Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 4, С. 28–34

УДК **517.98**

ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ПРОДОЛЖЕНИИ РЕГУЛЯРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ОРТОГОНАЛЬНО АДДИТИВНЫХ ПОЛИНОМОВ[1]

З. А. Кусраева

В работе устанавливается существование «одновременного продолжения» регулярных ортогонально аддитивных однородных полиномов. Дается также характеризация крайних продолжений положительного ортогонально аддитивного однородного полинома.

Ключевые слова: векторная решетка, однородный полином, положительный полилинейный оператор, регулярный полином, ортогональная аддитивность, крайние продолжения.

Полиномы от бесконечного числа переменных или полиномы в бесконечномерных пространствах встречаются в математических исследованиях уже более ста лет, см. [1, § 1.5]. Однако, несмотря на то, что область определения полинома часто является векторной или банаховой решеткой, порядковые свойства полиномов стали привлекать внимание совсем недавно (см., например, [2–9]).

В настоящей заметке рассматривается вопрос о продолжении однородных ортогонально аддитивных полиномов, действующих в векторных решетках. В [7, теорема 14] установлена теорема Канторовича о продолжении для однородных положительных полиномов, т. е. возможность продолжения однородного положительного полинома с мажорирующей подрешетки на всю векторную решетку с сохранением положительности и однородности. Если рассматриваемый положительный полином ортогонально аддитивен, то его положительное продолжение можно выбрать также ортогонально аддитивным. Однако имеет место более сильное утверждение: будет установлено (теорема 4) существование «одновременного продолжения» регулярных ортогонально аддитивных однородных полиномов. Кроме того, дается характеризация крайних продолжений положительного ортогонально аддитивного однородного полинома (теорема 6).

Необходимые сведения имеются в книгах [1, 10]. Всюду ниже E, F и G — архимедовы вещественные векторные решетки.

1. Зафиксируем терминологию и обозначения. Прежде всего введем нужные нам классы полиномов.

Пусть $s \in \mathbb{N}$. Отображение $P : E \to F$ называется *однородным полиномом степени s* (или *s-однородным полиномом*), если существует s-линейный оператор $\varphi : E^s \to F$ такой, что

$$P(x) = \varphi(x, \dots, x) \quad (x \in E).$$

При этом полилинейный оператор φ называют *порождающим* для P. Для каждого однородного полинома существует лишь один симметричный порождающий оператор. Однородный полином $P : E \to F$ называют *ортогонально аддитивным*, если $|x| \wedge |y| = 0$ влечет $P(x + y) = P(x) + P(y)$ для любых $x, y \in E$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 09-01-00442.

Полилинейный оператор $\varphi : E^s \to F$ называется *ортосимметричным*, если $\varphi(x_1, \dots, x_s) = 0$, как только $|x_i| \wedge |x_j| = 0$ для некоторых $1 \leqslant i, j \leqslant s$, $i \neq j$, *положительным*, если $\varphi(x_1, \dots, x_s) \geqslant 0$ для любых $0 \leqslant x_1, \dots, x_s \in E$, и *орторегулярным*, если он представим в виде разности двух положительных ортосимметричных операторов.

Разностный оператор Δ^k, $k \in \mathbb{N}$, определяется рекурсией по k:

$$\Delta^1 P(x; h_1) = P(x + h_1) - P(x),$$

$$\Delta^k P(x, h_1, \dots, h_k) = \Delta^1 \big(\Delta^{k-1} P(\,\cdot\,; h_1, \dots, h_{k-1})\big)(x; h_k),$$

где $x, h_1, \dots, h_k \in E$.

