \left\langle X_s \mid s \in \{r\}^+ \right\rangle, \quad Q(r) = \left\langle X_s \mid s \in \{r\}^+ \setminus \{r\} \right\rangle \quad (r \in \Phi).$$

[1] Работа выполнена при при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 09-01-00717.

Для системы корней Φ типа F_4 через $abcd$ обозначим, как и в [1], корень $a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_4$, где α_1, α_2, α_3, α_4 — простые корни. Основная теорема использует в группе U типа F_4 подгруппы

$$\begin{gathered}\{x_{0011}(t)x_{1221}(c_1t) \mid t \in K\}\{x_{0111}(t)x_{1121}(c_2t) \mid t \in K\} \\ \times\{x_{1111}(t)x_{0121}(c_3t) \mid t \in K\}X_{1231}T(0122) \quad (c_1, c_2, c_3 \in K).\end{gathered} \tag{1}$$

Теорема 1. *В группе Шевалле G типа F_4 над конечным полем K каждая большая абелева подгруппа унипотентной подгруппы U сопряжена в G либо с нормальной подгруппой в U, либо, когда $2K = 0$, с подгруппой (1) или ее образом относительно графового автоморфизма. Подгруппа (1) не сопряжена в G с нормальной в U подгруппой.*

Случай $2K = K$ основной теоремы исследован в [9].

1. Предварительные замечания

Известно [10, теорема 5.3.3], что всякий элемент унипотентной подгруппы U допускает единственное разложение в произведение корневых элементов $x_r(t_r)$ $(r \in \Phi^+)$, расположенных соответственно фиксированному упорядочению корней.

Пусть $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ есть база корневой системы Φ евклидова пространства V. Если не оговорено противное, по аналогии с [2, 10], фиксируем на пространстве V линейный порядок $\leqslant$ (согласованный также с линейными операциями) по правилу: при $r, s \in V$ считаем, что $r < s$ тогда и только тогда, когда последняя ненулевая координата вектора $s - r$ в выбранной базе Φ (и V) является положительной.

В группе U подгруппы $U_i = \langle X_r \mid ht(r) \geqslant i\rangle$ ($ht(r)$ — высота корня r) образуют центральный ряд. Когда $H \subseteq T(r_1)\,T(r_2)\ldots T(r_m)$ и включение нарушается при любой замене $T(r_i)$ на $Q(r_i)$, согласно [5], назовем $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\} = \mathscr{L}(H)$ множеством углов для H.

Как и в [4], представим систему положительных корней типа F_4^+ объединением систем C_4^+ и B_4^+ с заданным пересечением:

$$B_4^+ = \{q_{ij} \mid 0 \leqslant |j| < i \leqslant 4\}, \quad C_4^+ = \{p_{ij} \mid 0 < |j| \leqslant i \leqslant 4,\ i \neq j\}.$$

Согласно [5], справедлива следующая

Лемма 2. *Нормальные большие абелевы подгруппы группы U типа F_4 при $2K = K$ составляет подгруппа $T(q_{43})\,U_6$, а при $2K = 0$ — подгруппы:*

$$X_{q_{43}}T(p_{42}), \quad \bigl\{x_{p_{3,-2}}(t)x_{p_{42}}(ct) \mid t \in K\bigr\}\,T(q_{43})T(p_{41}), \tag{2}$$

$$\bigl\{x_{q_{3,-2}}(t)x_{q_{42}}(ct) \mid t \in K\bigr\}X_{p_{43}}\,X_{p_{42}}X_{p_{41}}T(p_{4,-1}), \tag{3}$$

$$\bigl\{x_{p_{43}}(t)x_{q_{43}}(ct) \mid t \in K\bigr\}\,T(p_{42}), \tag{4}$$

$$\bigl\{x_{q_{3,-2}}(t)x_{q_{42}}(ct) \mid t \in K\bigr\}\bigl\{x_{p_{3,-2}}(t)x_{p_{42}}(dt) \mid t \in K\bigr\}\,X_{p_{41}}T(p_{4,-1}), \tag{5}$$

где $c, d \in K$, причем для подгруппы (4) $|K| = 2$ при $c \neq 0$.

Для наглядности используем представление корней следующей диаграммой из [4]. (Корни сопровождаются обозначением из [1, Таблица VIII].) Симметрия $\bar{}$ здесь определяется правилом:

$$\bar{p}_{ij} = q_{ij}, \quad \bar{q}_{ij} = p_{ij} \quad (1 \leqslant |j| < i \leqslant 4).$$

