Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 4, С. 3–17

УДК **517.983+517.518.34**

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ БАЗИС В ПРОСТРАНСТВЕ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ НА КЛАССАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Д. А. Абанина

Рассматривается однородное уравнение свертки в классах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на конечном интервале. Установлено, что в пространстве его решений имеется экспоненциально-полиномиальный базис.

Ключевые слова: ультрадифференцируемые функции, уравнение свертки, экспоненциально-полиномиальный базис.

1. Введение

Продолжая классические работы Л. Эйлера, многие математики (см., например, [5–9, 11, 12, 14, 15]) занимались проблемой существования базиса ядра оператора свертки в различных пространствах аналитических и бесконечно дифференцируемых функций. В настоящей работе указанная задача решается для классов ультрадифференцируемых функций (УДФ) Бёрлинга нормального типа на конечном интервале.

Пусть $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — *весовая функция*, т. е. непрерывная неубывающая функция, обладающая свойствами:

(α) $(\forall\, p>1)\ (\exists\, C>0):\ \omega(x+y) \leqslant p(\omega(x)+\omega(y)) + C \quad (x,y \geqslant 0)$;
(α') $\omega(t) = o(t), \quad t\to\infty$;
(γ) $\ln t = o(\omega(t)), \quad t\to\infty$;
(δ) $\varphi_\omega(x) := \omega(e^x)$ выпукла на $[0,\infty)$.

Без ограничения общности будем предполагать, что $\omega(1)=0$. Положим $\omega(z) := \omega(|z|)$, $z\in\mathbb{C}$. Далее, пусть $\varphi^*_\omega(y) = \sup\{xy - \varphi_\omega(x) : x \geqslant 0\}$, $y\geqslant 0$, — сопряженная по Юнгу к функции φ_ω. Пространство УДФ Бёрлинга нормального типа на заданном конечном интервале $I=(-a,a)$ в $\mathbb{R}$ определяется следующим образом:

$$\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I) = \left\{ f\in C^\infty(I) :\ (\forall\, q\in(0,1))\,(\forall\, l\in(0,a))\ \ |f|_{\omega,q,l} := \sup_{j\in\mathbb{N}_0}\sup_{|x|\leqslant l} \frac{|f^{(j)}(x)|}{e^{q\varphi^*_\omega(j/q)}} < \infty \right\}.$$

В своей естественной топологии $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$ является (FS)-пространством (см. [3]).

С помощью преобразования Фурье — Лапласа функционалов $F:\ \varphi\mapsto\widehat{\varphi}(z) := \varphi_x(e^{-ixz})$, $z\in\mathbb{C}$, сопряженное пространство $\big(\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)\big)'_\beta$ с сильной топологией реализуется (см. [1, теорема 1]) в виде пространства целых функций

$$H^1_{(\omega),I} := \left\{ f\in H(\mathbb{C}) :\ (\exists\, q\in(0,1))\,(\exists\, l\in(0,a))\ \|f\|_{\omega,q,l} := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{q\omega(\operatorname{Re} z)+l|\operatorname{Im} z|}} < \infty \right\}.$$

© 2011 Абанина Д. А.

Пространство $H^1_{(\omega),I}$ наделяется естественной индуктивной топологией и является в ней (DFS)-пространством [3]. В соответствии с [2, предложение 1] множество всех непрерывных мультипликаторов пространства $H^1_{(\omega),I}$ совпадает с

$$M^1_{(\omega)} = \left\{\mu \in H(\mathbb{C}) : (\forall\, \varepsilon > 0)\ \ \|\mu\|_{\omega,\varepsilon,\varepsilon} = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{e^{\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z)+\varepsilon|\operatorname{Im} z|}} < \infty\right\}.$$

Пусть μ — какой-нибудь нетривиальный мультипликатор из $M^1_{(\omega)}$, а $\psi_\mu := F^{-1}(\mu)$ — соответствующий ему линейный непрерывный функционал на $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$. Оператор свертки T_μ с характеристической функцией μ в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$ определяется следующим образом:

$$(T_\mu f)(x) := \langle \psi_\mu, f(x+y)\rangle_y, \quad f \in \mathscr{E}^1_{(\omega)}(I), \quad x \in I.$$

Он действует непрерывно в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$ и является сопряженным к непрерывно действующему в $H^1_{(\omega),I}$ оператору умножения $\Lambda_\mu : f \mapsto \mu f$.

Как установлено в [2, теорема 1], для того чтобы уравнение свертки $T_\mu f = g$ было разрешимо в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$ при любой правой части $g \in \mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$, необходимо и достаточно, чтобы его характеристическая функция μ удовлетворяла условию:

(SC) $(\forall\, \varepsilon > 0)\,(\forall\, \delta > 0)\,(\exists\, r_0 > 0)\,(\forall\, z = x+iy \in \mathbb{C},\ |x| \geqslant r_0,\ |y| \leqslant \delta|x|)$ найдется окружность C_z с радиусом $R_z \leqslant \delta\omega(x) + \delta|y|$, содержащая точку z внутри себя, для всех точек ζ которой выполняется неравенство

$$\ln|\mu(\zeta)| \geqslant -\varepsilon\omega(\operatorname{Re}\zeta) - \varepsilon|\operatorname{Im}\zeta|. \tag{1}$$

Кроме того (см. [2, теорема 1]), условие (SC) равносильно тому, что μ — делитель $H^1_{(\omega),I}$. Это означает, что если $f \in H^1_{(\omega),I}$ и $\frac{f}{\mu} \in H(\mathbb{C})$, то $\frac{f}{\mu} \in H^1_{(\omega),I}$.

Рассмотрим в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$ однородное уравнение свертки $T_\mu f = 0$. Здесь и всюду в дальнейшем предполагается, даже если специально не оговаривается, что μ удовлетворяет условию (SC). Стандартным образом, используя степенное разложение экспоненты $e^{-i\lambda x} = \sum_{s=0}^\infty \frac{(-i\lambda x)^s}{s!}$ в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$ (см. [1, лемма 3]) и непрерывность оператора T_μ, получаем, что при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и $l \in \mathbb{N}_0$ справедливо представление

$$\Big[T_\mu\big((-ix)^l e^{-i\lambda x}\big)\Big](y) = \sum_{j=0}^{l} C_l^j \mu^{(j)}(\lambda)(-iy)^{l-j} e^{-i\lambda y}.$$

Из этого вытекает, что если (λ_s) — нули функции μ кратностей k_s, то экспоненциальные «мономы»

$$(-ix)^l e^{-i\lambda_s x}, \quad l = 0, \dots, k_s - 1, \quad s = 1, 2, \dots, \tag{2}$$

являются решениями рассматриваемого однородного уравнения, т. е. принадлежат $\ker T_\mu$. Более того, указанная система функций будет полна в $\ker T_\mu$, т. е., другими словами, $\ker T_\mu$ допускает спектральный синтез. Данный факт стандартным образом получается с помощью критерия Банаха о полноте на основании того, что μ — делитель $H^1_{(\omega),I}$. Естественно возникает вопрос о существовании в $\ker T_\mu$ базиса, состоящего из приведенных элементарных решений, а точнее, из их линейных комбинаций, поскольку, как установил А. Ф. Леонтьев в [6], элементарные решения необходимо группировать, чтобы обеспечить абсолютную сходимость соответствующих рядов. Ясно, что имеет смысл рассматривать лишь случай бесконечного числа нулей, когда $\ker T_\mu$ бесконечномерно.

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть целая функция $\mu(z)$ принадлежит $M^1_{(\omega)}$, удовлетворяет условию (SC) и имеет бесконечное множество нулей $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ с кратностями $k_1, k_2, \dots$ Тогда в пространстве решений однородного уравнения свертки $T_\mu f = 0$ в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$ имеется базис, состоящий из конечных линейных комбинаций элементарных решений* (2).