Пусть Δ — множество всех функций $\delta : \{1, \dots, k\} \to \{0, 1\}$ и δ^+ обозначает число элементов в множестве $\delta^{-1}(1)$. Справедлива *поляризационная формула*:

$$\Delta^k P(x, h_1, \dots, h_k) = \sum_{\delta \in \Delta} (-1)^{k - \delta^+} P\left(x + \delta(1) h_1 + \ldots + \delta(k) h_k\right). \tag{1}$$

Порождающий полилинейный оператором φ произвольного s-однородного полинома P может быть восстановлен по формуле

$$\varphi(h_1, \dots, h_s) = \frac{1}{s!} \Delta^s P(x; h_1, \dots, h_s). \tag{2}$$

Однородный полином $P : E \to F$ степени s называют *положительным,* если $\Delta^s P(x, h_1, \dots, h_k) \geqslant 0$ для всех $x, h_j \in E_+$, и *регулярным*, если он представим в виде разности двух s-однородных положительных полиномов. Можно показать, что полином положителен тогда и только только тогда, когда положителен порождающий его полилинейный оператор (см. [7, теорема 14]).

Обозначим через $\mathscr{P}^{\sim}_{oa}({}^sE, F)$ и $\mathscr{P}^{r}_{oa}({}^sE, F)$ пространство s-однородных ортогонально аддитивных полиномов из E в F порядково ограниченных и регулярных соответственно. Как видно, $\mathscr{P}^{r}_{oa}({}^sE, F) \subset \mathscr{P}^{\sim}_{oa}({}^sE, F)$, причем оба пространства упорядочены конусом положительных полиномов, т. е. $P_1 \geqslant P_2$ означает, что полином $P_1 - P_2$ положителен. Пусть $L^{\sim}_{o}({}^sE, F)$ и $L^{r}_{o}({}^sE, F)$ обозначают соответственно пространства порядково ограниченных s-линейных ортосимметричных операторов и s-линейных орторегулярных операторов из E^s в F. Оба эти пространства упорядочены посредством конуса положительных s-линейных ортосимметричных операторов.

2. Сформулируем теперь необходимые в дальнейшем вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть Q — компакт, а E — равномерно плотная подрешетка $C(Q)$. Тогда порядково ограниченный ортогонально аддитивный s-однородный полином P_0 из E в равномерно полную векторную решетку G допускает единственное продолжение до порядково ограниченного ортогонально аддитивного s-однородного полинома $P : C(Q) \to G$.*

$\lhd$ Можно предположить, что функция $\mathbb{1}$, тождественно равная 1 на Q, лежит в E. Заметим, что по условию $P_0([-\mathbb{1}, \mathbb{1}]) \subset [-g, g]$ для некоторого $g \in G_+$. Таким образом, $|P_0(x)| \leqslant g \|x\|_\infty$ для всех $x \in E$. Пусть G_g — порядковый идеал в G, порожденный элементом g, с нормой $\|u\|_g := \inf\{\lambda : |u| \leqslant \lambda g\}$. Тогда $\|P_0(x)\|_g \leqslant \|x\|_\infty$, поэтому P_0 непрерывен в нуле, а значит и локально равномерно непрерывен из E в G_g (см. [1, Предложение 1.11]). Отсюда видно, что продолжение P по непрерывности полинома P_0 существует, единственно и удовлетворяет указанным в формулировке леммы свойствам.

Возьмем неотрицательные дизъюнктные функции $x, y \in C(Q)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ можно подобрать $x_\varepsilon \in E$ так, что $\|x - (\varepsilon/2)\mathbb{1} - x_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon/2$. Тогда $x - \varepsilon\mathbb{1} \leqslant x_\varepsilon \leqslant x$ и $(x - \varepsilon\mathbb{1})^+ \leqslant x_\varepsilon^+ \leqslant x$, откуда выводим $x - x_\varepsilon \leqslant x - (x - \varepsilon\mathbb{1})^+ \leqslant \mathbb{1}$. Таким образом, последовательность (x_n), $x_n := x_{1/n}^+$, содержится в E_+, возрастает и равномерно сходится к x. Из тех же соображений можно найти возрастающую последовательность $(y_n) \subset E_+$, сходящуюся равномерно к y. Так как по условию P_0 ортогонально аддитивен, то $P_0(x_n + y_n) = P_0(x_n) + P_0(y_n)$. Предельный переход в этом равенстве приводит к ортогональной аддитивности P. $\rhd$