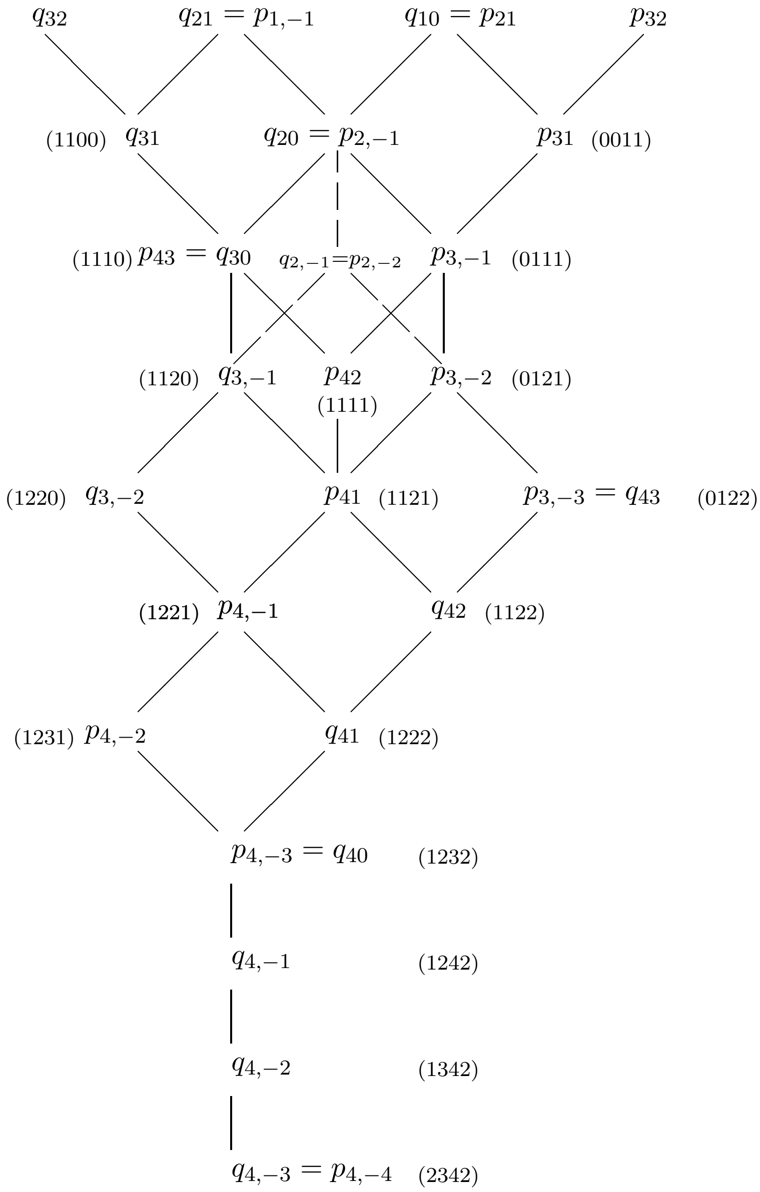

Диаграмма 1. Положительные корни системы типа F_4.

Напомним, что *коммутативным подмножеством системы корней* Φ называется такое подмножество $\Psi \subseteq \Phi^+$, что $r + s \notin \Phi$ для любых корней $r, s \in \Psi$. А. И. Мальцев [7] нашел коммутативные подмножества максимального порядка всех систем корней Φ.

Подмножество $\Psi \subseteq \Phi^+$ в [2] названо *абелевым относительно* p, если для любых корней $r, s \in \Psi$ либо $r + s \notin \Phi$, либо $r + s \in \Phi$ и $C_{11rs} = 0$ в характеристике p для структурной константы базиса Шевалле. Там же найдены максимальные абелевы относительно p подмножества систем корней типа G_2 и F_4.

Далее нам понадобятся следующие обозначения из [2]. Через $\Phi(x)$ для элемента $x \in U$ обозначим множество таких корней r таких, что $t_r \neq 0$ в разложении $x = \prod_{r\in\Phi^+} x_r(t_r)$, где корни r выбраны в порядке возрастания относительно порядка $\leqslant$. Через $m(x)$ обозначим минимальный элемент множества $\Phi(x)$. В [2] доказана

Лемма 3. *Если A — абелева подгруппа группы U над полем характеристики* 2, *то $m(A) = \cup_{x\in A}\{m(x)\}$ есть абелево относительно* 2 *множество корней.*

2. Вспомогательные леммы и доказательство основной теоремы

Пусть U есть группа типа F_4 над конечным полем характеристики 2. Она допускает графовый автоморфизм [10, 12.3.3]. В группе Шевалле типа F_4 мономиальный элемент $n_r(1)$ для простого $r = \alpha_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ обозначим через n_i.

Лемма 4. *Большая абелева подгруппа группы U имеет не более одного простого угла.*

$\lhd$ Пусть A — произвольная большая абелева подгруппа группы U. Предположим, что A имеет по крайней мере два простых угла p, q. Занумеруем простые корни двумя способами так, чтобы в первом случае первым корнем был корень p (нумерация (*)), а во втором случае — корень q (нумерация (**)). Так как множество $m(A)$ в общем случае зависит от нумерации простых корней, то обозначим его через $m^*(A)$ и $m^{**}(A)$ в нумерациях (*) и (**) соответственно. Тогда $m^*(A)$ содержит корень p, а $m^{**}(A)$ содержит корень q.

