Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 2, С. 56–62

УДК **517.956**

О КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ВЕСОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Ш. С. Хубежты, Л. Ю. Плиева, З. В. Бесаева

Рассматриваются сингулярные интегралы с весовыми функциями. Строятся квадратурные формулы для сингулярных интегралов. Доказываются новые формулы обращения, аналогичные формулам для сингулярных интегралов с Чебышевскими многочленами. Указываются применения построенных квадратурных формул к численному решению сингулярных интегральных уравнений.

Ключевые слова: сингулярный интеграл, формулы обращения, квадратурные формулы.

Рассмотрим сингулярный интеграл с весовой функцией

$$S(\varphi, x) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} p(t)\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt, \quad x \in (-1,1), \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ — плотность, удовлетворяющая условию Гёльдера [4], а $p(t) = (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$ $(\alpha, \beta > -1)$ — весовая функция. Как известно (см. [1, 2, 5]), многочлены Якоби

$$P_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\Big[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\Big] \tag{2}$$

являются ортогональными с весом $p(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ на отрезке $[-1,1]$.

Кроме сингулярного интеграла (1) рассмотрим несобственный интеграл

$$I(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} p(x)f(x)\,dx. \tag{3}$$

Для таких интегралов построены квадратурные формулы (см. [1, 2]) наивысшей алгебраической степени точности вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} p(x)f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f), \tag{4}$$

где в роли узлов x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ используются нули многочлена Якоби, коэффициенты A_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ вычисляются по формуле

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} p(x)\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{(x-x_k)P_n'^{(\alpha,\beta)}(x_k)}\,dx.$$

В классических работах [3, 4] для $p(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ рассматриваются случаи $\left(\alpha = -\frac{1}{2},\ \beta = \frac{1}{2}\right)$, $\left(\alpha = -\frac{1}{2},\ \beta = -\frac{1}{2}\right)$, $(\alpha = 0,\ \beta = 0)$, $\left(\alpha = \frac{1}{2},\ \beta = -\frac{1}{2}\right)$. Они встречаются чаще всего на практике. Для последнего случая $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ [1] получена квадратурная формула

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}f(x)\,dx = \frac{4}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}f(x_k) + R_n(f), \tag{5}$$

где $R_n(f) = \frac{1}{2^{2n}(2n)!}f^{(2n)}(\eta)$, $-1 < \eta < 1$; $x_k = \cos\frac{2k\pi}{2n+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — корни ортогонального многочлена;

$$P_n^{(0,5;-0,5)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\arccos x\right)}{\sin\frac{\arccos x}{2}}.$$

Для случая $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, т. е. для интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}f(x)\,dx, \tag{6}$$

таких формул нет, но рекомендована подстановка [2] $x = -t$, после чего интеграл сводится к виду

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}f(-x)\,dx, \tag{7}$$

который можно вычислять по формуле (5).

Далее мы решаем задачу: построить для интеграла (6) квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности.

Сперва построим ортогональные многочлены на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией $p(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Этот многочлен обозначим через $P_n^{(-0,5;0,5)}(x)$, тогда для любого многочлена $Q(x)$ степени меньше n должно быть выполнено условие ортогональности

$$\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}P_n^{(-0,5;0,5)}(x)Q(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1}(1+x)P_n^{(-0,5;0,5)}(x)Q(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Рассмотрим многочлен $S(x) = (1+x)P_n^{(-0,5;0,5)}(x)$. Степень его равна $(n+1)$ и он ортогонален на $[-1, 1]$ с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ всякому многочлену $Q(x)$ степени меньше n. Если его разложить по многочленам Чебышева первого рода $T_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то в разложении, ввиду указанной ортогональности, должны обратиться в нуль все коэффициенты при многочленах $T_k(x)$ до степени $n-1$ включительно и разложение должно иметь форму $S(x) = C_nT_n(x) + C_{n+1}T_{n+1}(x)$. Кроме того, так как $S(x)$ должно нацело делиться на $1+x$, при $x = -1$ должно быть $S(-1) = C_nT_n(-1) + C_{n+1}T_{n+1}(-1) = (-1)^n(C_n - C_{n+1}) = 0$. Поэтому $C_{n+1} = C_n$ и