Лемма 2. *Пусть F — банахово пространство, а Q — компакт. Тогда для любого ограниченного s-однородного ортогонально аддитивного полинома $P : C(Q) \to F$ существует порядково ограниченный линейный оператор $T : C(Q) \to F$ такой, что*

$$P(x) = T(x^s) \quad (x \in C(Q)). \tag{3}$$

$\lhd$ Этот факт является частным случаем [5, теорема 2.3]. $\rhd$

Следствие 1. *Порядково ограниченный s-однородный полином ортогонально аддитивен в том и только в том случае, когда порождающий его полилинейный оператор ортосимметричен.*

$\lhd$ Рассмотрим ортогонально аддитивный s-однородный полином $P : E \to F$ и пусть $\varphi : E^s \to F$ — порождающий его s-линейный оператор. Из поляризационной формулы (1) вытекает, что P порядково ограничен тогда и только тогда, когда φ порядково ограничен (см. [9, предложение 1]). Возьмем $x_1, \dots, x_s \in E$ и обозначим символом E_0 порядковый идеал в E, порожденный элементом $e_0 := |x_1| + \ldots + |x_s|$. Пусть P_0 и φ_0 — ограничения P и φ на E_0 и E_0^s соответственно. Заметим, что P_0 и φ_0 обладают теми же свойствами, что и P и φ. В силу теоремы Крейнов — Какутани мы можем рассматривать E_0 как равномерно плотную подрешетку в $C(Q)$ для некоторого компакта Q. Применив леммы 1 и 2, найдем такой порядково ограниченный линейный оператор $T : C(Q) \to F$, что имеет место представление (3). Непосредственный подсчет с применением формулы (2) показывает, что

$$\varphi(x_1, \dots, x_s) = T(x_1 \dots x_s) \quad (x_1, \dots, x_s \in E_0). \tag{4}$$

Отсюда видно, что такой φ ортосимметричен. Обратное очевидно. $\rhd$

Следствие 2. *Порядково ограниченный s-линейный оператор $\varphi : E^s \to F$ ортосимметричен в том и только в том случае, когда для любых $x_1, \dots, x_s \in E$ из $|x_1| \wedge \ldots \wedge |x_s| = 0$ следует $\varphi(x_1, \dots, x_s) = 0$.*

$\lhd$ Достаточность очевидна. Необходимость вытекает из представления (4): если $|x_1| \wedge \ldots \wedge |x_s| = 0$, то $x_1 \dots x_s = 0$, поэтому $\varphi(x_1, \dots, x_s) = T(0) = 0$. $\rhd$

Лемма 3. *Упорядоченные векторные пространства $\mathscr{P}_{oa}^{\sim}({}^sE, F)$ и $L_o^{\sim}({}^sE, F)$, а также $\mathscr{P}_{oa}^{r}({}^sE, F)$ и $L_o^{r}({}^sE, F)$ попарно изоморфны. Если F порядково полна, то $\mathscr{P}_{oa}^{\sim}({}^sE, G)$ — порядково полная векторная решетка совпадающая с $\mathscr{P}_{oa}^{r}({}^sE, G)$.*

$\lhd$ Первое утверждение следует из леммы 1. Но тогда верно и второе утверждение, поскольку $L_o^{\sim}({}^sE, F)$ является K-пространством и совпадает с $L_o^{r}({}^sE, F)$ в силу [11, следствие 2.6]. $\rhd$

3. s-линейный оператор $\varphi : E^s \to F$ называется *решеточным s-морфизмом*, если отображение $x_i \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_s)$ $(x_i \in E_i)$ есть решеточный гомоморфизм для каждого $i = 1, \dots, s$.

