Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 3, С. 42–52

УДК **517.956**

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ПРОИЗВОДНЫЕ ПО ВРЕМЕНИ

Р. Ч. Кулаев

Рассматривается начально-краевая задача для параболического уравнения, заданного на геометрическом графе, с краевыми условиями содержащими производную по времени. Устанавливается теорема существования решения краевой задачи, дающая представление решения в виде контурного интеграла.

Ключевые слова: краевая задача на графе, метод контурного интеграла.

В настоящей работе рассматривается смешанная задача для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\,u = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\,\frac{\partial}{\partial x}\,u\right) + q(x)\,u + f(x,t), \quad (x,t)\in\Gamma\times[0,T]=\Gamma_T, \tag{1}$$

заданного на геометрическом графе Γ.

В каждой граничной вершине a графа Γ решение уравнения должно удовлетворять условию

$$\alpha(a)\,\frac{\partial}{\partial x}\,u(a,t) + \beta(a)\,\frac{\partial}{\partial t}\,u(a,t) + \delta(a)\,u(a,t) = 0, \quad a\in\partial\Gamma,\ t>0. \tag{2}$$

А в каждой внутренней вершине a на решение уравнения (1) накладываются условия непрерывности и одно условие согласования

$$\begin{gathered} u_k(a,t) - u_{k_0}(a,t) = 0, \quad k,k_0\in I(a), \\ \sum_{k\in I(a)} \alpha_k(a)\frac{\partial}{\partial x}\,u_k(a,t) + \beta_k(a)\frac{\partial}{\partial t}u_k(a,t) + \delta_k(a)u_k(a,t) = 0, \quad a\in V. \end{gathered} \tag{3}$$

В начальный момент времени $t=0$ ставится условие

$$u(x,0) = 0. \tag{4}$$

В уравнении (1) полагаем $p\in C^2[\Gamma]$, $\inf_{x\in\Gamma} p(x) > 0$, $q\in C[\Gamma]$, $f\in C^2[\Gamma]\cap C[\Gamma_T]$. В условиях (2), (3) $\{\alpha_k(a)\}_{k\in I(a)}$, $\{\beta_k(a)\}_{i\in I(a)}$, $\{\delta_k(a)\}_{k\in I(a)}$ — наборы вещественных чисел, свои для каждой вершины графа. При этом считаем, что $\alpha_k(a) > 0$, $\beta_k(a) \geqslant 0$, $k\in I(a)$, для любой вершины. В условиях согласования (3) считаем, что все производные подсчитаны в направлении к вершине a.

Рассматриваемая задача имеет естественную физическую интерпретацию. Она моделирует процесс распространения тепла в системе стержней, копирующей граф Γ. В узловых точках системы стержни могут быть спаяны или соединены муфтами, каждая из которых имеет свою теплоемкость, что выражается условиями (2), (3).

Отметим, что в работе автора [1] установлена разрешимость параболической задачи для случая однородного уравнения (1) при неоднородных краевых и начальном условиях (2)–(4).

1. Предварительные сведения

Под геометрическим графом в настоящей работе понимается одномерное стратифицированное многообразие, вложенное в $\mathbb{R}^n$ и обозначаемое через Γ [2]. Ребра графа — это пространственные гладкие кривые, не имеющие самопересечений. Вершина графа — точка, являющаяся концом одного или нескольких ребер. Считая ребра графа занумерованными, обозначаем их через γ_k, а вершины — через a_j или b_j (при этом предполагается, что нумерация вершин независима от нумерации ребер). Через V обозначаем множество вершин графа, которые являются концевыми точками двух и более ребер. Такие вершины мы называем *внутренними*. Вершины графа, не принадлежащие V, называем *граничными* и обозначаем их через $\partial\Gamma$. Если вершина a является концевой точкой ребра γ_k, то будем говорить, что ребро γ_k примыкает к вершине a. Множество индексов всех ребер, примыкающих к внутренней вершине a, обозначим $I(a)$. Всюду далее полагаем, что граф Γ является конечным и связным множеством в $\mathbb{R}^n$.

Под функцией на графе понимается отображение $u : \Gamma \to \mathbb{C}$. Через u_k будем обозначать сужение функции u на ребро γ_i. Если a — произвольная вершина (граничная или внутренняя) графа Γ, то под $u_k(a)$ понимается $\lim_{x\to a} u_k(x)$, $x \in \gamma_k$. Через $C[\Gamma]$ будем обозначать пространство функций, равномерно непрерывных на каждом ребре графа. Мы не требуем непрерывности функций пространства $C[\Gamma]$ на всем графе Γ, поэтому величины $u_k(a)$ и $u_i(a)$ не обязаны совпадать при $k \neq i$. Через $C(\Gamma)$ — подпространство из $C[\Gamma]$ функций непрерывных на всем графе.