Рассмотрим случай $p = \alpha_1$. Тогда множество $m^{**}(A)$ содержит простой корень $q \neq \alpha_1$ и, как видно из [2, Таблица 3], содержит еще корень 1342. Если $r \in \{1232, 1242, 1342, 2342\}$, то для всех $s \in \Phi^+$, $s \neq r$, в выражении $s - r$ через простые корни α_1, α_2, α_3, α_4 ненулевые коэффициенты будут одного знака. Таким образом, если $m(x) = 1342$ для некоторого $x \in A$, то это равенство останется верным при любой нумерации простых корней. Значит, $1342 \in m^*(A)$. Но тогда $m^*(A)$ не является абелевым относительно 2 подмножеством корней. Следовательно, случай $p = \alpha_1$ невозможен.

Рассмотрим случай $p = \alpha_2$. Тогда множество $m^{**}(A)$ содержит простой корень $q \neq \alpha_1, \alpha_2$ и, следовательно, содержит еще корень 1242 [2, Таблица 3]. Но этот корень не может входить в $m^*(A)$, так как это множество содержит корень α_2. Значит, случай $p = \alpha_2$ невозможен.

В оставшемся случае $p = \alpha_3$, $q = \alpha_4$ образом подгруппы A относительно графового автоморфизма будет подгруппа с углами α_1 и α_2, что противоречит доказанному выше. $\rhd$

Лемма 5. *Если большая абелева подгруппа A группы U имеет простой угол p, то $A \subseteq T(p)$.*

$\lhd$ Пусть A имеет простой угол α_i. По лемме 4 $A \subseteq X_{\alpha_i} U_2$. Предположим, что $A \nsubseteq T(\alpha_i)$. В силу графового автоморфизма, достаточно рассмотреть случаи $i = 1, 2$.

Рассмотрим случай $i = 1$. Пусть подгруппа A имеет угол r, не лежащий в $\{\alpha_1\}^+$. Тогда $r \in \{0110, 0120, 0011, 0111, 0121, 0122\}$. При $r = 0110$ подгруппа A^{n_3} будет иметь углы α_1 и α_2, что противоречит лемме 4. При $r = 0120$ подгруппа A^{n_3} имеет углы α_1 и α_2. При $r = 0011$ подгруппа A^{n_4} имеет углы α_1 и α_3. При $r = 0111$ подгруппа A^{n_4} имеет угол 0110, и приходим к случаю $r = 0110$. Случай $r = 0121$ n_3-сопряжением сводится к случаю $r = 0111$, а случай $r = 0122$ — n_4-сопряжением к случаю $r = 0120$.

При $i = 2$ подгруппа A имеет угол 0011, и тогда подгруппа A^{n_4} имеет углы α_2 и α_3. $\rhd$

Лемма 6. *Если большая абелева подгруппа A группы U имеет угол r высоты 2, то $A \subseteq T(r)$.*

$\lhd$ Из леммы 4 следует, что $A \subseteq U_2$. Пусть $r = 1100$. Тогда подгруппа A^{n_2} имеет угол α_1, и, по лемме 5, лежит в $T(\alpha_1)$. Пусть подгруппа A имеет угол r, не лежащий в $\{1100\}^+$. Так как $\{\alpha_1\}^+ = \{1100\}^+ \cup \{\alpha_1\}$ и $(T(1100))^{n_2} \subseteq T(\alpha_1)$, то в подгруппе A^{n_2} будет угол, не лежащий в $\{\alpha_1\}^+$, что противоречит включению $A^{n_2} \subseteq T(\alpha_1)$. Таким образом, $A \subseteq T(1100)$.

Пусть $r = 0110$. Если A имеет еще угол 1100 или 0011, то n_2- или n_3-сопряжениями, соответственно, получим подгруппу с двумя простыми углами. Случай $r = 0011$ сводится к случаю $r = 1100$ графовым автоморфизмом. $\rhd$

Аналогично доказывается

Лемма 7. *Пусть большая абелева подгруппа A группы U имеет угол r высоты* 3. *Тогда:*

а) $A \subseteq T(r)$ *при* $r = 0111$*;*

б) $A \subseteq T(1110)\,T(0120)$ *при* $r = 0120$*;*

в) $A \subseteq T(1110)\,T(0122)$ *при* $r = 1110$ *и* $A \subseteq X_{1110}U_4$.

Лемма 8. *Каждая большая абелева подгруппа группы U сопряжена в группе Шевалле с подгруппой, лежащей в U_2.*

$\lhd$ Пусть A — большая абелева подгруппа, не лежащая в U_2 и, следовательно, имеющая простой угол p. Тогда $A \subseteq T(p)$ по лемме 5. Далее зафиксируем стандартный порядок простых корней α_1, α_2, α_3, α_4.