Пусть E — архимедова векторная решетка и $1 < s \in \mathbb{N}$. В работе [12] установлено, что существует единственная с точностью до изоморфизма пара $(E^{\odot_s}, \odot_s)$, удовлетворяющая следующим трем условиям:

(1) $E^{s\odot}$ — векторная решетка;

(2) $\odot_s : E^s \to E^{s\odot}$ — симметричный решеточный s-морфизм;

(3) для любой архимедовой векторной решетки F и любого симметричного решеточного s-морфизма $\varphi : E^s \to F$ существует единственный решеточный гомоморфизм $S : E^{s\odot} \to F$ такой, что $S \circ \odot_s = \varphi$.

Векторную решетку $E^{s\odot}$ называют *s-ой степенью* решетки E, а решеточный гомоморфизм $\odot_s$ — *каноническим s-морфизмом.*

Рассмотрим функции $\vartheta_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $J_s : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$, определяемые формулами $\vartheta_s(t) := t|t|^{s-1}$, $J_s(t_1, \ldots, t_s) := \vartheta_s^{-1}(t_1 \ldots t_s)$ и положим по определению $\sigma_a(t, u) := (t^s + u^s)^{1/s} := \vartheta_s^{-1}(\vartheta_s(t) + \vartheta_s(u))$ $(t, u, t_1, \ldots, t_s \in \mathbb{R})$. Как видно, J_s и σ_s непрерывны и положительно однородны, значит в E корректно определены элементы $J_s(x_1, \ldots, x_s)$ и $\sigma_s(x, y)$ для любых $x, y, x_1, \ldots, x_s \in E$. Пусть $x \oplus y := \sigma_s(x, y)$ и $t \odot x := \vartheta^{-1}(t)x$, а $\leqslant$ обозначает отношение порядка в E. Тогда $(E, \oplus, \odot, \leqslant)$ и есть s-ая степень E с каноническим s-морфизмом J_s (см. [12, теорема 5.1]).

Лемма 4. *Если E — равномерно полная векторная решетка, то существует ортогонально аддитивный порядковый изоморфизм ι_s из E на $E^{s\odot}$ такой, что $\iota_s(-x) = -\iota_s(x)$, $|\iota(x)| = \iota(|x|)$ $(x \in E)$ и*

$$\iota_s^{-1}(\iota_s(x) + \iota_s(y)) = (x^s + y^s)^{1/s} \quad (x, y \in E). \tag{5}$$

$\lhd$ В качестве ι следует взять тождественный оператор в E, рассматриваемый как оператор из $(E, +, \cdot, \leqslant)$ в $(E, \oplus, \odot, \leqslant)$. Тогда соотношение (5) равносильно определению $x \oplus y = (t^s + u^s)^{1/s}$. $\rhd$

Лемма 5. *Если G — подрешетка E и $\circledcirc_s$ — канонический s-морфизм степени $G^{s\odot}$, то существует инъективный решеточный гомоморфизм $h : G^{s\odot} \to E^{s\odot}$ такой, что $h(x_1 \circledcirc \ldots \circledcirc x_s) = x_1 \odot \ldots \odot x_s$. Таким образом, $G^{s\odot}$ и $\circledcirc_s$ можно рассматривать как подрешетку в $E^{s\odot}$ и ограничение $\odot_s$ на G^s соответственно. При этом, если G — мажорирующая подрешетка в E, то $G^{s\odot}$ — мажорирующая подрешетка в $E^{s\odot}$.*

$\lhd$ В случае $s = 2$ эта лемма была доказана в [13, теорема 2.7]. Общий случай рассматривается аналогично с привлечением [14, п. 2 (a,b)] вместо [15, теорема 4.2]. $\rhd$

Следующий результат, дающий универсальную характеризацию степени векторной решетки, получен в [12, теорема 3.3].