Доказательство проводится по традиционной схеме. В $H^1_{(\omega),I}$ рассматривается замкнутый (благодаря условию (SC)) главный идеал $J := \mu H^1_{(\omega),I}$ и факторпространство $H^1_{(\omega),I}/J$. Из общих результатов функционального анализа вытекает, что $\ker T_\mu$ изоморфно $(H^1_{(\omega),I}/J)'_\beta$. Основной этап доказательства — построение открытого покрытия $(U_j)_{j=1}^\infty$ нулевого множества N_μ функции μ, вне которого $|\mu|$ имеет подходящую оценку снизу. Покрытие $(U_j)_{j=1}^\infty$ разбивает нули функции μ и соответствующие им элементарные решения однородного уравнения свертки на конечные группы

$$\big\{(-ix)^l e^{-i\lambda_s x} : l = 0, \dots, k_s - 1, \lambda_s \in U_j\big\}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Размерность линейной оболочки, натянутой на j-ую группу, равна $m_j = \sum_{\lambda_s \in U_j} k_s$ — количеству (с учетом кратностей) нулей функции μ, содержащихся в U_j. После этого $(H^1_{(\omega),I}/J)'_\beta$ в два этапа реализуется в виде некоторого пространства последовательностей, на основании чего доказывается сформулированная теорема 1. Полученный результат позволит в дальнейшем установить существование линейного непрерывного правого обратного оператора к оператору свертки в пространствах $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$, чему будет посвящена отдельная статья.

Из предшествующих результатов наиболее близкими являются результаты, представленные в работах [11, 12, 14], в которых рассматривались предельные случаи пространств УДФ — классы минимального и максимального типов. Специфика пространств нормального типа, гораздо более тонких по сравнению с классами минимального и максимального типов, проявляется в основном на этапе построения покрытия для множества N_μ. Именно для классов нормального типа невозможно, как прежде в [11, 12], проводить рассуждения единообразно для всей плоскости. Суть предлагаемого в настоящей работе способа преодоления этой трудности состоит в том, что вблизи вещественной оси используется само условие (SC), а для остальных точек — классическое условие полной регулярности роста.

2. Покрытие нулевого множества характеристической функции

Пусть μ — мультипликатор пространства $H^1_{(\omega),I}$, удовлетворяющий условию сюръективности (SC), т. е. порождающий разрешимое для любой правой части уравнение свертки. Пусть, далее, $(\lambda_s)_{s=1}^\infty$ — последовательность его нулей, $|\lambda_s| \uparrow \infty$; k_s — кратность нуля λ_s. Заметим, что из определения класса $M^1_{(\omega)}$ всех мультипликаторов с учетом условия (α') на вес ω вытекает, что целая функция μ имеет нулевой тип при порядке 1, а значит, является функцией вполне регулярного роста при этом порядке. Из этого следует, что имеется исключительное множество кружков $\mathscr{E}_j = \{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta_j| < \rho_j\}$ нулевой линейной плотности $\big(\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \sum_{|\zeta_j|<r} \rho_j = 0\big)$ такое, что

$$\lim_{|z|\to\infty,\, z\notin\mathscr{E}_j} \frac{\ln|\mu(z)|}{|z|} = 0.$$

При этом в силу [4, лемма 1] кружки $\mathscr{E}_j$ можно считать попарно не пересекающимися.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ введем в рассмотрение следующее открытое в $\mathbb{C}$ множество:

$$U_\varepsilon = \bigl\{z \in \mathbb{C} \,:\, \ln|\mu(z)| < -\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z) - \varepsilon|\operatorname{Im} z|\bigr\},$$

содержащее в себе нулевое множество N_μ функции μ. Для дальнейшего нам необходимо оценить размеры связных компонент множества U_ε. С этой целью возьмем $\delta \in (0, \frac{1}{4})$ и, пользуясь условием (SC), по ε и δ найдем соответствующее r_0. Будем сразу предполагать r_0 настолько большим, что

$$\frac{1}{r}\sum_{|\zeta_j|<r} \rho_j < \delta^2, \quad r \geqslant r_0; \tag{3}$$

$$\frac{\ln|\mu(z)|}{|z|} > -\frac{\varepsilon\delta}{\delta+1}, \quad |z| \geqslant r_0, \quad z \notin \bigcup_j \mathscr{E}_j.$$

Заметим сразу, что для всех z с $|z| \geqslant r_0$ и $|\operatorname{Im} z| > \delta|\operatorname{Re} z|$, не попадающих в исключительные кружки $\mathscr{E}_j$,

$$\ln|\mu(z)| > -\frac{\varepsilon\delta}{\delta+1}|z| \geqslant -\frac{\varepsilon\delta}{\delta+1}\Bigl(\frac{1}{\delta}|\operatorname{Im} z| + |\operatorname{Im} z|\Bigr) = -\varepsilon|\operatorname{Im} z|,$$

так что эти z не принадлежат U_ε.

Всюду в дальнейшем для $z \in \mathbb{C}$ используется обозначение $\|z\| = \max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\}$. Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть V — произвольная связная компонента множества U_ε, целиком лежащая вне квадрата $\|z\| \leqslant r_0$. Если в V имеется точка z с $|\operatorname{Im} z| \leqslant \delta|\operatorname{Re} z|$, то* $\operatorname{diam}(V) \leqslant 2\delta\omega(\operatorname{Re} z) + 2\delta|\operatorname{Im} z|$. В противном случае $\operatorname{diam}(V) \leqslant 8\delta|\operatorname{Im} z|$, где z — произвольная точка из V.

$\lhd$ 1) Сначала рассмотрим случай, когда V содержит в себе точку z с $|\operatorname{Im} z| \leqslant \delta|\operatorname{Re} z|$. При этом $\|z\| = |\operatorname{Re} z| > r_0$, так что на основании (SC) существует окружность C_z, содержащая z внутри себя, для всех точек ζ которой выполняется неравенство (1). Значит, C_z не пересекается с V, так что V целиком лежит внутри C_z. Поэтому $\operatorname{diam}(V) \leqslant 2R_z \leqslant 2\delta\omega(\operatorname{Re} z) + 2\delta|\operatorname{Im} z|$.

2) Разберем теперь ситуацию, когда $|\operatorname{Im} z| > \delta|\operatorname{Re} z|$ для всех $z \in V$. Приведенные перед леммой рассуждения показывают, что тогда V целиком содержится в каком-то исключительном кружке $\mathscr{E}_j$, так что $\operatorname{diam}(V) \leqslant 2\rho_j$. Так как $|\zeta_j| + \rho_j > r_0$, то из (3) при $r = |\zeta_j| + \rho_j$ получаем, что $\rho_j < \delta^2(|\zeta_j| + \rho_j)$, откуда $|\zeta_j| > \frac{1-\delta^2}{\delta^2}\,\rho_j$. Если теперь z — произвольно выбранная точка из V, то

$$|z| \geqslant |\zeta_j| - \rho_j > \frac{1-2\delta^2}{\delta^2}\,\rho_j > \frac{1}{2\delta^2}\,\rho_j.$$

Следовательно,

$$\operatorname{diam}(V) \leqslant 2\rho_j \leqslant 4\delta^2|z| \leqslant 4\delta^2(|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|) < 8\delta|\operatorname{Im} z|. \ \rhd$$