Рассмотрим случай $p = \alpha_1$. Возьмем элемент $x \in A$ такой, что $m(x) = \alpha_1$ и сопряжениями, не выводящими подгруппу A за пределы U, получим из него такой элемент y, что $\{m(y), \alpha_1\}$ не будет абелевым относительно 2 множеством корней. Так как поле K конечно, то очевидно, что если $m(x) = r$, $ir + jp \in \Phi^+$ для некоторых $i, j > 0$ и простого корня p и $C_{ijrp} = \pm 1$, то X_p-сопряжением можем добиться того, что $ir + jp \notin \Phi(x)$. Заметим также, что подгруппа

$$X_{1110}X_{1111}X_{1121}X_{1221}X_{1231}X_{1232}X_{2342} \tag{6}$$

централизует $T(\alpha_1)$ и, следовательно, содержится в A. Поэтому, умножив элемент $x \in A$ на подходящие корневые элементы подгруппы (6), можем добиться того, что соответствующие корни не будут входить в $\Phi(x)$. Легко убедиться, что, с точностью до U-сопряжений, $m(x^n) = 1342$, где $n = n_2n_3n_2n_4n_3n_2$. Пусть B — подгруппа, полученная в результате перечисленных преобразований. Тогда $1342 \in m(B)$ и, следовательно, $\alpha_1 \notin m(B)$. А так как $B \subseteq T(\alpha_1)$, то $B \subseteq U_2$.

Пусть $p = \alpha_3$. Возьмем $x \in A$ такой, что $m(x) = \alpha_3$. С точностью до U-сопряжения считаем, что $0011 \notin \Phi(x)$. Тогда $y = x^{n_4}$ имеет вид

$$y = x_{0011}(t)x_{0110}(u) \mod U_3, \quad t \neq 0.$$

Пусть $u = 0$. С точностью до U-сопряжения $0111 \notin \Phi(y)$, тогда y^{n_2} лежит в U_3, причем $0111 \in \Phi(y^{n_2})$. Подгруппа B, полученная в результате этих преобразований, содержится в $T(\alpha_3)$. Кроме того, B не может иметь угол α_3, так как в противном случае $0121 \in \Phi([v, y^{n_2}])$ для элемента $v \in B$ с углом α_3. Следовательно, $B \subseteq U_2$. Если $u \neq 0$, то с точностью до U-сопряжения считаем, что $1110 \notin \Phi(y)$. Тогда $z = y^{n_1}$ имеет вид $z = x_{0011}(t) \mod U_3$, $t \neq 0$, и приходим к рассмотренному выше случаю.

Оставшиеся случаи, когда $p = \alpha_2$ или $p = \alpha_4$, сводятся к рассмотренным графовым автоморфизмом. $\rhd$

Лемма 9. *Большая абелева подгруппа группы U сопряжена в группе Шевалле либо с подгруппой из U_3, либо с подгруппой* (1), *либо с ее образом относительно графового автоморфизма.*

$\lhd$ Пусть A — большая абелева подгруппа, лежащая в U_2 и имеющая угол высоты 2.

Пусть A имеет угол 0011 (и, по лемме 6, лежит в $T(0011)$). Подгруппа $X_{1231}T(0122)$ централизует $T(0011)$, поэтому содержится в A. Так как множество $\{0011\}^+$ состоит из 14 корней, а абелево относительно 2 множество корней наибольшего порядка содержит

11 корней, то 3 корня из $\{0011\}^+$ не лежат в $m(A)$, причем один из таких корней — это 1221.

Пусть $0121 \in m(A)$. Это означает, что в A найдется элемент вида

$$x = x_{0121}(t_1)x_{1121}(t_2)x_{1221}(t_3), \quad t_1 \neq 0,$$

причем, с точностью до U-сопряжений, можем считать, что $t_2 = t_3 = 0$. Тогда $x^{n_1n_2} = x_{1221}(t_1)$, т. е. $1221 \in m(A^{n_1n_2})$, причем $A^{n_1n_2} \subseteq T(0011)$. Но $\{0011, 1221\}$ не является абелевым относительно 2 множеством корней, поэтому $0011 \notin m(A^{n_1n_2})$ и, следовательно, $A^{n_1n_2} \subseteq U_3$. Аналогично получаем, что если $1121 \in m(A)$, то $A^{n_2} \subseteq U_3$.

Пусть теперь $0121, 1121 \notin m(A)$. Тогда

$$m(A) = \{0011, 0111, 1111, 0122, 1122, 1231, 1222, 1232, 1242, 1342, 2342\}.$$

Так как $1111 \in m(A)$, то в A содержится хотя бы один элемент вида

$$x = x_{1111}(t_1)x_{0121}(t_2)x_{1121}(t_3)x_{1221}(t_4), \quad t_1 \neq 0. \tag{7}$$

Пусть в A найдется $x' \neq x$ с условием $m(x') = 1111$, т. е.

$$x' = x_{1111}(t_1')x_{0121}(t_2')x_{1121}(t_3')x_{1221}(t_4'), \quad t_1' \neq 0.$$

Так как $1 = [x, x'] = x_{1232}(t_1t_2' + t_2t_1')$, то $t_1t_2' + t_2t_1' = 0$, т. е. элементы (7) имеют вид

$$x = x_{1111}(t_1)x_{0121}(at_1)x_{1121}(t_3)x_{1221}(t_4), \quad t_1 \neq 0, \tag{8}$$

для некоторого $a \in K$. Далее, так как $0111 \in m(A)$, то в A содержится элемент вида

$$y = x_{0111}(u_1)x_{1111}(u_2)x_{0121}(u_3)x_{1121}(u_4)x_{1221}(u_5), \quad u_1 \neq 0. \tag{9}$$

