Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 2, С. 63–66

УДК **517.11**

КОЛЬЦО, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЕ СТРУКТУРУ НАДГРУПП НЕРАСЩЕПИМОГО МАКСИМАЛЬНОГО ТОРА

А. В. Шилов

Исследуются сети и сетевые кольца, ассоциированные с надгруппами нерасщепимого максимального тора, связанного с радикальным расширением основного поля.

Ключевые слова: промежуточные подгруппы, нерасщепимый максимальный тор, сети, сетевые группы, элементарная группа, трансвекция.

Работа посвящена исследованию сети и сетевого кольца [1–3], ассоциированной с надгруппой нерасщепимого тора, связанного с радикальным расширением основного поля.

Пусть $x^n - d$ — неприводимый многочлен степени n над полем k, $d \in k$. Тогда $e_i = \theta^{i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, образует базис радикального расширения $K = k(\sqrt[n]{d})$, $\theta = \sqrt[n]{d}$ поля $K = k(\theta)$ над k. Мы рассматриваем нерасщепимый максимальный тор $T = T(d)$, который является образом мультипликативной группы поля $K = k(\sqrt[n]{d})$ при регулярном вложении в $G = GL(n,k)$.

С каждым вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in k^n \setminus \bar{0}$ связана невырожденная матрица $C(x)$, элементы которой вычисляются по формулам

$$\Big(C(x)\Big)_{ij} = \begin{cases} x_{i+1-j}, & j \leqslant i; \\ dx_{n+i+1-j}, & j \geqslant i+1. \end{cases}$$

В выбранном базисе тор $T = T(d)$ определяется как матричная группа

$$T = T(d) = \{C(x) : x \in k^n \setminus \bar{0}\}.$$

С каждой матрицей $C = C(x) = (c_{ij})$ связана обратная матрица $C^{-1} = C(y) = (c'_{ij}), y = (y_1, \ldots, y_n) \in k^n$, где $y_i = \frac{C_{1i}}{|C(x)|}$, причем C_{1i} — алгебраическое дополнение элемента c_{1i} матрицы $C = C(x)$.

В работе рассматривается унитальное подкольцо $R_0 = R(d)$ поля k, порожденное элементами $x_i y_j$, $dx_r y_s$:

$$R_0 = R(d) = \Big\langle x_i y_j, dx_r y_s : i + j \leqslant n+1,\ r+s > n+1,\ x \in k^n \setminus \bar{0} \Big\rangle.$$

Пусть R — унитальное подкольцо поля $k, d \in R$. Пусть, далее, $A_1, \ldots, A_n$ — идеалы кольца R, причем

$$A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n, \quad dA_n \subseteq A_1.$$

Через $\sigma = (\sigma_{ij}) = \sigma(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ мы обозначаем сеть идеалов, определенную следующим образом

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} A_{i+1-j}, & j \leqslant i; \\ dA_{n+i+1-j}, & j \geqslant i+1. \end{cases}$$

Сеть $\sigma = (\sigma_{ij}) = \sigma(A_1, A_2, \ldots,\ A_n)$ мы называем сетью, *ассоциированной с тором T*. Далее, $M(\sigma)$ — сетевое кольцо ($G(\sigma)$ — сетевая группа) [1]. Подгруппу $E(\sigma)$, порожденную всеми трансвекциями из $G(\sigma)$, мы называем *элементарной сетевой подгруппой*, соответствующей тору T.

Основным результатом статьи является следующая

Теорема 1. *Тор T нормализует сетевое кольцо $M(\sigma)$ для произвольной сети $\sigma = \sigma(A_1, A_2, \ldots,\ A_n)$, ассоциированной с тором, тогда и только тогда, когда $R_0 \subseteq R$.*

Квадратную матрицу $a = (a_{ij})$ порядка n назовем *матрицей сетевого вида*, если ее элементы удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} a_{rs} = a_{r+1,s+1}, \\ a_{rn} = d^{-1}a_{r+1,1}, \\ a_{ns} = da_{1,s+1}; s \end{cases} \qquad (\forall\, r, s < n).$$

Нетрудно видеть, что сумма и произведение матриц сетевого вида является матрицей сетевого вида.

Ясно, что матрица сетевого вида полностью определяется первым столбцом.