Перейдем теперь к построению искомого открытого покрытия $(U_j)_{j=1}^\infty$ нулей функции μ. Для этого возьмем две числовые последовательности $\varepsilon_k \downarrow 0$ и $\delta_k \downarrow 0$. Положим

$$U^{(k)} = \bigl\{z \in \mathbb{C} : \ln|\mu(z)| < -\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re} z) - \varepsilon_k|\operatorname{Im} z|\bigr\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что $N_\mu \subset U^{(1)} \subset U^{(2)} \subset \ldots$ Далее, в соответствии с (SC) для ε_k и δ_k найдем подходящие r_k, $r_k \uparrow \infty$. В дальнейшем нам понадобится предполагать r_k настолько большими, что

$$\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} z) + \varepsilon_k |\operatorname{Im} z| > 2, \quad |z| \geqslant r_k, \tag{4}$$

$$\omega(t) < \delta_k^2 t, \quad t \geqslant r_k, \tag{5}$$

$$\ln|\mu(z)| < \varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} z) + \varepsilon_k |\operatorname{Im} z|, \quad |z| > r_k - 2. \tag{6}$$

В силу (α) можно также считать выполненным неравенство

$$\omega(t+2) + 2 \leqslant 2\omega(t), \quad t \geqslant r_1. \tag{7}$$

Наконец, понятно, что r_{k+1} можно при необходимости увеличить так, чтобы ни одна из компонент множества $U^{(k+1)}$, пересекающихся с $\|z\| = r_k$, не выходила за пределы множества $\|z\| < r_{k+1}$.

Выберем те связные компоненты множества $U^{(1)}$, которые пересекаются с квадратом $\|z\| \leqslant r_1$ и содержат внутри себя нули функции μ. Занумеруем их $U_1, \ldots, U_{j_1-1}$. Тем самым покрыты все нули в квадрате $\|z\| \leqslant r_1$ и даже, возможно, некоторые дополнительные нули.

Рассмотрим теперь компоненты множества $U^{(2)}$, пересекающиеся с $r_1 < \|z\| \leqslant r_2$ и имеющие внутри себя нули, не покрытые на предыдущем шаге. Возьмем находящиеся в них компоненты $U^{(1)}$, содержащие указанные нули. Обозначим их $U_{j_1}, \ldots, U_{j_2-1}$. Они автоматически содержатся в области $\|z\| > r_1$. На данном шаге точно покрыты все нули в $\|z\| \leqslant r_2$ и, возможно, еще часть.

Проведем еще один этап построения. Выберем связные компоненты множества $U^{(3)}$, пересекающиеся с $r_2 < \|z\| \leqslant r_3$ и содержащие еще не покрытые нули функции μ. Эти нули попадают в какие-то компоненты множества $U^{(2)}$, которые не рассматривались на предыдущем шаге, а значит, во-первых, не пересекаются с $U_1, \ldots, U_{j_2-1}$, а во-вторых, целиком находятся в области $\|z\| > r_2$. Занумеруем их $U_{j_2}, \ldots, U_{j_3-1}$.

Продолжая этот процесс далее, получим открытое покрытие $(U_j)_{j=1}^\infty$ множества N_μ, обладающее следующими свойствами. Во-первых, при каждом $k \in \mathbb{N}$ для $j_k \leqslant j < j_{k+1}$

$$\ln|\mu(z)| < -\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} z) - \varepsilon_k |\operatorname{Im} z|, \quad z \in U_j. \tag{8}$$

Во-вторых, $U_j \subset \{z \in \mathbb{C} : \|z\| > r_k\}$ при тех же j и k, а для $\operatorname{diam}(U_j)$ имеют место следующие оценки:

а) Если в U_j есть точка z_j с $|\operatorname{Im} z_j| \leqslant \delta_k |\operatorname{Re} z_j|$, то

$$\operatorname{diam}(U_j) \leqslant 2\delta_k \omega(\operatorname{Re} z_j) + 2\delta_k |\operatorname{Im} z_j|; \tag{9}$$

б) Если же в U_j таких точек нет, то

$$\operatorname{diam}(U_j) \leqslant 8\delta_k |\operatorname{Im} z_j|, \tag{10}$$

где z_j — произвольно взятая точка из U_j.

Обозначим $m_j := \sum_{\lambda_s \in U_j} k_s$, $j \in \mathbb{N}$.

В следующей лемме для $|\mu|$ устанавливается оценка снизу в некоторой окрестности границы множества U_j. Для $j_k \leqslant j < j_{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$ положим

$$\sigma_j := \min_{z \in \overline{U}_j} e^{-4\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} z) - 4\varepsilon_k |\operatorname{Im} z|}.$$

Через $(\partial U_j)(\sigma_j)$ будем обозначать σ_j-окрестность границы ∂U_j множества U_j, т. е. $(\partial U_j)(\sigma_j) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, \partial U_j) < \sigma_j\}$, где $d(z, \partial U_j)$ — расстояние от z до ∂U_j.

Лемма 2. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $j_k \leqslant j < j_{k+1}$. Тогда для всех $z \in (\partial U_j)(\sigma_j)$*

$$\ln|\mu(z)| \geqslant -3\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} z) - 3\varepsilon_k |\operatorname{Im} z|. \tag{11}$$

$\lhd$ Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$, $j_k \leqslant j < j_{k+1}$ и $z \in (\partial U_j)(\sigma_j)$. Найдем точку $\zeta \in \partial U_j$ с $|z-\zeta| < \sigma_j$, а затем точку η, лежащую между z и ζ и такую, что $\mu(z) = \mu(\zeta) + \mu'(\eta)(z-\zeta)$. Введем для краткости обозначение $B := \varepsilon_k \omega(\operatorname{Re}\zeta) + \varepsilon_k |\operatorname{Im}\zeta|$. Так как $\zeta \in \partial U_j$, то $|\zeta| \geqslant r_k$, так что $B > 2$ на основании (4). Кроме того, $|\mu(\zeta)| \geqslant e^{-B}$.

Оценим $|\mu'(\eta)|$. Имеем, что $|\mu'(\eta)| \leqslant \max\{|\mu(\xi)| : |\xi-\eta| \leqslant 1\} \leqslant \max\{|\mu(\xi)| : |\xi-\zeta| \leqslant 2\}$. Так как для всех ξ с $|\xi-\zeta| \leqslant 2$ выполняется неравенство $|\xi| \geqslant |\zeta|-2 \geqslant r_k-2$, то в силу (6) и (7)

$$|\mu(\xi)| \leqslant e^{\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re}\xi) + \varepsilon_k |\operatorname{Im}\xi|} \leqslant e^{\varepsilon_k \omega(|\operatorname{Re}\zeta|+2) + \varepsilon_k (|\operatorname{Im}\zeta|+2)} \leqslant e^{2B}.$$

Значит, $|\mu'(\eta)| \leqslant e^{2B}$. Таким образом,

$$|\mu(z)| \geqslant |\mu(\zeta)| - |\mu'(\eta)|\sigma_j \geqslant e^{-B} - e^{2B}e^{-4B} = e^{-B} - e^{-2B} > e^{-\frac{3B}{2}}.$$

Снова применяя оценку (7), которая обеспечивает

$$\frac{3B}{2} \leqslant \frac{3}{2}\big(\varepsilon_k \omega(|\operatorname{Re} z|+1) + \varepsilon_k(|\operatorname{Im} z|+1)\big) \leqslant 3\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} z) + 3\varepsilon_k |\operatorname{Im} z|,$$

получаем нужное неравенство (11). $\rhd$

В заключение параграфа докажем две полезные технические леммы, которые будут использоваться в дальнейшем.