Пусть в A найдется $y' \neq y$ с условием $m(y') = 0111$, т. е.

$$y' = x_{0111}(u_1')x_{1111}(u_2')x_{0121}(u_3')x_{1121}(u_4')x_{1221}(u_5'), \quad u_1' \neq 0.$$

Так как $1 = [y, y'] = x_{1232}(u_1u_4' + u_2u_3' + u_3u_2' + u_4u_1')$, то

$$u_1u_4' + u_2u_3' + u_3u_2' + u_4u_1' = 0. \tag{10}$$

В частности, $1 = [y, yx]$ и тогда соотношение (10) дает равенство $u_1(u_4 + t_3) + u_2(u_3 + at_1) + u_3(u_2 + t_1) + u_4u_1 = 0$, откуда

$$u_1t_3 + au_2t_1 + u_3t_1 = 0. \tag{11}$$

С точностью до U-сопряжения можем выбрать элемент x такой, у которого $t_3 = 0$. Тогда из равенства (11) имеем $au_2t_1 + u_3t_1 = 0$, откуда $u_3 = au_2$ и элементы (9) имеют вид

$$y = x_{0111}(u_1)x_{1111}(u_2)x_{0121}(au_2)x_{1121}(u_4)x_{1221}(u_5), \quad u_1 \neq 0. \tag{12}$$

Применяя соотношение (10) для произвольных элементов вида (12), получаем $u_1u_4' + u_4u_1' = 0$, следовательно, элементы (12) имеют вид

$$y = x_{0111}(u_1)x_{1111}(u_2)x_{0121}(au_2)x_{1121}(bu_1)x_{1221}(u_5), \quad u_1 \neq 0, \tag{13}$$

для некоторого $b \in K$. Ясно, что t_1 у элементов вида (7) пробегает все поле K, иначе $|A| < q^{11}$. Умножим каждый элемент вида (13) на подходящий элемент вида (8) с $t_1 = u_2$, преобразуя его к виду

$$y = x_{0111}(u_1)x_{1121}(bu_1)x_{1221}(u_5), \quad u_1 \neq 0. \tag{14}$$

Применив теперь соотношение (11) для элемента (14) и произвольного элемента (8), получим $u_1 t_3 = 0$, откуда $t_3 = 0$. Таким образом, элементы (8) запишутся в виде

$$x = x_{1111}(t_1)x_{0121}(at_1)x_{1221}(t_4), \quad t_1 \neq 0. \tag{15}$$

Наконец, так как $0011 \in m(A)$, то в A содержится элемент вида

$$z = x_{0011}(v_1)x_{0111}(v_2)x_{1111}(v_3)x_{0121}(v_4)x_{1121}(v_5)x_{1221}(v_6), \quad v_1 \neq 0. \tag{16}$$

Пусть в A найдется $z' \neq z$ с условием $m(z') = 0011$, т. е. вида

$$z' = x_{0011}(v_1')x_{0111}(v_2')x_{1111}(v_3')x_{0121}(v_4')x_{1121}(v_5')x_{1221}(v_6'), \quad v_1' \neq 0.$$

Так как $1 = [z, z'] = x_{1232}(v_1v_6' + v_2v_5' + v_3v_4' + v_4v_3' + v_5v_2' + v_6v_1')$, то

$$v_1v_6' + v_2v_5' + v_3v_4' + v_4v_3' + v_5v_2' + v_6v_1' = 0. \tag{17}$$

В частности, $[z, zx] = 1$ для x вида (15), и тогда соотношение (17) дает равенство $v_1(v_6 + t_4) + v_2v_5 + v_3(v_4 + at_1) + v_4(v_3 + t_1) + v_5v_2 + v_6v_1 = 0$ или

$$v_1t_4 + av_3t_1 + v_4t_1 = 0. \tag{18}$$

С точностью до U-сопряжения, можем выбрать элемент (15) такой, что $t_4 = 0$, и тогда получим $av_3t_1 + v_4t_1 = 0$, откуда $v_4 = av_3$ для произвольного элемента вида (16). Таким образом, элементы (16) запишутся в виде

$$z = x_{0011}(v_1)x_{0111}(v_2)x_{1111}(v_3)x_{0121}(av_3)x_{1121}(v_5)x_{1221}(v_6), \quad v_1 \neq 0. \tag{19}$$

Применив теперь соотношение (18) для произвольного элемента x вида (15) и произвольного элемента (19), получим $v_1t_4 = 0$, откуда $t_4 = 0$ и элементы (15) принимают вид

$$x = x_{1111}(t_1)x_{0121}(at_1), \quad t_1 \neq 0. \tag{20}$$

Умножая каждый элемент вида (19) на подходящий элемент (20), преобразуем их к виду

$$z = x_{0011}(v_1)x_{0111}(v_2)x_{1121}(v_5)x_{1221}(v_6), \quad v_1 \neq 0. \tag{21}$$