Пусть $1 \leqslant s \leqslant n$. Обозначим через (e_s) матрицу сетевого вида с первым столбцом $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$ в котором единица стоит на позиции s. Например, при $n = 5$, (e_3) выглядит следующим образом:

$$(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $x \in k$, M, N — подмножества поля k. Тогда положим $x \cdot M = \{x \cdot m : m \in M\}$ и $M + N = \{m + n : m \in M, n \in N\}$.

Далее, пусть $a \in M(n, k)$, $A = (A_{rs})$ — квадратная таблица порядка n, состоящая из подмножеств поля k, т. е. $A_{rs} \subseteq k$. Определим умножение $a * A$ следующим образом:

$$a * A = B, \quad B_{rs} = \sum_{k=1}^{n} a_{rk} \cdot A_{ks}.$$

Таким образом, $a * A$ — матрица, состоящая из подмножеств поля k. Аналогично определим $A * a$.

Пусть таблица $A = (A_{ij})$ состоит из подмножеств поля k. Тогда под $M(A)$ мы понимаем множество матриц, у которых на позиции (i, j) стоит элемент из A_{ij}:

$$M(A) = \{a \in M(n, k) : a_{ij} \in A_{ij}\}.$$

Квадратную таблицу $A = (A_{rs})$, состоящую из подмножеств поля k, называется *таблицей сетевого вида*, если выполняются условия:

$$\begin{cases} A_{rs} = A_{r+1,s+1}, \\ A_{rn} = d^{-1}A_{r+1,1}, \\ A_{ns} = dA_{1,s+1} \end{cases} \qquad (\forall\, r, s < n).$$

Предложение 1. *Пусть $a \in M(n,k)$, A — квадратная таблица порядка n, состоящая из подмножеств поля k. Тогда $aM(A) \subseteq M(a * A)$. Обратное включение не всегда верно. Далее, множество элементов, стоящих на позиции (r,s) во множестве матриц $aM(A)$, совпадает с множеством $(a * A)_{rs}$.*

Доказательство теоремы вытекает из следующих двух предложений.

Предложение 2. *$c(x)ac(y) \in M(\sigma)$, где $c(x) \in T$, $c(y) = c(x)^{-1}$, $a \in M(\sigma)$.*

$\lhd$ Если $a \in M(\sigma), c(x) \in T$, то $c(x)ac(y) \in M\big([c(x) * \sigma] * c(y)\big)$. Таким образом, достаточно показать, что $F = [c(x) * \sigma] * c(y)$ содержится в σ (т. е. множество, стоящее на позиции (r,s) матрицы F содержится во множестве σ_{rs}).

Так как матрицы $c(x)$, σ, $c(y)$ имеют сетевой вид, то их произведение F также имеет сетевой вид, поэтому включение достаточно показать для элементов первого столбца, т. е. $F_{s1} \subseteq \sigma_{s1} = A_s$. При этом F_{s1} есть произведение s-ой строки матрицы $c(x)$ на матрицу σ и на первый столбец матрицы $c(y)$ (т. е. $F_{s1} = c(x)_s \sigma c(y)^1$).

Рассмотрим случай $1 \leqslant s < n$:

$$\begin{aligned} F_{s1} &= c(x)_s \sigma c(y)^1 = (x_s, x_{s-1}, \ldots, x_1, dx_n, \ldots, dx_{s+1}) \sigma c(y)^1 \\ &= c(x)_s (e_{s+1})(e_{s+1})^{-1} A c(y)^1 = d(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1) B c(y)^1. \end{aligned}$$

Здесь $B = (e_{s+1})^{-1}A$ — матрица сетевого вида (как произведение матриц сетевого вида). Первый столбец матрицы B выглядит следующим образом:

$$(A_{s+1}, A_{s+2}, \ldots, A_n, d^{-1}A_1, d^{-1}A_2, \ldots, d^{-1}A_S)^T.$$

Обозначим через $B_1 = A_{s+1}$, $B_2 = A_{s+2}$, $\ldots$, $B_n = d^{-1}A_s$. Итак, матрица B является матрицей сетевого вида с первым столбцом: $(B_1, B_2, \ldots, B_n)^T$.

Далее, исходя из включений $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n$, $dA_n \subseteq A_1$, имеем: $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots \subseteq B_n$, $dB_n \subseteq B_1$.