Введем понятие производной функции. Для этого введем в рассмотрение функцию $\psi(x)$, взаимно однозначно отображающую каждое ребро γ_k на некоторый интервал $(0, l_k)$ при $l_k > 0$. Функцию $\psi(x)$ будем называть *метрической*, а величину l_k — *длиной ребра* γ_k. Для сужения функции $\psi(x)$ на ребро γ_k существует обратное отображение $x(\psi)$ интервала $(0, l_k)$ на ребро γ_k. Функцию $u(x)$ назовем *дифференцируемой* на графе Γ, если для каждого ребра γ_k дифференцируема по переменной ψ суперпозиция $u(x(\psi))$. При этом полагаем $u'(x) = \frac{du(x(\psi))}{d\psi}$. Обозначим через $C^n[\Gamma]$ пространство функций $u(x) \in C[\Gamma]$, производные которых до порядка n включительно существуют и принадлежат пространству $C[\Gamma]$, а через $C^k(\Gamma)$ обозначаем $C^k[\Gamma] \bigcap C(\Gamma)$. Далее мы будем рассматривать комплекснозначные функции нескольких переменных, у которых одна (пространственная) переменная имеет областью своего изменения граф Γ. Области изменения других переменных могут быть различны. Везде ниже полагаем, что все рассматриваемые функции равномерно непрерывны по пространственной переменной на каждом ребре графа. Рассматривая отображения вида $u : \Gamma_T \to \mathbb{C}$, через $C^{n,s}[\Gamma_T]$ обозначаем пространство всех функций, определенных на Γ_T, имеющих равномерно непрерывные производные $\frac{\partial^{n+s}u}{\partial x^n \partial t^s}$ на каждом множестве $\gamma_k \times [0, T]$, $\gamma_k \in \Gamma$.

Под интегралом функции $u \in C[\Gamma]$, взятым по графу Γ, понимаем сумму криволинейных интегралов по всем ребрам графа.

В дальнейшем нам понадобятся следующие результаты работы [3].

Спектр соответствующей (1)–(4) спектральной задачи состоит из последовательности собственных значений, не имеющей конечной предельной точки. Все собственные значения расположены в полосе Π конечной ширины с центром в начале координат комплексной плоскости, границы которой параллельны вещественной оси. Обозначим через $\Delta(\rho)$ характеристический определитель спектральной задачи, где $\rho = \sqrt{-\lambda}$. Выбросим из ρ-плоскости внутренности малых кругов радиуса r с центрами в нулях ρ_k функции $\Delta(\rho)$ и обозначим через $\mathbb{C}_r$, оставшуюся часть ρ-плоскости. Пусть $\rho \in \mathbb{C}_r$. Обозначим через $G(x, \xi, \rho)$ функцию Грина [2, 4] интегрального оператора, обращающего спектральную задачу. Функция Грина удовлетворяет следующему асимптотическому представлению [3]

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} G(x,\xi,\rho) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} K_k(x,\xi,\rho) + (i\rho)^{\nu-1} \sum_{k=1}^m \frac{\big[\Theta_k^{(1)}(x)\big]^\nu}{\sqrt{p_k(x)}} \\
\times \exp\Bigg(i\rho \int_{a_k}^{x} \Theta^{(1)}(z)dz\Bigg) \Bigg\{ \exp\Bigg(-i\rho \int_{a_k}^{\xi} \Theta^{(2)}(z)dz\Bigg) \big[\zeta_k^{(2)}(\xi)\big] \frac{\mathscr{E}_{k1}^{(1)}(\rho)}{\Delta(\rho)} \\
+ \exp\Bigg(i\rho \int_{\xi}^{b_k} \Theta^{(1)}(z)dz\Bigg) \big[\zeta_k^{(1)}(\xi)\big] \frac{\mathscr{E}_{k2}^{(1)}(\rho)}{\Delta(\rho)} \Bigg\} + (i\rho)^{\nu-1} \sum_{k=1}^m \frac{\big[\Theta_k^{(2)}(x)\big]^\nu}{\sqrt{p_k(x)}} \\
\times \exp\Bigg(-i\rho \int_{x}^{b_k} \Theta^{(2)}(z)dz\Bigg) \Bigg\{ \exp\Bigg(-i\rho \int_{a_k}^{\xi} \Theta^{(2)}(z)dz\Bigg) \big[\zeta_k^{(2)}(\xi)\big] \frac{\mathscr{E}_{k1}^{(2)}(\rho)}{\Delta(\rho)} \\
+ \exp\Bigg(i\rho \int_{\xi}^{b_k} \Theta^{(1)}(z)dz\Bigg) \big[\zeta_k^{(1)}(\xi)\big] \frac{\mathscr{E}_{k2}^{(2)}(\rho)}{\Delta(\rho)} \Bigg\},
\end{gathered} \tag{5}$$