Так как $1 = [y, z] = x_{1232}(v_1u_5 + bv_2u_1 + v_5u_1)$ для y вида (14) и z вида (21), то

$$v_1u_5 + bv_2u_1 + v_5u_1 = 0. \tag{22}$$

С точностью до U-сопряжения, можем выбрать элемент (14) такой, у которого $u_5 = 0$. Тогда из (22) имеем $v_5 = bv_2$ для произвольного элемента вида (21). Таким образом, элементы (21) можно переписать в виде

$$z = x_{0011}(v_1)x_{0111}(v_2)x_{1121}(bv_2)x_{1221}(v_6), \quad v_1 \neq 0. \tag{23}$$

Применяя теперь (22) для элемента (23) и произвольного элемента (14), получаем $v_1u_5 = 0$, откуда $u_5 = 0$. Таким образом, элементы вида (14) преобразуются к виду

$$y = x_{0111}(u_1)x_{1121}(bu_1), \quad u_1 \neq 0. \tag{24}$$

Умножая каждый элемент (23) на подходящий элемент (24), преобразуем его к виду

$$z = x_{0011}(v_1)x_{1221}(v_6), \quad v_1 \neq 0. \tag{25}$$

Наконец, применяя соотношение (17) для элементов вида (25), получаем $v_1v_6' + v_6v_1' = 0$, и тогда элементы (25) принимают вид

$$z = x_{0011}(v_1)x_{1221}(cv_1), \quad v_1 \neq 0,$$

для некоторого $c \in K$.

Таким образом, с точностью до U-сопряжений, подгруппа A совпадает с подгруппой (1). Случай, когда A имеет угол 1100, сводится к рассмотренному графовым автоморфизмом.

Рассмотрим оставшийся случай, когда A имеет угол 0110. Тогда $A \subseteq T(0110)$ и $0110 \in m(A)$. Из 18 корней, входящих в $\{0110\}^+$, корни 1111, 1121 и 1122 не могут входить в $m(A)$. Кроме того, из каждой пары корней (1110, 0111) и (0120, 1222) только один может входить в $m(A)$. А так как множество $m(A)$ содержит 11 корней, то оно должно содержать хотя бы один из корней 1120, 0121 или 0122. Если $m(x) = 0121$ или $m(x) = 0122$ для $x \in A$, то с точностью до U-сопряжения, $m(x^{n_1}) = 1121$ или $m(x^{n_1}) = 1122$ соответственно. Следовательно, $0110 \notin m(A^{n_1})$. Кроме того, $A^{n_1} \subseteq T(0110)$, поэтому $A^{n_1} \subseteq U_3$. Пусть теперь $m(x) = 1120$. Тогда $0122 \notin m(A)$ и, следовательно, $1220 \in m(A)$. В этом случае несложно показать, что подгруппа A с точностью до U-сопряжения содержит элемент x вида $x_{1220}(t)x_{1221}(u)$, $t \neq 0$. Подгруппа X_{1221} централизует A, поэтому содержится в A и можем считать, что $u = 0$. Таким образом, $X_{1220} \subseteq A$ и $X_{1220}^{n_4} = X_{1222} \subseteq A^{n_4}$. Следовательно, $1120 \notin m(A^{n_4})$ и приходим к одному из рассмотренных выше случаев. $\triangleright$

Лемма 10. *Подгруппа* (1) *не сопряжена ни с какой подгруппой из* U_3.

$\triangleleft$ Предположим, что подгруппа A вида (1) сопряжена в группе Шевалле $\Phi(K)$ с некоторой подгруппой из U_3, т. е. $gAg^{-1} \subseteq U_3$ для некоторого $g \in \Phi(K)$. Пусть B — подгруппа Бореля группы $\Phi(K)$, N — мономиальная подгруппа и n_w — фиксированный (произвольно) прообраз в N элемента w группы Вейля W при естественном гомоморфизме $N \mapsto W$. Известно [10], что

$$g = bn_wu, \quad b \in B, \ u \in U_w^- = \langle X_r \mid r \in \Phi^+, \ \omega(r) \in \Phi^- \rangle,$$

причем элементы b, w, u определены однозначно. Тогда $(bn_wu)A(bn_wu)^{-1} \subseteq U_3$ или $n_w(uAu^{-1})n_w^{-1} \subseteq U_3$. Обозначим $\Phi(A) = \cup_{x \in A}\Phi(x)$. Из последнего соотношения имеем $ht(w(r)) \geqslant 3$ для всех r из $\Phi(uAu^{-1}) \supseteq m(uAu^{-1})$, причем, как показано в [2], $m(uAu^{-1}) = m(A)$. Кроме того, из включения $A \subseteq U_2$ и из коммутаторной формулы Шевалле очевидно, что $ht(r) \geqslant 2$ для всех $r \in \Phi(uAu^{-1})$. Пусть r — короткий корень из $m(A)$. Тогда $w(r)$ — короткий корень высоты $\geqslant 3$, т. е. $w(r)$ совпадает с одним из корней множества $S = \{1110, 0111, 1111, 0121, 1121, 1221, 1231, 1232\}$. Для коротких корней $0011, 0111, 1111, 1231 \in m(A)$ суммы $w(0011) + w(0111) = w(0122)$, $w(0011) + w(1111) = w(1122)$, $w(0011) + w(1231) = w(1242)$ — длинные корни. Это означает, что $s + s_1$, $s + s_2$, $s + s_3$ — длинные корни для некоторых $s, s_1, s_2, s_3 \in S$. Но, как легко убедиться непосредственной проверкой, множество $(s + S) \cap \Phi^+$ для каждого

$s \in S$ содержит < 3 длинных корней. Таким образом, требуемый элемент w не существует, и предположение о том, что подгруппа A сопряжена с некоторой подгруппой из U_3 неверно. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство основной теоремы. По лемме 9 достаточно рассмотреть произвольную большую абелеву подгруппу A группы U, лежащую в U_3 и имеющую угол высоты 3.