Лемма 3. *Для любых положительных чисел q, l и ε найдется постоянная $C > 0$ такая, что при всех $j \in \mathbb{N}$ и $z \in U_j$*

$$q\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z| \leqslant (q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z_j) + (l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z_j| + C, \tag{12}$$

$$q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j| \leqslant (q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + (l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z| + C. \tag{13}$$

$\lhd$ Установим сначала неравенство (12). Зафиксируем q, l и ε. Поскольку, как известно, $\lim_{\alpha\uparrow 1}\limsup_{t\to\infty} \frac{\omega(\alpha t)}{\omega(t)} = 1$, а $\delta_k \downarrow 0$, то существуют $\tilde{k} \in \mathbb{N}$ и $C_1 > 0$ такие, что

$$q\omega\big((1+4\delta_{\tilde{k}})t\big) \leqslant \Big(q + \frac{\varepsilon}{2}\Big)\omega(t) + C_1, \quad t \geqslant 0, \tag{14}$$

$$2l\delta_{\tilde{k}} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{15}$$

$$\big(l + q\delta_{\tilde{k}}\big)\big(1 + 8\delta_{\tilde{k}}\big) < l + \varepsilon. \tag{16}$$

Пусть $j \geqslant j_{\tilde{k}}$. Найдем $k \geqslant \tilde{k}$ такое, что $j_k \leqslant j < j_{k+1}$. Рассмотрим отдельно случаи а) и б) расположения множества U_j.

а) Если U_j позволяет выбрать точку $z_j \in U_j$ с $|\operatorname{Im} z_j| \leqslant \delta_k |\operatorname{Re} z_j|$, то для $\operatorname{diam}(U_j)$ справедлива оценка (9), так что для произвольной точки $z \in U_j$ с учетом (5) имеем

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} z| &\leqslant |\operatorname{Re} z_j| + \operatorname{diam}(U_j) \leqslant (1+4\delta_k)|\operatorname{Re} z_j|, \\ |\operatorname{Im} z| &\leqslant |\operatorname{Im} z_j| + \operatorname{diam}(U_j) \leqslant 2\delta_k \omega(\operatorname{Re} z_j) + (1+2\delta_k)|\operatorname{Im} z_j|. \end{aligned} \tag{17}$$

Следовательно, на основании (14)–(16)

$$\begin{aligned} q\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z| &\leqslant q\omega\big((1+4\delta_k)\operatorname{Re} z_j\big) + l\big(2\delta_k\omega(\operatorname{Re} z_j) + (1+2\delta_k)|\operatorname{Im} z_j|\big) \\ &\leqslant \Big(q + \frac{\varepsilon}{2} + 2l\delta_k\Big)\,\omega(\operatorname{Re} z_j) + l(1+2\delta_k)|\operatorname{Im} z_j| + C_1 \\ &< (q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z_j) + (l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z_j| + C_1. \end{aligned}$$

б) Пусть теперь $|\operatorname{Im} z| > \delta_k|\operatorname{Re} z|$ для всех $z \in U_j$. Зафиксируем $z \in U_j$. Если $\|z\| = |\operatorname{Re} z|$, то $|\operatorname{Re} z| > r_k$ и в силу (5)

$$q\omega(\operatorname{Re} z) \leqslant q\delta_k^2|\operatorname{Re} z| < q\delta_k|\operatorname{Im} z|.$$

А если $\|z\| = |\operatorname{Im} z|$, то $|\operatorname{Im} z| > r_k$, так что снова на основании (5)

$$q\omega(\operatorname{Re} z) \leqslant q\omega\left(\frac{1}{\delta_k}|\operatorname{Im} z|\right) \leqslant q\delta_k^2\frac{1}{\delta_k}|\operatorname{Im} z| = q\delta_k|\operatorname{Im} z|.$$

Таким образом, для всех $z \in U_j$

$$\begin{aligned} q\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z| &\leqslant (l+q\delta_k)|\operatorname{Im} z| \leqslant (l+q\delta_k)\big(|\operatorname{Im} z_j| + \operatorname{diam}(U_j)\big) \\ &\leqslant (l+q\delta_k)(1+8\delta_k)|\operatorname{Im} z| < (l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z|\,. \end{aligned}$$

Объединяя теперь случаи а) и б) и полагая $C := C_1 + \max\{q\omega(\operatorname{Re} z) + l|\operatorname{Im} z| : z \in \overline{U}_j, 1 \leqslant j \leqslant j_{\tilde k}\}$, получим неравенство (12).

Докажем неравенство (13). Заметим, что если множество U_j расположено как в пункте б), то точки z и z_j равноправны (обе — произвольные точки U_j), так что в (12) их можно просто поменять местами и получить (13). Соответственно, (13) нужно установить лишь для U_j из пункта а). В данном случае выберем $\tilde k \in \mathbb{N}$ и $C_1 > 0$ так, чтобы

$$\big(q + 4l\delta_{\tilde k}\big)\omega\bigg(\frac{1}{1-4\delta_{\tilde k}}\,t\bigg) < (q+\varepsilon)\omega(t) + C_1, \tag{18}$$

$$\frac{l}{1-2\delta_{\tilde k}} < l + \varepsilon\,. \tag{19}$$

Для $j \geqslant j_{\tilde k}$ находим $k \in \mathbb{N}$ такое, что $j_k \leqslant j < j_{k+1}$. Тогда аналогично (17)

$$|\operatorname{Re} z_j| \leqslant |\operatorname{Re} z| + \operatorname{diam}(U_j) \leqslant |\operatorname{Re} z| + 4\delta_k|\operatorname{Re} z_j|,$$

откуда $|\operatorname{Re} z_j| \leqslant \frac{1}{1-4\delta_k}|\operatorname{Re} z|$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} z_j| &\leqslant |\operatorname{Im} z| + \operatorname{diam}(U_j) \leqslant |\operatorname{Im} z| + 2\delta_k\omega(\operatorname{Re} z_j) + 2\delta_k|\operatorname{Im} z_j| \\ &\leqslant |\operatorname{Im} z| + 2\delta_k\omega\Big(\frac{1}{1-4\delta_k}\ \operatorname{Re} z\Big) + 2\delta_k|\operatorname{Im} z_j|, \end{aligned}$$

так что

$$|\operatorname{Im} z_j| \leqslant \frac{1}{1-2\delta_k}\Big(|\operatorname{Im} z| + 2\delta_k\omega\Big(\frac{1}{1-4\delta_k}\operatorname{Re} z\Big)\Big).$$

Тогда окончательно на основании (18) и (19) имеем

$$\begin{aligned} q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j| &\leqslant \Big(q + \frac{2l\delta_k}{1-2\delta_k}\Big)\omega\Big(\frac{1}{1-4\delta_k}\ \operatorname{Re} z\Big) + \frac{l}{1-2\delta_k}|\operatorname{Im} z| \\ &< (q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + (l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z| + C_1. \end{aligned}$$

Полагая $C := C_1 + \max\big\{q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j| : 1 \leqslant j \leqslant j_{\tilde k}\big\}$, получаем (13). ▷

Лемма 4. *Имеют место соотношения*

$$\lim_{j\to\infty}\frac{j}{|z_j|}=0,\quad \lim_{j\to\infty}\frac{m_j}{|z_j|}=0.$$

$\lhd$ Как обычно, через $n_\mu(r)$ будем обозначать считающую функцию нулей целой функции μ, т. е. $n_\mu(r)=\sum_{|\lambda_s|\leqslant r}k_s$. Поскольку μ имеет нулевой тип при порядке 1, то $n_\mu(r)=o(r)$ при $r\to\infty$. Далее, в силу условия (α') на вес ω с учетом $\omega(1)=0$ найдется $A>1$, при котором $\omega(t)\leqslant At$ для всех $t\geqslant 0$. Если теперь подобрать $\tilde k\in\mathbb{N}$ так, чтобы $A\delta_{\tilde k}<1$, то для $j\geqslant j_{\tilde k}$ получим

$$|z_j|+\operatorname{diam}(U_j)\leqslant|z_j|+2\delta_k\omega(\operatorname{Re}z_j)+8\delta_k|\operatorname{Im}z_j|\leqslant(1+10A\delta_k)|z_j|\leqslant 11|z_j|.$$

Так как множества U_j попарно не пересекаются, причем в каждом U_j содержится хотя бы один нуль функции μ, то $j\leqslant n_\mu(|z_j|+\operatorname{diam}(U_j))\leqslant n_\mu(11|z_j|)$ при $j\geqslant j_{\tilde k}$. Отсюда вытекает, что

$$\limsup_{j\to\infty}\frac{j}{|z_j|}\leqslant\limsup_{j\to\infty}\frac{n_\mu(11|z_j|)}{|z_j|}\leqslant 11\limsup_{r\to\infty}\frac{n_\mu(r)}{r}=0.$$

Таким образом, первое соотношение доказано.