где функции $\mathscr{E}_{ks}^{(s)}(\rho)/\Delta(\rho)$ ограничены некоторым числом в $\mathbb{C}_r$,

$$\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} K_k(x,\xi,\rho) = \begin{cases} 0, & \xi \in \gamma_n,\ x \in \gamma_j,\ n \neq j; \\ (i\rho)^{\nu-1} \big[\mu_{k1}^{(\nu)}(x,\xi)\big] \exp\Big(i\rho \int\limits_{\xi}^{x} \Theta^{(1)}(z)dz\Big), & \\ & \gamma_k = [a_k, b_k],\ a_k \leqslant \xi \leqslant x \leqslant b_k; \\ -(i\rho)^{\nu-1} \big[\mu_{k2}^{(\nu)}(x,\xi)\big] \exp\Big(i\rho \int\limits_{\xi}^{x} \Theta^{(2)}(z)dz\Big), & \\ & \gamma_k = [a_k, b_k],\ a_k \leqslant x \leqslant \xi \leqslant b_k, \end{cases} \tag{6}$$

$\Theta^{(1)}(z) = 1/\sqrt{p(z)}$, $\Theta^{(2)}(z) = -1/\sqrt{p(z)}$ при $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$ и $\Theta^{(1)}(z) = -1/\sqrt{p(z)}$, $\Theta^{(2)}(z) = 1/\sqrt{p(z)}$ при $\operatorname{Im}\rho < 0$; $\zeta_k^{(s)}(\xi) = \big(2\Theta_k^{(1)}(\xi)\Theta_k^{(s)}(\xi)\big)^{-1}$, $\mu_{k1}^{(\nu)}(x,\xi) = \big(\Theta_k^{(s)}(x)\big)^{\nu-1}\zeta_k^{(1)}(\xi)/\sqrt{p_k(x)}$, $s = 1, 2$, $\nu = 0, 1, 2$, а квадратные скобки $[\mu]$ обозначают сумму $\mu + O(1/\rho)$.

2. Существование решения задачи (1)–(4)

Через Π мы по-прежнему обозначаем полосу комплексной ρ-плоскости, содержащую все собственные значения соответствующей спектральной задачи. Пусть $\psi \in (0, \frac{\pi}{4})$. Обозначим через L разомкнутый контур, лежащий в верхней полуплоскости комплексной

ρ-плоскости, не имеющий общих точек с множеством Π, и такой, что прямые $\arg\rho=\psi$ и $\arg\rho=\pi-\psi$ являются асимптотами. Обозначим через O_n последовательность окружностей радиусов r_n с центром в начале координат ρ-плоскости, целиком лежащих в $\mathbb{C}_r$, причем $r_n\to+\infty$ при $n\to+\infty$. Пусть, далее, L_n есть часть контура L, расположенная внутри окружности O_n. Полагаем, что $L\backslash L_n$ совпадает с достаточно отдаленными частями прямых $\arg\rho=\psi$ и $\arg\rho=\pi-\psi$.

Теорема. *Если $f\in C^{2,2}[\Gamma_T]$, то решение задачи (1)–(4) существует. Это решение можно представить в виде*

$$u(x,t)=-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\rho\int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho. \tag{7}$$

$\lhd$ Для доказательства теоремы достаточно показать возможность дифференцирования под знаком интеграла (7).

Проинтегрируем по частям интеграл

$$\begin{aligned}\int\limits_0^t\exp\Big(-\rho^2(t-\tau)\Big)f(\xi,\tau)\,d\tau&=\frac{1}{\rho^2}f(\xi,t)-\frac{1}{\rho^2}e^{-\rho^2t}f(\xi,0)-\frac{1}{\rho^4}\frac{\partial}{\partial t}f(\xi,t)\\&+\frac{1}{\rho^4}\frac{\partial}{\partial t}f(\xi,t)\Big|_{t=0}e^{-\rho^2t}+\frac{1}{\rho^4}\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}f(\xi,\tau)\,d\tau.\end{aligned}\tag{8}$$

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned}&\int\limits_L\rho\frac{\partial^{s+\nu}}{\partial t^s\,\partial x^\nu}\int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho\\&=\int\limits_L\rho\frac{\partial^{s+\nu}}{\partial t^s\,\partial x^\nu}\int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\bigg\{\frac{1}{\rho^2}f(\xi,t)-\frac{1}{\rho^2}e^{-\rho^2t}f(\xi,0)\\&\qquad-\frac{1}{\rho^4}\frac{\partial}{\partial t}f(\xi,t)+\frac{1}{\rho^4}\frac{\partial}{\partial t}f(\xi,t)\Big|_{t=0}e^{-\rho^2t}\\&\quad+\frac{1}{\rho^4}\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}f(\xi,\tau)\,d\tau\bigg\}\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho,\quad s+\nu\leqslant 2.\end{aligned}\tag{9}$$

Как видно из асимптотических представлений (5) и (6) и формулы (8) при $\big|\operatorname{Im}\rho\big|\to+\infty$ главной частью подынтегральной функции (9) является