В случае, когда A имеет угол 0111, легко показать, что A совпадает с одной из подгрупп $\{x_{0111}(t)x_{1121}(ct) \mid t \in K\}X_{0121}X_{0122}U_6$, $c \in K$, или

$$\big\{x_{0111}(t)x_{1121}(ct)|t \in K\big\}\big\{x_{1111}(t)x_{0121}(dt)|t \in K\big\}X_{0122}U_6, \quad c, d \in K. \tag{26}$$

В первом случае $A^{n_1} \subseteq U_4$. Во втором случае A^{n_3} совпадает со второй из подгрупп (2) при $d = 0$. Случай $c = 0$, $d \neq 0$ сводим к предыдущему n_1-сопряжением. Если $c, d \neq 0$, то

$$A^{x_{\alpha_1}(\sqrt{\frac{c}{d}})x_{\alpha_3}(\sqrt{cd})} = X_{0111}\{x_{1111}(t)x_{0121}(dt) \mid t \in K\}X_{0122}U_6,\ d \in K,$$

и приходим к случаю $c = 0$.

Пусть подгруппа A имеет угол 0120 и по лемме 7 содержится в $T(1110)T(0120)$. Если 0120 — единственный угол высоты 3, то можно показать, что $A \supseteq X_{1220}$, откуда $A^{n_4} \supseteq X_{1222}$ и $0120 \notin \Phi(A^{n_4})$. Но $A^{n_4} \subseteq T(1110)T(0120)$, следовательно, $A^{n_4} \subseteq T(1110)U_4$. Пусть A имеет еще угол 1110. Если $0120 \in m(A)$, то

$$m(A) = \{1110, 0120, 1120, 1220, 1121, 1221, 1231, 1232, 1242, 1342, 2342\}$$

и подгруппа A содержит элемент

$$z = x_{1220}(v_1)x_{1111}(v_2)x_{0121}(v_3)x_{0122}(v_4)x_{1122}(v_5)x_{1222}(v_6), \quad v_1 \neq 0,$$

причем легко убедиться, что $v_2 = v_3 = v_4 = v_5 = v_6 = 0$. Таким образом, $A \supseteq X_{1220}$, откуда $A^{n_4} \supseteq X_{1222}$ и $0120 \notin \Phi(A^{n_4})$. Но $A^{n_4} \subseteq T(1110)T(0120)$, следовательно, $A^{n_4} \subseteq T(1110)U_4$. Если 0120 входит в $m(A)$, то подгруппа $X_{1121}X_{1221}T(1231)$ централизует A и поэтому содержится в A. Пусть x — элемент из A вида

$$x = x_{1110}(t_1)x_{0120}(t_2)x_{1120}(t_3)x_{1111}(t_4)x_{0121}(t_5)x_{1220}(t_6)x_{0122}(t_7)x_{1122}(t_8)x_{1222}(t_9),$$

где $t_1 \neq 0$. Множество $\{1110, 1121, 1221\} \cup \{1231\}^+$ содержит 8 корней, поэтому в $m(A)$ должны входить ровно 3 корня из множества $\{1120,\ 1111,\ 1220,\ 1122,\ 1222\}$. Корень 1222 не может входить в $m(A)$, так как в противном случае $X_{1222} \subseteq A$ и $0120 \notin \Phi(A)$, что противоречит тому, что 0120 — угол A. Пусть $1122 \in m(A)$. Тогда A содержит элемент вида $y = x_{1122}(u_1)x_{1222}(u_2)$, $u_1 \neq 0$. Для элемента вида x такого, что $t_2 \neq 0$, имеем $1 \neq [x, y] = x_{1242}(t_2u_1) \mod U_{10}$. Следовательно, корень 1122 также не может принадлежать $m(A)$, и тогда в $m(A)$ должны входить корни 1120, 1111, 1220. Тогда A содержит элемент

$$z = x_{1111}(w_1)x_{0121}(w_2)x_{0122}(w_3)x_{1122}(w_4)x_{1222}(w_5), \quad w_1 \neq 0.$$

Для элемента x такого, что $t_1, t_2 \neq 0$, имеем

$$1 = [x, z] = x_{1231}(t_1w_2 + t_2w_1)x_{1232}(t_1w_3 + t_5w_1)x_{1242}(t_2w_4)x_{1342}(t_2w_5)x_{2342}(t_1^2w_3 + t_2w_1^2).$$

С точностью до U-сопряжения, можем выбрать x так, что $t_5 = 0$, тогда $w_3 = 0$ и $t_2w_1^2 = 0$, что невозможно.