Аналогично

$$m_j=\sum_{\lambda_s\in U_j}k_s\leqslant n_\mu(|z_j|+\operatorname{diam}(U_j))\leqslant n_\mu(11|z_j|),\quad j\geqslant j_{\tilde k},$$

так что выполнено и второе доказываемое равенство. $\rhd$

3. Изоморфная реализация $\ker T_\mu$

Данный параграф посвящен изоморфному описанию $\ker T_\mu$, которое устанавливается в три этапа и позволяет в дальнейшем получить основной результат о существовании базиса в $\ker T_\mu$.

Сначала в $H^1_{(\omega),I}$ рассмотрим замкнутый главный идеал, порожденный функцией μ:

$$J=\mu H^1_{(\omega),I}=\left\{g\in H^1_{(\omega),I}\,:\,g^{(l)}(\lambda_s)=0,\ l=0,\dots,k_s-1,\ s=1,2,\dots\right\}$$

и соответствующее факторпространство $H^1_{(\omega),I}/J$, которое, как и само $H^1_{(\omega),I}$, относится к классу (DFS)-пространств. Для $[f]\in H^1_{(\omega),I}/J$ положим

$$|||[f]|||_{\omega,q,l}=\inf_{f\in[f]}\|f\|_{\omega,q,l}=\inf_{h\in J}\|f+h\|_{\omega,q,l},\quad q\in(0,1),\quad l\in(0,a).$$

Тогда фактортопология в $H^1_{(\omega),I}/J$ — это топология индуктивного предела семейства банаховых пространств $\{[f]:\,|||[f]|||_{\omega,q,l}<\infty\}$, $q\in(0,1)$, $l\in(0,a)$.

Из общей теории двойственности с учетом свойств (FS) и (DFS)-пространств стандартным образом вытекает

Лемма 5. *Отображение* $\Phi:\ker T_\mu\to\left(H^1_{(\omega),I}/J\right)'$, *действующее по правилу*

$$\langle\Phi f,[g]\rangle=\left\langle f,F^{-1}(g)\right\rangle,\quad f\in\ker T_\mu,\quad [g]\in H^1_{(\omega),I}/J,$$

устанавливает топологический изоморфизм между $\ker T_\mu$ *и* $(H^1_{(\omega),I}/J)'_\beta$.

Перейдем теперь к изоморфной реализации факторпространства $H^1_{(\omega),I}/J$ и, как следствие, его сильного сопряженного $(H^1_{(\omega),I}/J)'_\beta$. Пусть $(U_j)_{j=1}^\infty$ — построенное в § 2 покрытие нулевого множества функции μ. Как обычно, через $H^\infty(U_j)$ будем обозначать пространство всех ограниченных аналитических в U_j функций с нормой $\|g\|_{\infty,j} = \sup_{z\in U_j}|g(z)|$. Рассмотрим замкнутые подпространства этих пространств

$$J_j = \big\{g \in H^\infty(U_j) : g^{(l)}(\lambda_s) = 0,\, l = 0,\dots,k_s-1,\, \lambda_s \in U_j\big\}$$

и соответствующие факторпространства $X_j := H^\infty(U_j)/J_j$, $j \in \mathbb{N}$. По построению $|\mu|$ отграничен от нуля в некоторой окрестности ∂U_j, так что в X_j класс $[f]$, $f \in H^\infty(U_j)$, совпадает с $\{f + \mu g : g \in H^\infty(U_j)\}$. Норма класса $[f]$ равна

$$|||[f]|||_{\infty,j} = \inf_{f\in[f]}\|f\|_{\infty,j} = \inf_{g\in H^\infty(U_j)}\|f+\mu g\|_{\infty,j} = \inf_{g\in H^\infty(U_j)}\sup_{z\in U_j}|f(z)+\mu(z)g(z)|.$$

Понятно, что все X_j конечномерны, причем $\dim X_j = m_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Обозначим $X := \prod_{j=1}^\infty X_j$ и введем в рассмотрение следующий весовой подкласс класса X:

$$k^\infty = \left\{\varphi = \big([\varphi_j]\big)_{j=1}^\infty \in X : \,(\exists\, q\in(0,1))\,(\exists\, l\in(0,a))\; \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l} = \sup_{j\geqslant 1}\frac{|||[\varphi_j]|||_{\infty,j}}{e^{q\omega(\operatorname{Re} z_j)+l|\operatorname{Im} z_j|}} < \infty\right\}.$$

Пространство k^∞ наделяется естественной индуктивной топологией и является в ней (DFS)-пространством.

Лемма 6. *Отображение* $\rho : [f] \in H^1_{(\omega),I}/J \mapsto \big([f|_{U_j}]\big)_{j=1}^\infty$ *устанавливает топологический изоморфизм между* $H^1_{(\omega),I}/J$ *и* k^∞.

$\lhd$ Инъективность отображения ρ очевидна. Далее, зафиксируем $q\in(0,1)$, $l\in(0,a)$ и возьмем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $q+\varepsilon<1$, $l+\varepsilon<a$. В силу леммы 3 найдется $C>0$, при котором выполнено неравенство (12). Для $[f]\in H^1_{(\omega),I}/J$ имеем

$$\begin{aligned}|||[f|_{U_j}]|||_{\infty,j} &= \inf_{g\in H^\infty(U_j)}\sup_{z\in U_j}|f(z)+\mu(z)g(z)| \leqslant \inf_{h\in J}\sup_{z\in U_j}|f(z)+h(z)|\\ &\leqslant |||[f]|||_{\omega,q,l}\sup_{z\in U_j}e^{q\omega(\operatorname{Re} z)+l|\operatorname{Im} z|} \leqslant e^C|||[f]|||_{\omega,q,l}\, e^{(q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z_j)+(l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z_j|},\end{aligned}$$

откуда $\widetilde{|\rho([f])|}_{\omega,q+\varepsilon,l+\varepsilon} \leqslant e^C|||[f]|||_{\omega,q,l}$. Это означает, что ρ действует непрерывно из $H^1_{(\omega),I}/J$ в k^∞.

Поскольку для (DFS)-пространств справедлива теорема об открытом отображении, остается проверить лишь сюръекивность ρ. Зафиксируем $\varphi = ([\varphi_j])_{j=1}^\infty \in k^\infty$. Тогда имеются $q\in(0,1)$ и $l\in(0,a)$, при которых $\widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l}<\infty$. Функции $\varphi_j\in H^\infty(U_j)$, представителей классов $[\varphi_j]$, будем считать такими, что $\|\varphi_j\|_{\infty,j} = |||[\varphi_j]|||_{\infty,j}$. Тогда

$$|\varphi_j(z)| \leqslant \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l}\, e^{q\omega(\operatorname{Re} z_j)+l|\operatorname{Im} z_j|}, \quad z\in U_j, \quad j\in\mathbb{N}. \tag{20}$$

Возьмем $\varepsilon>0$ так, чтобы $q+9\varepsilon<1$, $l+9\varepsilon<a$. Найдем $\tilde k\in\mathbb{N}$ такое, что $\varepsilon_{\tilde k}<\varepsilon$.