Теорема 1. *Пусть E и F — векторные решетки, причем F равномерно полна. Тогда для любого s-линейного орторегулярного оператора $\varphi : E^s \to F$ существует единственный линейный регулярный оператор $S := S_\varphi : E^{s\odot} \to F$ такой, что*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_s) = S_\varphi(x_1, \odot \ldots, \odot x_s) \quad (x_1, \ldots, x_s \in E).$$

Более того, соответствие $\varphi \mapsto S_\varphi$ представляет собой изоморфизм упорядоченных векторных пространств $L_o^r({}^sE, F)$ и $L^r(E^{s\odot}, F)$.

Теорема 2. *Пусть E, F — векторные решетки, причем F равномерно полна. Тогда для любого регулярного ортогонально аддитивного s-однородного полинома $P : E \to F$ существует единственный регулярный линейный оператор $S := S_P : E^{\odot_k} \to F$ такой, что*

$$P(x) = S(x^{s\odot}) \quad (x \in E), \tag{6}$$

где $x^{s\odot} := \odot_s(x, \ldots, x) := \underbrace{x \odot \ldots \odot x}_{s\text{-раз}}$. Соответствие $P \mapsto S_P$ является изоморфизмом упорядоченных векторных пространств $\mathscr{P}_{oa}^r({}^sE, F)$ и $L^r(E^{\odot_s}, F)$.

$\lhd$ В силу леммы 3 и теоремы 1 имеют место изоморфизмы упорядоченных векторных пространств: $\mathscr{P}^r_{oa}({}^sE, F) \simeq L^r_o({}^sE, F) \simeq L_r(E^{s\odot}, F)$. $\rhd$

4. Пусть E, F и G — векторные решетки, причем G — мажорирующая подрешетка E. Обозначим символом R_E оператор представления из теоремы 2, устанавливающий изоморфизм между $\mathscr{P}_{oa}({}^sE, F)$ и $L^r(E^{s\odot}, F)$. Тогда (6) запишется в виде $Px = R_E(P)(x^{s\odot})$. Аналогично определяется оператор $R_G : \mathscr{P}^r_{\rm o}({}^sG, F) \to L^r(G^{s\odot}, F)$. Пусть $\mathscr{R}_l$ и $\mathscr{R}_p$ обозначают операторы ограничения линейных операторов и полиномов из $L^r(E^{s\odot}, F)$ в $L^r(G^{s\odot}, F)$ и из $\mathscr{P}^r_{oa}({}^sE, F)$ в $\mathscr{P}^r_{oa}({}^sG, F)$ соответственно, действующие по правилам $T \mapsto T|_{G^{s\odot}}$ и $P \mapsto P|_G$.

Лемма 6. *Имеет место следующее равенство*

$$\mathscr{R}_p = R_G^{-1} \circ \mathscr{R}_l \circ R_E. \tag{7}$$

$\lhd$ Пусть i — тождественное вложение G в E. В силу леммы 5 имеется вложение $h : G^{s\odot} \to E^{s\odot}$, которое также будем считать тождественным. Тогда $\mathscr{R}_p(P) = P \circ i$ и $\mathscr{R}_l(S) = S \circ h$ для любых $P \in \mathscr{P}^r_{oa}({}^sE, F)$ и $S \in L^r(E^{s\odot}, F)$. Далее, учитывая равенства $Px = R_E(P)(x^{s\odot})$ и $(P \circ i)x = R_G(P \circ i)(x^{s\odot})$, для $x \in G$ выводим

$$\begin{aligned}(R_G \circ \mathscr{R}_p)(P)x^{s\odot} &= R_G(P \circ i)x^{s\odot} = (P \circ i)x = Px \\ &= R_E(P)x^{s\odot} = (R_E(P) \circ h)x^{s\odot} = (\mathscr{R}_l \circ R_E)(P)x^{s\odot}.\end{aligned}$$