$$P_n^{(-0,5;0,5)}(x) = C_n\frac{T_{n+1}(x) + T_n(x)}{x+1}.$$

Из свойств старших коэффициентов ортогональных многочленов имеем

$$C_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Если положить $x = \cos\vartheta$ и воспользоваться тем, что $T_k(x) = \cos(k \arccos x) = \cos k\vartheta$, то для изучаемого полинома Якоби получаем

$$P_n^{(-0,5;0,5)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\cos\frac{2n+1}{2}\vartheta}{\cos\frac{\vartheta}{2}}. \tag{8}$$

Корни его есть

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Используя многочлены (8), получим следующую квадратурную формулу наивысшей алгебраической степени точности [10]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} f(x)\,dx = \frac{4}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(\frac{2k-1}{2(2n+1)}\pi\right) f(x_k) + R_n(f), \tag{9}$$

где

$$R_n(f) = \frac{1}{2^{2n}(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad -1 < \xi < 1.$$

Введем обозначения

$$S_n(x) = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\vartheta}{\sin\frac{\vartheta}{2}}, \quad C_n(x) = \frac{\cos\frac{2n+1}{2}\vartheta}{\cos\frac{\vartheta}{2}}, \tag{10}$$

где $\vartheta = \arccos x$. Ниже приводятся конкретные многочлены

$C_0(x) = 1;$

$C_1(x) = 2x - 1;$

$C_2(x) = 4x^2 - 2x - 1;$

$C_3(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1;$

$C_4(x) = 16x^4 - 8x^2 - 12x^2 + 4x + 1;$

$C_5(x) = 32x^5 - 16x^4 - 32x^3 + 12x^2 + 6x - 1;$

....

....

$S_0(x) = 1;$

$S_1(x) = 2x + 1;$

$S_2(x) = 4x^2 + 2x - 1;$

$S_3(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1;$

$S_4(x) = 16x^4 + 8x^2 - 12x^2 - 4x + 1;$

$S_5(x) = 32x^5 + 16x^4 - 32x^3 - 12x^2 + 6x + 1;$

....

....

В классических работах (см. [3, 4, 7]) широко используются следующие формулы обращения:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t)}{t-x}\,dt = U_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots, \\ &\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\frac{U_n(t)}{t-x}dt = -T_{n+1}(x), \quad n = 0, 1, \ldots, \end{aligned} \tag{11}$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ — ортогональные многочлены Чебышева I-го и II-го рода [5].

Нами доказана следующая

Теорема. *Для многочленов* $S_n(x)$ *и* $C_n(x)$ *справедливы следующие формулы обращения*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{C_n(t)}{t-x}\,dt = S_n(x), \tag{12}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\frac{S_n(t)}{t-x}\,dt = -C_n(x) \quad (-1<x<1,\ n=0,1,2,\ldots).$$

$\lhd$ Применим упомянутое выше представление

$$C_n(x) = \frac{T_n(x)+T_{n+1}(x)}{1+x},$$

получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{1}{t-x}\frac{T_n(t)+T_{n+1}(t)}{1+t}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{T_n(t)+T_{n+1}(t)}{t-x}\,dt.$$

Отсюда, используя формулы (11), имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{C_n(t)}{t-x}\,dt = U_{n-1}(x)+U_n(x),$$

из которой после некоторого упрощения с учетом $x=\cos\theta$, получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{C_n(t)}{t-x}\,dt = \frac{\sin n\vartheta+\sin(n+1)\vartheta}{\sqrt{1-\cos^2\vartheta}} = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\arccos x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)} = S_n(x).$$

Аналогично из представления

$$S_n(x) = \frac{T_n(x)-T_{n+1}(x)}{1-x},$$

с учетом (11) получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\frac{S_n(x)}{t-x}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{T_n(t)-T_{n+1}(t)}{t-x}\,dt = U_{n-1}(x)-U_n(x)$$
$$= \frac{\sin n\vartheta-\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta} = -\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\vartheta}{\cos\frac{\vartheta}{2}} = -C_n(x).\ \rhd$$