1) Для $j\in\mathbb{N}$ введем в рассмотрение множества $V_j = \{z\in U_j : d(z,\partial U_j)\geqslant\sigma_j\}$, где, как и выше, $\sigma_j = \min\{e^{-4\varepsilon_k\omega(\operatorname{Re} z)-4\varepsilon_k|\operatorname{Im} z|} : z\in\overline{U}_j\}$. В соответствии с леммой 2 для всех $z\in U_j\setminus V_j$ выполняется неравенство (11), из чего, во-первых, следует, что $N_\mu\subset\bigcup_j V_j$, а во-вторых, что

$$\ln|\mu(z)| \geqslant -3\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z) - 3\varepsilon|\operatorname{Im} z|, \quad z\in U_j\setminus V_j, \quad j\geqslant j_{\tilde k}. \tag{21}$$

Как известно, существует бесконечно дифференцируемая в $\mathbb{R}^2$ функция g, обладающая свойствами

$$g(z) \equiv 1 \text{ на } \bigcup_j V_j, \quad \operatorname{supp} g \subset \bigcup_j U_j, \quad 0 \leqslant g(z) \leqslant 1 \text{ в } \mathbb{C}.$$

При этом

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z)\right| \leqslant \frac{C_0}{\sigma_j}, \quad z \in U_j \setminus V_j,$$

где C_0 от j не зависит. В силу выбора чисел σ_j найдется точка $\tilde{z}_j \in \overline{U_j}$ такая, что $\sigma_j = \exp(-4\varepsilon_k \omega(\operatorname{Re} \tilde{z}_j) - 4\varepsilon_k |\operatorname{Im} \tilde{z}_j|)$. Значит, при $j \geqslant j_{\tilde{k}}$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z)\right| \leqslant C_0 e^{4\varepsilon\omega(\operatorname{Re} \tilde{z}_j) + 4\varepsilon |\operatorname{Im} \tilde{z}_j|}, \quad z \in U_j \setminus V_j.$$

Выбрав теперь в соответствии с леммой 3 константу $C_1 > 0$, при которой

$$4\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z) + 4\varepsilon|\operatorname{Im} z| < 5\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) + 5\varepsilon|\operatorname{Im} z_j| + C_1, \quad z \in U_j, \quad j \in \mathbb{N},$$

окончательно получим, что

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z)\right| \leqslant C_0 e^{C_1}\, e^{5\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) + 5\varepsilon|\operatorname{Im} z_j|}. \tag{22}$$

2) Положим теперь

$$\Phi(z) := \begin{cases} \varphi_j(z), & z \in U_j,\ j \in \mathbb{N}, \\ 0, & z \notin \bigcup_j U_j, \end{cases} \qquad h(z) := -\frac{\Phi(z)}{\mu(z)} \cdot \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Функция h будет бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^2$, $h(z) = 0$ при $z \notin \bigcup_j (U_j \setminus V_j)$. Снова пользуясь леммой 3, найдем $C_2 > 0$ такое, что для всех $j \in \mathbb{N}$

$$(q + 5\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z_j) + (l + 5\varepsilon)|\operatorname{Im} z_j| < (q + 6\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + (l + 6\varepsilon)|\operatorname{Im} z| + C_2, \quad z \in U_j.$$

Тогда, объединяя (20)–(22) и полагая $C := C_0\, e^{C_1 + C_2}$, заключаем, что при $z \in U_j \setminus V_j$, $j \geqslant j_{\tilde{k}}$

$$|h(z)| \leqslant C e^{(q+9\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z) + (l+9\varepsilon)|\operatorname{Im} z|}. \tag{23}$$

3) Находим теперь бесконечно дифференцируемую в $\mathbb{R}^2$ функцию v, являющуюся решением $\overline{\partial}$-задачи $\frac{\partial v}{\partial \overline{z}} = h$. При этом $\frac{\partial v}{\partial \overline{z}} = 0$, $z \in V_j$, $j \in \mathbb{N}$, так что v аналитична в каждой из областей V_j.

В качестве искомой функции f возьмем $f(z) = v(z)\mu(z) + \Phi(z)g(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ в $\mathbb{C}$, т. е. $f \in H(\mathbb{C})$. Более того, из (23) стандартным образом вытекает, что $f \in H^1_{(\omega),I}$. При этом в областях V_j, $j \in \mathbb{N}$, функция f совпадает с $v(z)\mu(z) + \varphi_j(z)$, так что $f^{(l)}(\lambda_s) = \varphi_j^{(l)}(\lambda_s)$, $l = 0, \ldots, k_s - 1$, $\lambda_s \in V_j$. Это означает, что $[f|_{U_j}] = [\varphi_j]$ в X_j, $j \in \mathbb{N}$, т. е. $\rho([f]) = \varphi$. $\triangleright$

Следствие. *Отображение*

$$R : \psi \in \left(H^1_{(\omega),I}/J\right)' \mapsto \psi \circ \rho^{-1}$$

устанавливает топологический изоморфизм между $\left(H^1_{(\omega),I}/J\right)'_\beta$ *и* $(k^\infty)'_\beta$.

Завершая настоящий параграф, получим изоморфное описание $(k^\infty)'_\beta$. Пусть X'_j $(j \in \mathbb{N})$ — сопряженное к банахову пространству X_j с сопряженной нормой

$$|||\nu|||'_{\infty,j} = \sup\left\{|\nu([\varphi])| : [\varphi] \in X_j,\ |||[\varphi]|||_{\infty,j} \leqslant 1\right\}.$$

Само X'_j является банаховым пространством размерности m_j. Положим теперь $X' := \prod_{j=1}^\infty X'_j$ и рассмотрим в X' весовой подкласс

$$\lambda^\infty = \Big\{\nu = (\nu_j)_{j=1}^\infty \in X' : (\forall\, q \in (0,1))\,(\forall\, l \in (0,a)) \\ \widetilde{|\nu|}'_{\omega,q,l} = \sup_{j\geqslant 1} |||\nu_j|||'_{\infty,j}\, e^{q\omega(\operatorname{Re} z_j)+l|\operatorname{Im} z_j|} < \infty\Big\}.$$

Понятно, что λ^∞ относится к классу (FS)-пространств.

Наконец, определим еще следующие естественные отображения:

$$s_j : [\varphi_j] \in X_j \mapsto (0, \ldots, 0, \underset{j}{[\varphi_j]}, 0, \ldots) \in k^\infty,$$

$$t_j : \nu_j \in X'_j \mapsto (0, \ldots, 0, \underset{j}{\nu_j}, 0, \ldots) \in \lambda^\infty.$$

Лемма 7. *Отображение* $S : \nu \in (k^\infty)' \mapsto (\nu \circ s_j)_{j=1}^\infty$ *устанавливает топологический изоморфизм между* $(k^\infty)'_\beta$ *и* λ^∞.