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\rho}\frac{\partial^{s+\nu}}{\partial t^s\,\partial x^\nu}\int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\,f(\xi,t)\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\\&=\frac{1}{\rho^2}\sum_{k=1}^m\frac{\partial^{s+\nu}}{\partial t^s\,\partial x^\nu}\bigg\{\int\limits_{a_k}^x\exp\bigg(i\rho\int\limits_\xi^x\Theta^{(1)}(z)\,dz\bigg)\mu_{k1}^{(0)}(x,\xi)\,f_k(\xi,t)\,\frac{d\xi}{p_k(\xi)}\\&\qquad-\int\limits_x^{b_k}\exp\bigg(-i\rho\int\limits_x^\xi\Theta^{(2)}(z)\,dz\bigg)\mu_{k2}^{(0)}(x,\xi)\,f_k(\xi,t)\,\frac{d\xi}{p_k(\xi)}\bigg\}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\rho^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} \Biggl\{ \int\limits_{a_k}^{x} \exp\biggl(i\rho \int\limits_{\xi}^{x} \Theta^{(1)}(z)\,dz \biggr) \mu_{k1}^{(0)}(x,\xi)\, \frac{\partial^s}{\partial t^s}\, f_k(\xi,t)\, \frac{d\xi}{p_k(\xi)}$$

$$- \int\limits_{x}^{b_k} \exp\biggl(-i\rho \int\limits_{x}^{\xi} \Theta^{(2)}(z)\,dz \biggr) \mu_{k2}^{(0)}(x,\xi)\, \frac{\partial^s}{\partial t^s}\, f_k(\xi,t)\, \frac{d\xi}{p_k(\xi)} \Biggr\}. \tag{10}$$

Интегрированием по частям можно убедиться в том, что (10) при $\nu \leqslant 1$ на контуре L убывает как ρ^{-2}, равномерно относительно $t \geqslant 0$ и $x \in \Gamma$. Следовательно, интеграл (9) при $\nu \leqslant 1$, $s \leqslant 2$ сходится равномерно относительно $t \geqslant 0$ и $x \in \Gamma$. Это дает нам право дифференцировать под знаком интеграла (7) один раз по x и два раза по t и переходить к пределу при $t \to 0$, $x \to a$, $a \in \partial\Gamma \cup V$. Поэтому $\lim\limits_{t\to 0} u_3(x,t) = 0$. Далее, принимая во внимание (9) и возможность дифференцирования под знаком интеграла один раз по x и один раз по t, получим:

$$\frac{\partial^{s+\nu}}{\partial t^s\,\partial x^\nu}\, u(x,t) = \int\limits_L \rho\, \frac{\partial^{s+\nu}}{\partial t^s\,\partial x^\nu} \int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho) \int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\tau\, \frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho$$

$$= \int\limits_L \frac{1}{\rho}\, \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} \int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\, \frac{\partial^s}{\partial t^s}\, f(\xi,t)\, \frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho$$

$$- \int\limits_L \frac{1}{\rho}\,(-\rho^2)^s\, e^{-\rho^2 t}\, \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} \int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\, f(x,0)\, \frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho$$

$$- \int\limits_L \frac{1}{\rho^3}\, \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} \int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\, \frac{\partial^{s+1}}{\partial t^{s+1}}\, f(\xi,t)\, \frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho \tag{11}$$

$$+ \int\limits_L \frac{1}{\rho^3}\,(-\rho^2)^s\, e^{-\rho^2 t}\, \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} \int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\, \frac{\partial}{\partial t}\, f(\xi,t)\Big|_{t=0} \frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho$$

$$+ \int\limits_L \frac{1}{\rho^3}\, \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} \int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\, \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, f(\xi,t)\, \frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho$$

$$- \int\limits_L \frac{1}{\rho^3}\,(-\rho^2)^s\, \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} \int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho) \int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}\, \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, f(\xi,t)\, \frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho.$$

В силу (9) у первого интеграла по контуру L в правой части (11) подынтегральная функция убывает как ρ^{-2}, следовательно, представляя его в виде предела интеграла по контуру O_n^+, убеждаемся, что он равен нулю. Точно так же убеждаемся, что равны нулю третий и пятый интегралы в правой части (11).

Подставим функцию $u(x,t)$ из (7) в краевые условия (2), (3). Пользуясь линейностью функционалов, определяющих условия (2), (3), разобьем выражение, получающееся после подстановки функции $u(x,t)$ в краевые условия, на шесть частей, соответствующих каждому слагаемому в (11). Все нечетные слагаемые равны нулю. Равенство нулю четных слагаемых следует из того, что функция Грина $G(\cdot,\xi,\rho)$ удовлетворяет однородным краевым условиям (2), (3).

Таким образом, функция, определяемая формулой (7), удовлетворяет всем условиям (2), (3). Поэтому для доказательства теоремы нужно показать, что (7) удовлетворяет уравнению (1).