Таким образом, $R_G \circ \mathscr{R}_p = \mathscr{R}_l \circ R_E$, откуда следует требуемое. $\rhd$

Теорема 3. *Пусть E — векторная решетка, G — мажорирующая векторная подрешетка в E и F — порядково полная векторная решетка. Тогда существует порядково непрерывный решеточный изоморфизм $\mathscr{E}$ из $L^r(G, F)$ в $L^r(E, F)$ такой, что*

$$\mathscr{R} \circ \mathscr{E} = \mathrm{id}_{\mathscr{L}(\mathrm{G},\mathrm{F})}. \tag{8}$$

$\lhd$ Этот факт установлен в [16]. $\rhd$

Оператор $\mathscr{E}$ называют *оператором одновременного продолжения.*

Теорема 4. *Пусть G — мажорирующая подрешетка в E и F — порядково полная векторная решетка. Тогда существует одновременное продолжение s-однородных ортогонально аддитивных полиномов с G на E, т. е. существует порядково непрерывный решеточный гомоморфизм $\widehat{\mathscr{E}} : \mathscr{P}^r_{oa}({}^sG, F) \to \mathscr{P}^r_{oa}({}^sE, F)$ такой, что*

$$\mathscr{R}_p \circ \widehat{\mathscr{E}} = I, \tag{9}$$

где I — тождественный оператор на $\mathscr{P}^r_{oa}({}^sG, F)$.

$\lhd$ Оператор $\widehat{\mathscr{E}}$ определим формулой $\widehat{\mathscr{E}} = R_E^{-1} \circ \mathscr{E} \circ R_G$, где $\mathscr{E}$ — оператор одновременного продолжения из теоремы 3. Как видно из теорем 2 и 3, $\widehat{\mathscr{E}}$ порядково непрерывен, инъективен и сохраняет решеточные операции. Кроме того, привлекая лемму 6 и соотношения (7) и (8), легко проверить справедливость цепочки равенств:

$$\mathscr{R}_p \circ \widehat{\mathscr{E}} = R_G^{-1} \circ \mathscr{R}_l \circ R_E \circ R_E^{-1} \circ \mathscr{E} \circ R_G = R_G^{-1} \circ (\mathscr{R}_l \circ \mathscr{E}) \circ R_G = I. \ \rhd$$

5. Рассмотрим теперь вопрос о характеризации крайних продолжений положительного ортогонально аддитивного полинома. Доказательство проводится редукцией к случаю линейных положительных операторов, т. е. к теореме Липецкого — Плахки — Томсена (см. [10, теорема 2.7]).

Теорема 5. *Если F порядково полна и $S \in L_+(G, F)$ продолжает $T \in L_+(E, F)$, то S будет крайним продолжением оператора T тогда и только тогда, когда $\inf_{e \in E} S(|x+e|) = 0$ для любого $x \in G$.*

Аналогичный результат верен и для ортогонально аддитивных полиномов. Пусть $P : G \to F$ — положительный ортогонально аддитивный s-однородный полином. Обозначим символом $\mathscr{E}(P)$ множество всех положительных ортогонально аддитивных s-однородных продолжений P на все E. Тогда $\mathscr{E}(P)$ — непустое выпуклое множество. Крайние точки множества $\mathscr{E}(P)$ называют *крайними продолжениями* полинома P.