$\lhd$ В силу свойств веса ω и достаточно быстрого стремления $|z_j|$ к ∞ (см. лемму 4) получаем, что $\ln j = o(\gamma\omega(\operatorname{Re} z_j)+\gamma|\operatorname{Im} z_j|)$ при $j \to \infty$ для произвольного $\gamma > 0$. Из этого легко следует, что для любого $\varphi = ([\varphi_j])_{j=1}^\infty \in k^\infty$ ряд $\sum_{j=1}^\infty s_j([\varphi_j])$ сходится абсолютно к φ в k^∞. А тогда

$$\nu(\varphi) = \sum_{j=1}^\infty (\nu \circ s_j)([\varphi_j]), \quad \nu \in (k^\infty)',$$

откуда вытекает инъективность отображения S.

Сюръективность S получается из тех же соображений. Достаточно для $(\nu_j)_{j=1}^\infty \in \lambda^\infty$ положить

$$\nu(\varphi) := \sum_{j=1}^\infty \nu_j([\varphi_j]), \quad \varphi = ([\varphi_j])_{j=1}^\infty \in k^\infty.$$

Наконец, поскольку сильная топология в $(k^\infty)'$ задается набором преднорм

$$\widetilde{|\nu|}''_{\omega,q,l} = \sup\left\{|\nu(\varphi)| : \varphi \in k^\infty,\ \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l} \leqslant 1\right\}, \quad q \in (0,1), \quad l \in (0,a),$$

и так как для любого $\nu \in (k^\infty)'$ выполнено

$$\widetilde{|S\nu|}'_{\omega,q,l} = \sup_{j\geqslant 1} e^{q\omega(\operatorname{Re} z_j)+l|\operatorname{Im} z_j|} \sup\left\{|(\nu \circ s_j)([\varphi_j])| : [\varphi_j] \in X_j,\ |||[\varphi_j]|||_{\infty,j} \leqslant 1\right\} \\ = \sup\left\{|\nu(\varphi)| : \varphi \in k^\infty,\ \widetilde{|\varphi|}_{\omega,q,l} \leqslant 1\right\} = \widetilde{|\nu|}''_{\omega,q,l},$$

то S взаимно непрерывно. $\rhd$

Из лемм 5–7 вытекает

Теорема 2. *Отображение* $L := S \circ R \circ \Phi$ *есть топологический изоморфизм* $\ker T_\mu$ *на* λ^∞.

4. Доказательство основного результата

Итак, построенное в § 2 покрытие $(U_j)_{j=1}^{\infty}$ множества N_μ разбило нули функции μ и соответствующие им элементарные решения однородного уравнения свертки на группы. Введем в рассмотрение линейные оболочки этих групп решений:

$$E_j := \operatorname{span}\bigl\{(-ix)^l e^{-i\lambda_s x} : \, l = 0, \ldots, k_s - 1, \; \lambda_s \in U_j\bigr\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Множество E_j является подпространством размерности m_j в $\ker T_\mu$.

Лемма 8. *Для отображения L из теоремы 2 справедливы равенства $L(E_j) = t_j(X_j')$, $j \in \mathbb{N}$.*

$\lhd$ Отображение $\delta^l_{\lambda_s} : [g] \mapsto g^{(l)}(\lambda_s)$, $s \in \mathbb{N}$, $l = 0, \ldots, k_s - 1$, является линейным непрерывным функционалом на $H^1_{(\omega),I}/J$. Для тех $s \in \mathbb{N}$, при которых $\lambda_s \in U_j$, можно рассмотреть «сужение» $\delta^l_{\lambda_s}|_{X_j}$ этого отображения на пространство X_j. Непосредственно проверяется, что в пространстве λ^∞ при каждом $j \in \mathbb{N}$ для $s \in \mathbb{N}$ с $\lambda_s \in U_j$ и $l = 0, \ldots, k_s - 1$ выполняется равенство $L((-ix)^l e^{-i\lambda_s x}) = t_j \circ \delta^l_{\lambda_s}|_{X_j}$. Из этого следует, что $L(E_j) \subset t_j(X_j')$. Учитывая еще, что $\dim L(E_j) = \dim E_j = m_j$ и $\dim t_j(X_j') = \dim X_j' = m_j$, заключаем, что имеет место равенство $L(E_j) = t_j(X_j')$. $\rhd$

Лемма 9. *В пространстве λ^∞ имеется абсолютный базис вида*

$$\bigl\{t_j(\nu_{j,p}) : \, p = 1, \ldots, m_j, \; j \in \mathbb{N}\bigr\}, \tag{24}$$

где $\{\nu_{j,p} : p = 1, \ldots, m_j\}$ — некоторый базис в X_j', $j \in \mathbb{N}$.

$\lhd$ Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$. В соответствии с леммой Ауэрбаха (см. [13, 10.5]) в X_j и X_j' можно выбрать базисы $\{[\varphi_{j,p}] : p = 1, \ldots, m_j\}$ и $\{\nu_{j,p} : p = 1, \ldots, m_j\}$ такие, что

$$|||[\varphi_{j,p}]|||_{\infty,j} = 1, \quad |||\nu_{j,p}|||'_{\infty,j} = 1, \quad p = 1, \ldots, m_j;$$

$$\langle [\varphi_{j,p}], \nu_{j,m} \rangle = \delta_{pm} = \begin{cases} 1, & p = m, \\ 0, & p \neq m. \end{cases}$$

При этом разложение произвольного элемента $\nu_j \in X_j'$ по базису $\{\nu_{j,p} : p = 1, \ldots, m_j\}$ имеет вид

$$\nu_j = \sum_{p=1}^{m_j} \langle [\varphi_{j,p}], \nu_j \rangle \nu_{j,p}.$$

В пространстве λ^∞ теперь для произвольного элемента $\nu = (\nu_j)_{j=1}^\infty$ рассмотрим ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{m_j} \langle [\varphi_{j,p}], \nu_j \rangle t_j(\nu_{j,p}). \tag{25}$$

Возьмем произвольные $q \in (0,1)$ и $l \in (0,a)$. Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $q + \varepsilon < 1$, $l + \varepsilon < a$. Для всех $j \in \mathbb{N}$ и $p = 1, \ldots, m_j$

$$|\widetilde{t_j(\nu_{j,p})}|'_{\omega,q,l} = e^{q\omega(\operatorname{Re} z_j) + l|\operatorname{Im} z_j|}, \tag{26}$$

$$|\langle [\varphi_{j,p}], \nu_j \rangle| \leqslant |\widetilde{\nu}|'_{\omega,q+\varepsilon,l+\varepsilon} e^{-(q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z_j) - (l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z_j|}.$$

Далее, в силу свойства (γ) веса ω найдется $C > 0$ такое, что $\varepsilon\omega(\operatorname{Re} z_j) + \varepsilon|\operatorname{Im} z_j| \geqslant 3\ln(1 + |z_j|) - C$ при всех $j \in \mathbb{N}$. В свою очередь, из леммы 4 вытекает, что $A := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_j}{(1+|z_j|)^3} < \infty$. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{m_j} \big|\langle[\varphi_{j,p}], \nu_j\rangle\big| \cdot \big|\widetilde{t_j(\nu_{j,p})}\big|'_{\omega,q,l}$$
$$\leqslant \big|\widetilde{\nu}\big|'_{\omega,q+\varepsilon,l+\varepsilon} \sum_{j=1}^{\infty} m_j \frac{e^{q\omega(\operatorname{Re} z_j)+l|\operatorname{Im} z_j|}}{e^{(q+\varepsilon)\omega(\operatorname{Re} z_j)+(l+\varepsilon)|\operatorname{Im} z_j|}} \leqslant Ae^C \big|\widetilde{\nu}\big|'_{\omega,q+\varepsilon,l+\varepsilon}.$$

Таким образом, ряд (25) сходится абсолютно в λ^∞. Понятно, что его сумма совпадает с ν. Ясно также, что разложение элемента ν по системе (24) обязательно имеет вид (25), а значит, оно единственно. $\rhd$

В качестве следствия теперь легко получается основной результат работы. Сформулируем его несколько более точно, чем во введении.