Поскольку мы не имеем права дифференцировать два раза под знаком интеграла (7), выделим в нем главную часть. Для этой цели введем обозначение

$$G^{(1)}(x,\xi,\rho)=\begin{cases}0, & x\in\gamma_n,\ \xi\in\gamma_j,\ n\neq j;\\ (i\rho)^{-1}\mu_{k1}^{(0)}(x,\xi)\exp\left(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(1)}(z)\,dz\right), & \\ & x,\xi\in\overline{\gamma}_k=[a_k,b_k],\ a_k\leqslant\xi\leqslant x\leqslant b_k;\\ -(i\rho)^{-1}\mu_{k2}^{(0)}(x,\xi)\exp\left(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(2)}(z)\,dz\right), & \\ & x,\xi\in\overline{\gamma}_k=[a_k,b_k],\ a_k\leqslant x\leqslant\xi\leqslant b_k,\end{cases}\tag{12}$$

$$G^{(2)}(x,\xi,\rho)=G(x,\xi,\rho)-G^{(1)}(x,\xi,\rho).\tag{13}$$

Обозначим через D_x — дифференциальный оператор $D_x=p(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\,p(x)\,\frac{\partial}{\partial x}+q(x)$. Тогда

$$\begin{aligned}&-\pi i\,D_x\,u(x,t)+\pi i\,\frac{\partial}{\partial t}\,u_3(x,t)\\ &=\left(D_x-\frac{\partial}{\partial t}\right)\int\limits_L\rho\int\limits_\Gamma G^{(1)}(x,\xi,\rho)\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho\\ &+\left(D_x-\frac{\partial}{\partial t}\right)\int\limits_L\rho\int\limits_\Gamma G^{(2)}(x,\xi,\rho)\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho.\end{aligned}\tag{14}$$

Согласно теореме 3 подынтегральная функция второго слагаемого в (14) убывает как ρ^{-2} на контуре L. Следовательно, этот интеграл допускает дифференцирование два раза по x и один раз по t. Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned}-\pi i\left(D_x-\frac{\partial}{\partial t}\right)u_3(x,t)&\equiv\left(D_x-\frac{\partial}{\partial t}\right)\int\limits_L\rho\int\limits_\Gamma G^{(1)}(x,\xi,\rho)\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\\ &+\int\limits_L\rho\Big(D_x+\rho^2\Big)\int\limits_\Gamma G^{(2)}(x,\xi,\rho)\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho\\ &-\int\limits_L\rho\int\limits_\Gamma G^{(2)}(x,\xi,\rho)\,f(\xi,t)\,d\tau\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho.\end{aligned}\tag{15}$$

Подынтегральная функция третьего слагаемого на контуре L убывает как ρ^{-2}, поэтому этот интеграл равен нулю. Тогда, принимая во внимание свойства функции Грина и (13), из (15) получаем

$$\begin{aligned}-\pi i\Big(D_x-\frac{\partial}{\partial t}\Big)\,u(x,t)&=\Big(D_x-\frac{\partial}{\partial t}\Big)\int\limits_L\rho\int\limits_\Gamma G^{(1)}(x,\xi,\rho)\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho\\ -\int\limits_L\rho\Big(D_x+\rho^2\Big)\int\limits_\Gamma G^{(1)}(x,\xi,\rho)&\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho\int\limits_L\rho\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\,d\rho.\end{aligned}\tag{16}$$

Ввиду того, что на контуре L функция

$$\int\limits_{\Gamma} G^{(1)}(x,\xi,\rho) \int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\tau\, \frac{d\xi}{p(\xi)}$$

убывает как ρ^{-3}, во втором слагаемом (16) дифференциальный оператор можно вынести за знак интеграла по L.

$$-\pi i \left(D_x - \frac{\partial}{\partial t}\right) u_3(x,t) = \left(p(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x)\right) \int\limits_L \rho \int\limits_{\Gamma} G^{(1)}(x,\xi,\rho)$$
$$\times \int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\tau\, \frac{d\xi}{p(\xi)}\, d\rho - \int\limits_L \rho \left\{ \left(p(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho^2\right) \int\limits_{\Gamma} G^{(1)}(x,\xi,\rho) \right. \tag{17}$$
$$\left. \times \int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\tau\, \frac{d\xi}{p(\xi)}\, d\rho - \int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\tau \right\} d\rho.$$

Теперь вычислим выражение в фигурных скобках из (17). Для сокращения записи введем обозначение

$$\Psi_k^{(s)}(x,\xi,\tau) = \mu_{ks}^{(0)}(x,\xi)\, \frac{f_k(\xi,\tau)}{p_k(\xi)}, \quad x \in \gamma_k. \tag{18}$$