Далее, для сингулярных интегралов с весовыми функциями $p(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ и $p(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ построены следующие квадратурные формулы:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\sqrt{1-x_k^2}}{x-x_k}$$
$$\times\cos\frac{2k-1}{2(2n+1)}\pi\big[C_n(x)+\mu_k(x)\big]\varphi(x_k)+R_n(\varphi;x), \tag{13}$$

где

$$\mu_k(x)=\sum_{\sigma=1}^{n}A_\sigma\frac{C_n(x)}{x-x_\sigma}-A_kC_n'(x_k),$$

$$x_k=\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi,\quad A_k=\frac{4}{2n+1}\cos^2\frac{2k-1}{2(2n+1)}\pi;$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\sqrt{1-x_k^2}}{x-x_k}\\ \times\sin\frac{k\pi}{2n+1}\big[-S_n(x)+\bar{\mu}_k(x)\big]\varphi(x_k)+R_n(\varphi;x),\end{aligned}\tag{14}$$

где

$$\bar{\mu}_k(x)=\sum_{\sigma=1}^{n}A_\sigma\frac{S_n(x)}{x-x_\sigma}-A_kS_n'(x_k),$$

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{2n+1},\quad A_k=\frac{4}{2n+1}\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}.$$

Дадим оценку погрешности полученных квадратурных формул.

Теорема. *Если плотность $\varphi(t)$ имеет производные до r-го порядка включительно $(r>1)$ и $\varphi^{(r)}(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера $H(\alpha)$ $(0<\alpha\leqslant1)$, то для квадратурных формул (13) и (14) справедлива оценка*

$$|S(\varphi,x)-S_n(\varphi,x)|\leqslant O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-1}}\right),$$

равномерная для всех $-1\leqslant x\leqslant1$, где $S_n(\varphi,x)$ — соответствующая квадратурная сумма.

$\lhd$ Пусть $\varphi(t)\in H_r(\alpha)$. Тогда

$$\begin{aligned}\varphi(t)=\varphi(x_k)+\frac{(t-x_k)}{1!}\varphi'(x_k)+\ldots+\frac{(t-x_k)^{r-1}}{(r-1)!}\varphi^{(r-1)}(x_k)\\ +\frac{(t-x_k)^r}{r!}\varphi^{(r)}(x_k)+\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{x_k}^{t}(t-u)^{r-1}\big(\varphi^{(r)}(u)-\varphi^{(r)}(x_k)\big)\,du.\end{aligned}$$

Отсюда для остатка квадратурных формул (13) и (14) получаем

$$R(\varphi,x)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{p(t)}{t-x}\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{x_k}^{t}(t-u)^{r-1}\big(\varphi^{(r)}(u)-\varphi^{(r)}(x_k)\big)\,du\,dt,$$

где $x_0=-1$, $x_{n+1}=1$ и $|\varphi^{(r)}(u)-\varphi^{(r)}(x_k)|\leqslant A|u-x_k|^\alpha$. А это при $p(t)=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ или $p(t)=\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ дает оценку

$$|R(\varphi,x)|\leqslant O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-1}}\right).\ \rhd$$

Формулы (5), (9), (13) и (14) могут быть успешно применены к численному решению задач плоской теории упругости. Например, задача о трещинах сводится к интегральному уравнению вида [6]:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}K(x,t)\varphi(t)\,dt=f(x),\quad x\in(-1,1),\tag{15}$$

где неизвестная функция $\varphi(t)$ ищется в виде

$$\varphi(t)=\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\varphi_0(t),\quad \varphi(t)=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\varphi_0(t),$$

или

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\varphi_0(t),\quad \varphi(t)=\sqrt{1-t^2}\,\varphi_0(t).$$

В первом случае сингулярное интегральное уравнения (15) примет вид

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{\varphi_0(t)}{t-x}\,dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}K(x,t)\,\varphi_0(t)\,dt=f(x),\quad x\in(-1,1).\tag{16}$$