Теорема 3. *Пусть $\mu \in M^1_{(\omega)}$ удовлетворяет условию (SC). В пространстве решений однородного уравнения свертки $T_\mu f = 0$ имеется абсолютный базис*

$$\big\{e_{j,p} : p = 1, \dots, m_j,\ j \in \mathbb{N}\big\}, \tag{27}$$

состоящий из элементов $e_{j,p}$ $(p = 1, \dots, m_j)$ подпространств E_j, натянутых на элементарные решения $(-ix)^l e^{-i\lambda_s x}$ $(l = 0, \dots, k_s - 1,\ \lambda_s \in U_j)$ этого уравнения.

$\lhd$ Положим $e_{j,p} := L^{-1}(t_j(\nu_{j,p}))$, $p = 1, \dots, m_j$, $j \in \mathbb{N}$, где $\{t_j(\nu_{j,p}) : p = 1, \dots, m_j,\ j \in \mathbb{N}\}$ — абсолютный базис в λ^∞ из леммы 6. В силу леммы 8 тогда $e_{j,p} \in E_j$, $p = 1, \dots, m_j$, $j \in \mathbb{N}$. Поскольку L — топологический изоморфизм $\ker T_\mu$ на λ^∞, то (27) — абсолютный базис в $\ker T_\mu$. $\rhd$

В заключение работы заметим, что полученные результаты позволяют отождествить $\ker T_\mu$ с некоторым пространством степенных рядов конечного типа, что может быть полезно в различных вопросах (по поводу пространств степенных рядов см. [10]). Пусть m_j, $j \in \mathbb{N}$, те же, что и выше, а $m_0 := 0$. Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$. Для k такого, что $\sum_{l=0}^{j-1} m_l < k \leqslant \sum_{j=0}^{j} m_l$ положим $\alpha_k := \omega(\operatorname{Re} z_j) + |\operatorname{Im} z_j|$. Рассмотрим пространство степенных рядов конечного типа, порожденных последовательностью $\alpha = (\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$:

$$\Lambda(\alpha) = \Big\{\xi = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : (\forall\, n \in \mathbb{N})\ \ \|\xi\|_n = \sup_{k\geqslant 1} |\xi_k| e^{-\frac{\alpha_k}{n}} < \infty\Big\}.$$

Теорема 4. *Пространства $\ker T_\mu$ и $\Lambda(\alpha)$ изоморфны.*

$\lhd$ Из тех же соображений, которые использовались в конце доказательства леммы 9, вытекает, что единичные орты (e_k) образуют абсолютный базис пространства $\Lambda(\alpha)$. При этом для $\sum_{l=0}^{j-1} m_l < k \leqslant \sum_{j=0}^{j} m_l$

$$\|e_k\|_n = e^{-\frac{\alpha_k}{n}} = e^{-\frac{1}{n}\omega(\operatorname{Re} z_j) - \frac{1}{n}|\operatorname{Im} z_j|}. \tag{28}$$

Установим взаимно однозначное соответствие Q между абсолютным базисом $\{t_j(\nu_{j,p}) : p = 1, \dots, m_j,\ j \in \mathbb{N}\}$ пространства λ^∞ и абсолютным базисом $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ пространства $\Lambda(\alpha)$, положив для $j \in \mathbb{N}$ и $p = 1, \dots, m_j$

$$Q\big(t_j(\nu_{j,p})\big) = e_{m_0+\ldots+m_{j-1}+p}\, e^{\omega(\operatorname{Re} z_j)+|\operatorname{Im} z_j|}.$$

Топология в λ^∞ может быть задана набором норм

$$\Big(\widetilde{|\cdot|}'_{\omega,1-\frac{1}{n},\,a-\frac{1}{n}}\Big)_{n=n_0}^{\infty}\qquad\Big(n_0\geqslant 2: a-\frac{1}{n}>0\Big).$$

Из (26) и (28) вытекает, что

$$\big\|Q\big(t_j(\nu_{j,p})\big)\big\|_n=\big|\widetilde{t_j(\nu_{j,p})}\big|'_{\omega,1-\frac{1}{n},\,a-\frac{1}{n}}$$

при всех n. Значит, отображение Q взаимно непрерывно, т. е. Q — топологический изоморфизм λ^∞ на $\Lambda(\alpha)$. Соответственно, $L\circ Q$ — топологический изоморфизм $\ker T_\mu$ на $\Lambda(\alpha)$. $\triangleright$

Литература

1. *Абанин А. В., Филипьев И. А.* Аналитическая реализация пространств, сопряженных к пространствам бесконечно дифференцируемых функций // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 3.—С. 485–500.
2. *Абанина Д. А.* Разрешимость уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций Бёрлинга нормального типа на интервале // Сиб. мат. журн.—2011.—(Принята к печати).
3. *Жаринов В. В.* Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 34, № 4.—С. 97—131.
4. *Красичков-Терновский И. Ф.* Одна геометрическая лемма, полезная в теории целых функций, и теоремы типа Левинсона // Мат. заметки.—1978.—Т. 24, № 4.—С. 531–546.
5. *Кривошеев А. С.* Базис Шаудера в пространстве решений однородного уравнения свертки // Мат. заметки.—1995.—Т. 57, вып. 1.—С. 57–71.
6. *Леонтьев А. Ф.* Дифференциально-разностные уравнения // Мат. сб.—1949.—Т. 24.—С. 347–374.
7. *Напалков В. В.* О базисе в пространстве решений уравнения свертки // Мат. заметки.—1988.—Т. 43, вып. 1.—С. 44–55.
8. *Berenstein C. A., Taylor B. A.* A new look at interpolation theory for entire functions of one variable // Adv. in Math.—1979.—Vol. 33.—P. 109–143.
9. *Ehrenpreis L.* Fourier analysis in several complex variables.—New York: Wiley Interscience, 1970.—506 p.
10. *Meise R.* Sequence space representation for (DFN)-algebras of entire functions modulo closed ideals // J. Reine Angew. Math.—1985.—Vol. 363.—P. 59–95.
11. *Meise R., Schwerdtfeger K., Taylor B. A.* On kernels of slowly decreasing convolution operators // Doga Tr. J. Math.—1986.—Vol. 10, № 1.—P. 176–197.
12. *Meise R., Taylor B. A., Vogt D.* Equivalence of slowly decreasing conditions and local Fourier expansions // Indiana Univ. Math. J.—1987.—Vol. 36, № 4.—P. 729–756.
13. *Meise R., Vogt D.* Introduction to functional analysis.—Oxford: Univ. Press, 1997.—437 p.
14. *Meyer T.* Surjectivity of convolution operators on spaces of ultradifferentialble functions of Roumieu type // Studia Math.—1997.—Vol. 125, № 2.—P. 101–129.
15. *Schwartz L.* Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques // Ann. of Math.—1947.—Vol. 48.—P. 857–929.

Статья поступила 7 июля 2011 г.

Абанина Дарья Александровна
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
научный сотрудник лаб. комплексного анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Южный федеральный университет,
доцент кафедры математического анализа
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: abanina@math.rsu.ru

EXPONENTIAL-POLYNOMIAL BASIS FOR NULL SPACES OF CONVOLUTION OPERATORS IN CLASSES OF ULTRADIFFERENTIABLE FUNCTIONS

Abanina D. A.

We consider a homogeneous convolution equation in the Beurling class of ultradifferentiable functions of mean type on the interval. It is obtained that in the space of its solutions there is an exponential-polynomial basis.

Key words: ultradifferentiable functions, convolution equation, exponential-polynomial basis.