Как видно из определения $\mu_{ks}^{(0)}$ (см. конец § 1)

$$\Psi_k^{(s)}(x,\xi,\tau) = -\Psi_k^{(s)}(x,\xi,\tau).$$

Принимая во внимание (12) и (13), непосредственным вычислением находим

$$\left(p(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho^2\right) \int\limits_{\gamma_k} G^{(1)}(x,\xi,\rho) \int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)} f_k(\xi,\tau)\, d\tau\, \frac{d\xi}{p_k(\xi)}$$
$$= \left(p(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho^2\right) \left\{ \frac{1}{i\rho} \int\limits_{a_k}^x \exp\left(i\rho \int\limits_{\xi}^x \Theta^{(1)}(z)\, dz\right) \mu_{k1}^{(0)}(x,\xi) \right.$$
$$\times \int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)} f_k(\xi,\tau)\, d\tau\, \frac{d\xi}{p_k(\xi)} - \frac{1}{i\rho} \int\limits_x^{b_k} \exp\left(i\rho \int\limits_{\xi}^x \Theta^{(2)}(z)\, dz\right) \mu_{k2}^{(0)}(x,\xi)$$
$$\left. \times \int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)} f_k(\xi,\tau)\, d\tau\, \frac{d\xi}{p_k(\xi)} \right\} = \int\limits_0^t \frac{e^{-\rho^2(t-\tau)}}{i\rho} \left(p(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho^2\right)$$
$$\times \left\{ \int\limits_{a_k}^x \exp\left(i\rho \int\limits_{\xi}^x \Theta^{(1)}(z)\, dz\right) \Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau)\, d\xi \right.$$

$$
+\int\limits_{x}^{b_k}\exp\left(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(2)}(z)\,dz\right)\Psi_k^{(2)}(x,\xi,\tau)\,d\xi\Bigg\}\,d\tau
$$

$$
=\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}\Bigg\{p_k(x)\bigg(\Theta_k^{(1)}(x)\,\Psi_k^{(1)}(x,x,\tau)+\Theta_k^{(2)}(x)\,\Psi_k^{(2)}(x,x,\tau)\bigg)
$$

$$
+p_k(x)\bigg(\frac{d}{dx}\,\Theta_k^{(1)}(x)\int\limits_{a_k}^{x}\exp\left(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta_k^{(1)}(z)\,dz\right)\Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau)\,d\xi
$$

$$
+\frac{d}{dx}\,\Theta_k^{(2)}(x)\int\limits_{b_k}^{x}\exp\left(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta_k^{(2)}(z)\,dz\right)\Psi_k^{(2)}(x,\xi,\tau)\,d\xi\bigg)
$$

$$
+2p_k(x)\bigg(\Theta_k^{(1)}(x)\int\limits_{a_k}^{x}\exp\left(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(1)}(z)\,dz\right)\frac{\partial}{\partial x}\,\Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau)\,d\xi
$$

$$
+\Theta_k^{(2)}(x)\int\limits_{b_k}^{x}\exp\left(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta_k^{(2)}(z)\,dz\right)\frac{\partial}{\partial x}\,\Psi_k^{(2)}(x,\xi,\tau)\,d\xi\bigg)
$$

$$
+\frac{p_k(x)}{i\rho}\left(\int\limits_{a_k}^{x}\exp\left(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(1)}(z)\,dz\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau)\,d\xi\right.
$$

$$
\left.+\int\limits_{b_k}^{x}\exp\left(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(2)}(z)\,dz\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\Psi_k^{(2)}(x,\xi,\tau)\,d\xi\right)\Bigg\}\,d\tau. \tag{19}
$$

Из определения $\mu_{ks}^{(0)}$ и (18) следует, что

$$
p_k(x)\left(\Theta_k^{(1)}(x)\,\Psi_k^{(1)}(x,x,\tau)+\Theta_k^{(2)}(x)\,\Psi_k^{(2)}(x,x,\tau)\right)=f_k(x,\tau).
$$

Подставляя (19) в (16) и принимая во внимание (12), получим при $x\in\gamma_k$

$$
-\pi i\left(D_x-\frac{\partial}{\partial t}\right)u_3(x,t)=\left(p_k(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial t}\right)\int\limits_0^t\ \Bigg\{\int\limits_{a_k}^{x}\Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau)
$$

$$
\times\int\limits_L\exp\left(-\rho^2(t-\tau)+i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(1)}(z)\,dz\right)d\rho\,d\xi+\int\limits_{b_k}^{x}\Psi_k^{(2)}(x,\xi,\tau)
$$

$$
\times\int\limits_L\exp\left(-\rho^2(t-\tau)+i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(2)}(z)\,dz\right)d\rho\,d\xi\Bigg\}\,d\tau-\int\limits_0^t\ \Bigg\{p_k(x)\bigg(\frac{d}{dx}\,\Theta_k^{(1)}(x)
$$

$$
\times\int\limits_{a_k}^{x}\Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau)\int\limits_L i\rho\exp\left(-\rho^2(t-\tau)+i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta_k^{(1)}(z)\,dz\right)d\rho\,d\xi
$$

$$+\frac{d}{dx}\Theta_k^{(2)}(x)\int\limits_{b_k}^{x}\Psi_k^{(2)}(x,\xi,\tau)\int\limits_L i\rho\exp\Big(-\rho^2(t-\tau)+i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(2)}(z)\,dz\Big)\,d\rho\,d\xi$$