Остается случай, когда 1110 — единственный угол подгруппы A высоты 3. По лемме 7, имеем $A \subseteq T(1110)T(0122)$. Множество $\{1110\}^+ \cup \{0122\}^+$ содержит 14 корней, поэтому 3 корня этого множества не входят в $m(A)$, причем один из них — это корень 0122. Кроме того, подгруппа $X_{1111}X_{1121}X_{1221}T(1231)$ централизует A, поэтому, содержится в A и $m(A)$ содержит соответствующие корни. Множества корней $\{1120, 1222\}$ и $\{1220, 1122\}$ не являются абелевыми относительно 2, поэтому ровно один корень из каждого множества должен входить в $m(A)$. Возможны 4 случая: а) $1120, 1220 \in m(A)$, б) $1120, 1122 \in m(A)$, в) $1220, 1222 \in m(A)$, г) $1122, 1222 \in m(A)$. В случаях а), б), в) подгруппа A, соответственно, совпадает с одной из подгрупп:

$$X_{1110}X_{1111}X_{1121}X_{1221}T(1231)\big\langle x_{1120}(t)x_{1222}(ct) \mid t \in K\big\rangle\big\langle x_{1220}(t)x_{1122}(dt) \mid t \in K\big\rangle,$$

где $c, d \in K$;

$$X_{1110}X_{1111}X_{1121}X_{1221}X_{1122}T(1231)\big\langle x_{1120}(t)x_{1222}(ct) \mid t \in K\big\rangle, \quad c \in K;$$

$$X_{1110}X_{1111}X_{1121}X_{1221}X_{1222}T(1231)\big\langle x_{1220}(t)x_{1122}(ct) \mid t \in K\big\rangle, \quad c \in K,$$

которые по аналогии с подгруппой (26) (с помощью графового автоморфизма) U-сопряжением сводим к нормальной подгруппе (3). В случае г) подгруппа A совпадает с подгруппой (4).

Пусть, наконец, $A \subseteq U_4$. Тогда легко показать, что A совпадает с одной из подгрупп (2) или (5). Осталось заметить, что случай $A \subseteq U_5$ невозможен, так как $|U_5| = |K|^{11}$, но U_5 не является абелевой подгруппой. $\triangleright$

Литература

1. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли (главы IV–VI).—М.: Мир, 1972.—336 с.
2. *Вдовин Е. П.* Большие абелевы унипотентные подгруппы конечных групп Шевалле // Алгебра и логика.—2001.—Т. 40, № 5.—С. 523–544.
3. *Кондратьев А. С.* Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук.—1986.—Т. 41, № 1(247).—С. 57–96.
4. *Левчук В. М.* Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп лиева типа малых рангов // Алгебра и логика.—1990.—Т. 29, № 2.—С. 141–161.
5. *Левчук В. М., Сулейманова Г. С.* Нормальное строение унипотентной подгруппы группы лиева типа и смежные вопросы // Докл. РАН.—2008.—Т. 419, № 5.—С. 595–598.
6. *Левчук В. М., Сулейманова Г. С.* Автоморфизмы и нормальное строение унипотентных подгрупп финитарных групп Шевалле // Тр. Института математики и механики.—2009.—Т. 15, № 2.—С. 133–142.
7. *Мальцев А. И.* Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1945.—Т. 9, № 4.—С. 291–300.
8. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле.— М.: Мир, 1975.—262 с.
9. *Сулейманова Г. С.* О сопряженности в группе Шевалле больших абелевых подгрупп унипотентной подгруппы // Фундаментальная и прикладная математика.—2009.—Т. 15, № 7.—С. 205–216.
10. *Carter R.* Simple groups of Lie type.—New York: Wiley and Sons, 1972.
11. *Gupta C. K., Levchuk V. M., Ushakov Yu. Yu.* Hypercentral and monic automorphisms of classical algebras, rings and groups // J. Siberian Federal Univ. Mathematics & Physics.—2008.—Vol. 1, № 4.—P. 280–290.
12. *Levchuk V. M., Suleymanova G. S., Voitenko T. Yu.* Some questions for the unipotent subgroup of the Chevalley group // Тезисы докл. междунар. конф. «Алгебра и ее приложения».—Красноярск: СФУ, 2007.—С. 168–169.

Статья поступила 25 марта 2011 г.

Сулейманова Галина Сафиуллановна
Сибирский федеральный университет,
старший научный сотрудник
РОССИЯ, 660041, Красноярск, пр. Свободы, 79;
Хакасский технический институт,
доцент кафедры математики и естественнонаучных дисциплин
РОССИЯ, 665017, Абакан, ул. Щетинкина, 27
E-mail: `suleymanova@list.ru`

CONJUGACY CLASSES OF LARGE ABELIAN SUBGROUPS IN THE UNIPOTENT SUBGROUP OF A CHEVALLEY GROUP OF TYPE F_4

Suleimanova G. S.

The description of large abelian subgroups in the unipotent subgroup of the Chevalley group over a finite field of type F_4 is completed.

Key words: Chevalley group, unipotent subgroup, large abelian subgroup.