Исходя из вышесказанного, получаем, что включение $F_{s1} \subseteq A_s$ равносильно включению:

$$(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1) B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \subseteq B_n.$$

При $s = n$ получаем аналогичное включение: $(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1) A c(y)^1 \subseteq A_n$ (т. е. при $s = n$ матрица B совпадает с матрицей A).

Итак, доказываем, что $(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1) B c(y)^1 \subseteq B_n$, т. е.

$$\sum_{k,r=1}^{n} x_{n+1-k} y_r B_{kr} \subseteq B_n.$$

Первый случай: $k \geqslant r$. Тогда $B_{kr} = B_j$ для некоторого номера j. Далее, сумма индексов $n+1-k+r \leqslant n+1$, поэтому $x_{n+1-k} y_r \in R$.

Второй случай: $k < r$. Тогда $B_{kr} = dB_i$ для некоторого номера i. Сумма индексов $n+1-k+r > n+1$, поэтому $dx_{n+1-k} y_r \in R$.

В обоих случаях получаем включение $rB_m \subseteq B_n$, $r \in R$, которое является верным. $\rhd$

Предложение 3. *Если тор T нормализует $M(\sigma)$ для любой сети σ, то $R_0 \subseteq R$.*

$\lhd$ Рассмотрим следующую сеть σ, для которой $\sigma_{ij} = A$ при $i \geqslant j$ и $\sigma_{ij} = dA$ при $i < j$.

Из условия получаем $c(x)M(\sigma)c(y) \subseteq M(\sigma)$ для любой матрицы $c(x) \in T$. Зафиксируем позицию (r,s). Рассмотрим таблицу $\sigma' = (\sigma'_{ij})$, где $\sigma'_{rs} = \sigma_{rs}$, остальные $\sigma'_{ij} = 0$. Ясно, что $M(\sigma') \subseteq M(\sigma)$ и $c(x)M(\sigma')c(y) \subseteq M(\sigma)$.

Согласно предложению 1 множество элементов, стоящих на позиции $(n,1)$ во множестве матриц $c(x)M(\sigma')c(y)$, совпадает с множеством

$$\Big[c(x)*\sigma'*c(y)\Big]_{n1}=x_{n+1-r}y_s\sigma_{rs}.$$

С другой стороны, множество элементов, стоящих на позиции $(n,1)$ во множестве $M(\sigma)$, есть множество $\sigma_{n1}=A$.

Таким образом, получаем, что $x_{n+1-r}\cdot y_s\cdot\sigma_{rs}\subseteq A$.

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $n+1-r+s\leqslant n+1$ (т. е. $r\geqslant s$). В этом случае $\sigma_{rs}=A$ и $x_{n+1-r}\cdot y_s\in R$.

Второй случай: $n+1-r+s>n+1$ (т. е. $r<s$). В этом случае $\sigma_{rs}=dA$ и $dx_{n+1-r}\cdot y_s\in R$.

Заменим $n+1-r=k$. Тогда получим, что при $k+s\leqslant n+1$, $x_ky_s\in R$. А при $k+s>n+1$, $dx_ky_s\in R$. Поэтому $R_0\subseteq R$. $\rhd$

Литература

1. *Боревич З. И.* Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц // Зап. науч. семинаров ПОМИ.—1976.—Т. 64.—С. 12–29.
2. *Боревич З. И., Койбаев В. А.* О кольцах множителей, связанных с промежуточными подгруппами, для квадратичных торов // Вестн. СПбГУ.—1993.—Т. 1, № 2.—С. 5–10.
3. *Койбаев В. А., Шилов А. В.* О подгруппах полной линейной группы, содержащих нерасщепимый максимальный тор // Зап. науч. семининаров ПОМИ.—2010.—Т. 375.—С. 130–138.

Статья поступила 27 февраля 2011 г.

Шилов Александр Валентинович
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова, *аспирант каф. алгебры и геометрии*
РОССИЯ, 362040, Владикавказ, ул. Ватутина, 46

A RING DETERMINING THE STRUCTURE OF OVERGROUPS OF A NON-SPLIT MAXIMAL TORUS

Shilov A. V.

We study nets and net rings associated with overgroups of a non-split maximal torus determined by with the radical extension of the main field.

Key words: intermediate subgroups, non-split maximal torus, nets, net groups, elementary group, transvection.