$$+2p_k(x)\bigg(\Theta_k^{(1)}(x)\int\limits_{a_k}^{x}\frac{\partial}{\partial x}\Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau)\int\limits_L i\rho\exp\Big(-\rho^2(t-\tau)+i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(1)}(z)\,dz\Big)\,d\rho\,d\xi$$

$$+\Theta_k^{(2)}(x)\int\limits_{b_k}^{x}\frac{\partial}{\partial x}\Psi_k^{(2)}(x,\xi,\tau)\int\limits_L i\rho\exp\Big(-\rho^2(t-\tau)+i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(2)}(z)\,dz\Big)\,d\rho\,d\xi\bigg)$$

$$+p_k(x)\bigg(\int\limits_{a_k}^{x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau)\int\limits_L \exp\Big(-\rho^2(t-\tau)+i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(1)}(z)\,dz\Big)d\rho\,d\xi$$

$$+\int\limits_{b_k}^{x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_k^{(2)}(x,\xi,\tau)\int\limits_L \exp\big(-\rho^2(t-\tau)+i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(2)}(z)\,dz\big)\,d\rho\,d\xi\bigg)\bigg\}\,d\rho. \tag{20}$$

Заметим, что во всех интегралах, встречавшихся в (20), вещественные части степеней показательных функций отрицательны при $\rho\in L$, что дает хорошую сходимость этих интегралов, которые в общем виде можно записать следующим образом:

$$I_k=\int\limits_L (i\rho)^k\exp\big(-\rho^2a+i\rho b\big)\,d\rho=e^{-\frac{b^2}{4a}}\int\limits_L (i\rho)^k\exp\Big(i\rho a+\frac{b}{2\sqrt{a}}\Big)^2\,d\rho,$$

где $a>0$, $b\geqslant 0$, $k=0,1$.

Представляя интеграл I_k в виде предела интегралов по контурам L_n и вводя новую переменную $z=i\rho a+\frac{b^2}{4a}$, можно показать, что

$$I_0=\frac{i\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\,e^{-\frac{b^2}{4a}},\quad I_1=-\frac{i\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\,e^{-\frac{b^2}{4a}}\,\frac{b}{2\sqrt{a}}. \tag{21}$$

Тогда, вычисляя по формуле (21) интегралы, входящие в (20), получим

$$-\pi i\Big(D_x-\frac{\partial}{\partial t}\Big)u_3(x,t)=\sqrt{\pi}i\Big(p_k(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial t}\Big)$$

$$\times\int\limits_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{\gamma_k}\exp\bigg(-\frac{1}{4(t-\tau)}\Big(\int\limits_{\xi}^{x}\frac{dz}{\sqrt{p_k(z)}}\Big)^2\bigg)\,\Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}i}{2}\int\limits_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{\frac32}}\bigg\{\int\limits_{\gamma_k}p_k(x)\Big(\frac{d}{dx}\,\Theta_k^{(1)}(z)\,\Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau)\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(1)}(z)\,dz$$

$$+2\Theta^{(1)}(x)\Big(\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(1)}(z)\,dz\Big)\,\frac{\partial}{\partial x}\,\Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau)\Big)\exp\bigg(-\frac{1}{4(t-\tau)}\Big(\int\limits_{\xi}^{x}\Theta_k^{(1)}(z)\,dz\Big)^2\bigg)\,d\xi$$

$$-2(t-\tau)\int\limits_{\gamma_k}p_k(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau)\exp\bigg(-\frac{1}{4(t-\tau)}\Big(\int\limits_{\xi}^{x}\Theta_k^{(1)}(z)\,dz\Big)^2\bigg)\,d\xi\bigg\}\,d\tau.$$

Вычисляя оператор $\left(p_k(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial t}\right)$ от первого интеграла, получим

$$-\pi i\left(D_x-\frac{\partial}{\partial t}\right)u_3(x,t)$$

$$=-\sqrt{\pi}i\lim_{\tau\to t}\int\limits_{\gamma_k}\frac{\Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left(-\frac{1}{4(t-\tau)}\left(\int\limits_{\xi}^{x}\frac{dz}{\sqrt{p_k(z)}}\right)^2\right)d\xi$$

$$=-\sqrt{\pi}i\lim_{t_1\to 0}\int\limits_{\gamma_k}\frac{\Psi_k^{(1)}(x,\xi,t-t_1)}{\sqrt{t_1}}\exp\left(-\frac{1}{4t_1}\left(\int\limits_{\xi}^{x}\frac{dz}{\sqrt{p_k(z)}}\right)^2\right)d\xi$$

$$=-\sqrt{\pi}i\lim_{t_1\to 0}\int\limits_{\gamma_k}\frac{\Psi_k^{(1)}(x,\xi,t-t_1)-\Psi_k^{(1)}(x,\xi,t)+\Psi_k^{(1)}(x,\xi,t)}{\sqrt{t_1}}\exp\left(-\frac{1}{4t_1}\left(\int\limits_{\xi}^{x}\frac{dz}{\sqrt{p_k(z)}}\right)^2\right)d\xi$$

$$=-\sqrt{\pi}i\lim_{t_1\to 0}\int\limits_{\gamma_k}\frac{\Psi_k^{(1)}(x,\xi,t)}{\sqrt{t_1}}\exp\left(-\frac{1}{4t_1}\left(\int\limits_{\xi}^{x}\frac{dz}{\sqrt{p_k(z)}}\right)^2\right)d\xi.$$