Теорема 6. *Пусть E, F и G — векторные подрешетки, причем F порядково полна, E и G равномерно полны и G — подрешетка E. Предположим, что множество $\mathscr{E}(P)$ непусто для некоторого положительного ортогонально аддитивного s-однородного полинома $P : E \to F$. Тогда полином $\widehat{P} \in \mathscr{E}(P)$ является крайним продолжением полинома P в том и только в том случае, когда для любого $x \in E$ выполняется*

$$\inf \big\{ \widehat{P}\big(\big|(x^s + u^s)^{\frac{1}{s}}\big| \big) : u \in G \big\} = 0.$$

$\lhd$ Воспользуемся представлением 6. Пусть $P : G \to F$ — положительный ортогонально аддитивный s-однородный полином и $\widehat{P} \in \mathscr{E}(P)$. В силу теоремы 2 соответствие $Q \leftrightarrow S_Q$ является изоморфизмом между векторными решетками $\mathscr{P}^r_{oa}({}^sG, F)$ и $L^r(G^{\odot}, F)$, а также $\mathscr{P}^r_{oa}({}^sE, F)$ и $L^r(E^{\odot}, F)$. Кроме того, $\widehat{Q}$ — продолжение Q в том и только в том случае, когда $S_{\widehat{Q}}$ — продолжение S_Q. Тем самым, соответствие $Q \mapsto S_Q$ осуществляет аффинную биекцию между множествами $\mathscr{E}(P)$ и $\mathscr{E}(S_P)$, следовательно, сохраняет крайние точки.

Итак, $\widehat{P}$ будет крайним продолжением P тогда и только тогда, когда $\widehat{S} := S_{\widehat{P}}$ — крайнее продолжение S_P. Применим теорему 5: $\widehat{P}$ будет крайним продолжением P лишь в том случае, если $\inf\{\widehat{S}(|\tilde{x} + \tilde{e}|) : \tilde{e} \in G^{\odot}\} = 0$ для любого $\tilde{x} \in E^{\odot}$.

По лемме 4 ι_s есть биекция E на $E^{s\odot}$ и G на $G^{s\odot}$, следовательно, можем переписать последнее условие в виде: $\inf\{\widehat{S}(|\iota_s x + \iota_s u|) : u \in G\} = 0$ для любого $x \in E$. Остается заметить, что в силу леммы 4 и теоремы 2 имеем

$$v := (x^s + u^s)^{\frac{1}{s}} = \iota_s^{-1}(\iota_s x + \iota_s u),$$

$$\widehat{P}(|v|) = (\widehat{S} \circ \iota_s)(|v|) = \widehat{S}(|\iota_s(v)| = \widehat{S}(|\iota_s x + \iota_s u|). \rhd$$

Замечание. Для положительного ортосимметричного билинейного оператора аналогичный результат получен в [11].

Литература

1. *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces.—Berlin: Springer, 1999.
2. *Grecu B. C., Ryan R. A.* Polynomials on Banach spaces with unconditional bases // Proc. Amer. Math. Soc.—2005.—Vol. 133, № 4.—P. 1083–1091.
3. *Sundaresan K.* Geometry of spaces of homogeneous polynomials on Banach lattices // Applied Geometry and Discrete Mathematics, DIMACS Ser. Discrete Math. Compute. Sci.—Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1991.—P. 571—586.
4. *Perez-Garcia D., Villanueva I.* Orthogonally additive polynomials on spaces of continuous functions // J. Math. Anal. Appl.—2005.—Vol. 306, № 1.—P. 97–105.
5. *Benyamini Y., Lassalle S., Llavona J. G.* Homogeneous orthogonally additive polynomials on Banach lattices // Bull. London Math. Soc.—2006.—Vol. 38, № 3.—P. 459–469.
6. *Carando D., Lassale S., Zalduendo I.* Orthogonally additive polynomials over $C(K)$ are measures — a short proof // Int. Eq. and Oper. Theory.—2006.—Vol. 56, № 4.—P. 597–602.