Используя квадратурные формулы (9) и (13) для (16), получим дискретное уравнение

$$\begin{gathered}\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\sqrt{1-x_k^2}}{x-x_k}\cos\Big(\frac{2k-1}{2(2n+1)}\pi\Big)[C_n(x)+\mu_k(x)]\varphi_0(x_k)\\+\frac{4}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\Big(\frac{2k-1}{2(2n+1)}\pi\Big)K(x,x_k)\,\varphi_0(x_k)=f(x).\end{gathered}\tag{17}$$

Придавая параметру x последовательно значения $x_1,x_2,\ldots,x_n$, $x_k=\cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi$, получим систему линейных алгебраических уравнений порядка $n\times n$ относительно неизвестных $\varphi_0(x_1),\varphi_0(x_2),\ldots,\varphi_0(x_n)$.

Кроме решения уравнения (15) обычно требуется еще вычислить компоненты напряжений и смещений. Они выражаются с помощью интегралов типа Коши

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}p(t)\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt,\quad z\notin[-1;1].$$

Следовательно нужно вычислить интегралы типа Коши с весовыми функциями $p(t)=\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$, $p(t)=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$. Для указанных интегралов от ортогональных многочленов $S_n(x)$ и $C_n(x)$ получены следующие формулы [9]

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{C_n(t)}{t-z}dt=\frac{i(z-\sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}}(1+z-\sqrt{z^2-1}),$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\frac{S_n(t)}{t-z}\,dt=\frac{i(z-\sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}}(1+z+\sqrt{z^2-1}),$$

где под $\sqrt{z^2-1}$ подразумевается фиксированная ветвь, однозначная в плоскости с разрезом вдоль отрезка $[-1,1]$ действительной оси и принимающая на $(1,\infty)$ действительные значения.

Литература

1. *Крылов В. И.* Приближенные вычисления интегралов.—М.: Наука, 1967.—500 с.
2. *Крылов В. И., Шульгин Л. Т.* Справочная книга по численному интегрированию.—М.: Наука, 1966.—370 с.
3. *Иванов В. В.* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений.—Киев: Наукова думка, 1968.—288 с.
4. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.—М.: ТОО Янус, 1995.—520 с.
5. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.—М.: Наука, 1983.—384 с.
6. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацыщин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.—Киев: Наукова думка, 1976.—444 с.
7. *Ахиезер Н. И.* О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов // Изв. АН СССР. Математика.—1945.—Т. 9.—С. 275–290.
8. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены.—М.: Физматгиз, 1962.—500 с.
9. *Пыхтеев Г. Н.* Точные методы вычисления интегралов типа Коши.—Новосибирск: Наука, 1980.—120 с.
10. *Плиева Л. Ю., Бесаева З. В.* Об одной квадратурной формуле и некоторе ее применение // Тр. междунар. симпозиума (МДОЗМФ-2009).—Харьков–Херсон, 2009.—С. 141–144.

Статья поступила 14 февраля 2011 г.

Хубежты Шалва Соломонович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
заведующий лаб. математического моделирования
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: shalva57@rambler.ru

Плиева Любовь Юрьевна
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
младший научный сотрудник
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: plieva-21@mail.ru

Бесаева Зарина Вячеславовна
Юго-Осетинский государственный университет им. А. А. Тибилова,
преподаватель
ЮЖНАЯ ОСЕТИЯ, 383570, Цхинвал, Московская, 8
E-mail: besaeva-354@mail.ru

QUADRATURE FORMULAS FOR SINGULAR INTEGRALS WITH WEIGHT FUNCTIONS

Khubezhty Sh. S., Plieva L. Yu., Besaeva Z. V.

We study singular integrals with weight functions and construct quadrature formulas for such integrals. Inversion formulas similar to the formulas for singular integrals with Chebyshev polynomials are proved. Application of obtained quadrature formulas to the numerical solution of singular integral equations are pointed out.

Key words: singular integral, inversion formulas, quadrature formulas.