Здесь мы воспользовались определением функции $\Psi_k^{(1)}$ и условием $f\in C^2[\Gamma_T]$. Покажем, что предел в правой части последнего равенства равен $-\sqrt{\pi}f(x,t)$. Для этого разобьем интеграл по γ_k на три части

$$\int\limits_{\gamma_k}=\int\limits_{a_k}^{x-\varepsilon}+\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}+\int\limits_{x+\varepsilon}^{b_k},\qquad 0<\varepsilon\ll 1.$$

В силу того, что показатели экспонент при $\xi\in(a_k,x-\varepsilon)\cup(x+\varepsilon,b_k)$ отрицательны, а функция $\Psi_k^{(1)}(x,\xi,t)$ имеет непрерывные производные по x и ξ на $[a_k,b_k]$, то первый и третий интегралы стремятся при $t_1\to 0$ к нулю.

Рассмотрим второй интеграл:

$$\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{\Psi_k^{(1)}(x,\xi,t)}{\sqrt{t_1}}\exp\left(-\frac{1}{4t_1}\left(\int\limits_{\xi}^{x}\frac{dz}{\sqrt{p_k(z)}}\right)^2\right)d\xi$$

$$=\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{\mu_{k1}^{(0)}(x,\varepsilon)\,f_k(\xi,t)}{\sqrt{p_k(\xi)}}\,\frac{1}{\sqrt{p_k(\xi)t_1}}\exp\left(-\frac{1}{4t_1}\left(\int\limits_{\xi}^{x}\frac{dz}{\sqrt{p_k(z)}}\right)^2\right)d\xi$$

$$=\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\left(\frac{\mu_{k1}^{(0)}(x,\xi)\,f_k(\xi,t)}{\sqrt{p_k(\xi)t_1}}-\frac{\mu_{k1}^{(0)}(x,x)\,f_k(x,t)}{\sqrt{p_k(x)t_1}}\right)\exp\left(-\frac{1}{4t_1}\left(\int\limits_{\xi}^{x}\frac{dz}{\sqrt{p_k(z)}}\right)^2\right)\frac{d\xi}{\sqrt{p_k(\xi)}}$$

$$+2\,\frac{\mu_{k1}^{(0)}(x,x)\,f_k(x,t)}{\sqrt{p_k(x)}}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{1}{2\sqrt{t_1}}\exp\left(-\frac{1}{4t_1}\left(\int\limits_{\xi}^{x}\frac{dz}{\sqrt{p_k(z)}}\right)^2\right)\frac{d\xi}{\sqrt{p_k(\xi)}}.$$

Из определения функции $\mu_{k1}^{(0)}$ и условия $f_k\in C^2[\gamma_k]$ следует, что при $\varepsilon\to 0$ и $t_1\to 0$ первый интеграл стремится к нулю. А второй интеграл путем замены переменной сводится к интегралу Эйлера — Пуассона и стремится к $-\sqrt{\pi}$ при $t_1\to 0$.

Таким образом, получаем при $x \in \gamma_k$

$$\left(D_x - \frac{\partial}{\partial t}\right) u_3(x,t) = -2\,\frac{\mu_{k1}^{(0)}(x,x)\,f_k(x,t)}{\sqrt{p_k(x)}} = -f_k(x,t). \ \triangleright$$

Литература

1. *Кулаев Р. Ч.* Теорема существования для параболической задачи на графе с краевыми условиями содержащими производную по времени // Тр. ин-та математики и механики УрОРАН.—2010.—Т. 16, вып. 2.—2010.—С. 139–148.
2. *Покорный Ю. В. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2004.—272 с.
3. *Кулаев Р. Ч.* Асимптотика решения краевой задачи на графе // Изв. вузов Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2010.—Вып. 4.—С. 17–21.
4. *Покорный Ю. В., Карелина И. Г.* О функции Грина задачи Дирихле на графе // Докл. АН СССР.—1991.—Т. 318, № 3.—С. 942–944.

Статья поступила 7 сентября 2010 г.

Кулаев Руслан Черменович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
старший научный сотрудник лаб. теории операторов
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `kulaevrch@mail.ru`

ON EXISTENCE OF THE SOLUTION OF PARABOLIC PROBLEM ON THE GRAPH WITH A BOUNDARY CONDITIONS, CONTAINING DERIVATIVES ON TIME

Kulaev R. Ch.

The mixed problem for the parabolic equation set on geometrical graph, with boundary conditions containing a derivative on time is considered. The theorem of existence of the solution of the boundary problem giving representation of the solution in the form of circuit integral is established.

Key words: differential equation on the graph, the circuit integral method.