7. *Loan J.* Polynomials on Riesz spaces // J. Math. Anal. Appl.—2010.—Vol. 364.—P. 71–78.
8. *Кусраева З. А.* Однородные ортогонально аддитивные полиномы в векторных решетках // Мат. анализ и мат. моделирование: тр. междунар. конф. молодых ученых (Россия, Владикавказ, 12–19 июля 2010 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2010.—С. 100–101.
9. *Кусраева З. А.* О представлении ортогонально аддитивных полиномов // Сиб. мат. журн.—2011.—Т. 52, № 2.—С. 315–325.
10. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operatirs.—Orlando: Academic Press, 1985.
11. *Кусраев А. Г., Табуев С. Н.* О некоторых свойствах ортосимметричных билинейных операторов // Мат. форум. Т. 1. Исслед. по мат. анализу / отв. ред. Коробейник Ю. Ф., Кусраев А. Г.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2008.—С. 104–124.—(Итоги науки. ЮФО.)
12. *Boulabier K., Buskes G.* Vector lattice powers: f-algebras and functional calculus // Communication in Algebra.—2006.—Vol. 34.—P. 1435–1442.
13. *Buskes G., Kusraev A. G.* Representation and extension of orthoregular bilinear operators // Vladikavkaz Math. J.—2007.—Vol. 9, № 1.—P. 16–29
14. *Schep A. R.* Factorization of positive multilinear maps // Illinois J. Math.—1984.—Vol. 28.—P. 579–591.
15. *Fremlin D. H.* Tensor product of Archimedean vector lattices // Amer. J. Math.—1972.—Vol. 94, № 3.—P. 777–798.
16. *Кусраев А. Г.* Об одном свойстве базы K-пространства и некоторых его применениях.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО АН СССР, 1977.—17 с. (Английский перевод: Orthosymmetric Bilinear Operators.—Vladikavkaz: Inst. of Appl. Math. and Informatics VCS RAS, 2007.—P. 27–34).

Статья поступила 10 октября 2010 г.

Кусраева Залина Анатольевна
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
стажер-исследователь лаб. теории операторов
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: zali13@mail.ru

ON EXTENSION OF REGULAR HOMOGENEOUS ORTHOGONALLY ADDITIVE POLYNOMIALS

Kusraeva Z. A.

A homogeneous polynomial is said to be *positive* if the generating symmetric multilinear operator is positive and *regular* if it is representable as the difference of two positive polynomials. A polynomial P is *orthogonally additive* if $P(x+y) = P(x) + P(y)$ for disjoint x and y. Let $\mathscr{P}^r_{\rm oa}(^sE, F)$ and $\mathscr{E}(P)$ stand for the sets of all regular s-homogeneous orthogonally additive polynomials from E to F and of all positive orthogonally additive s-homogeneous extensions of a positive polynomial $P \in \mathscr{P}^r_{\rm oa}(^sE, F)$. The following two theorems are the main results of the article. All vector lattices are assumed to be Archimedean.
Theorem 4. *Let G be a majorizing sublattice of a vector lattice E and F be a Dedekind complete vector lattice. Then there exists an order continuous lattice homomorphism $\widehat{\mathscr{E}} : \mathscr{P}^r_{\rm oa}(^sG, F) \to \mathscr{P}^r_{\rm oa}(^sE, F)$ (a "simultaneous extension" operator) such that $\mathscr{R}_p \circ \widehat{\mathscr{E}} = I$, where I is the identity operator in $\mathscr{P}^r_{\rm oa}(^sG, F)$.*
Theorem 6. *Let E, F and G be vector lattices with F Dedekind complete, E and G uniformly complete, G sublattice of E. Assume that the set $\mathscr{E}(P)$ is nonempty for a positive orthogonally additive s-homogeneous polynomial $P : E \to F$. A polynomial $\widehat{P} \in \mathscr{E}(P)$ is an extreme point of $\mathscr{E}(P)$ if and only if*

$$\inf\big\{\widehat{P}\big(\big|(x^s + u^s)^{\frac{1}{s}}\big|\big) : \ u \in G\big\} = 0 \quad (x \in E).$$

Key words: vector lattice, homogeneous polynomial, positive multilinear operator, regular polynomial, orthogonal additivity, extreme extension.