Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 4, С. 35–39

УДК **512.542**

О 2-ГРУППАХ, КОНЕЧНЫЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ ОБЛАДАЮТ ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ[1]

Д. В. Лыткина

В работе доказывается локальная конечность 2-групп, в которых все конечные подгруппы обладают одним из следующих свойств: (a) двуступенная нильпотентность, (b) принадлежность к многообразию, определенному тождеством $[x, y]^2 = 1$. Кроме того, доказывается, что порядок коммутанта 2-группы G не превосходит двух, если порядок каждого класса сопряженных элементов каждой конечной подгруппы группы G не больше двух.

Ключевые слова: периодическая группа, нильпотентность, локальная конечность.

Теорема 1. *Если каждая конечная подгруппа 2-группы G двуступенно нильпотентна, то сама группа G также двуступенно нильпотентна.*

Очевидным следствием этой теоремы является тот факт, что 2-группа абелева, если все ее конечные подгруппы абелевы. Отметим, что аналог даже этого следствия неверен для p-групп при $p > 2$, поскольку, например, все конечные подгруппы групп Новикова — Адяна (не локально конечные свободные группы нечетного периода) являются циклическими [1]. С другой стороны, любая конечная подгруппа ненильпотентной свободной бернсайдовой группы периода 2^n для $n \geqslant 13$ может быть вложена в прямое произведение диэдральных групп порядка 2^{n+1} [2, теорема 2] и поэтому она нильпотентна ступени n. Поэтому теорема 1 не может быть обобщена на случай 2-группы с ограниченной ступенью нильпотентности ее конечных подгрупп.

Тем не менее, естественно возникают следующие вопросы:

1. Каково максимальное число n, которое гарантирует нильпотентность любой 2-группы с n-ступенно нильпотентными конечными подгруппами?

2. Верно ли, что 2-группа нильпотентна, если каждая ее конечная подгруппа трехступенно нильпотентна?

Теорема 1 доказана в [3] с использованием вычислительного пакета GAP [4]. В настоящей работе приводится доказательство, свободное от компьютерных вычислений.

В качестве следствия из теоремы 1 выводится

Теорема 2. *Если для любой конечной подгруппы K 2-группы G порядок коммутанта K не превосходит двух, то* $|[G, G]| \leqslant 2$.

Следующая теорема обобщает результат работы [5].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 11-01-00456; гранта Поддержки ведущей научной школы РФ НШ-3669.2010.1 и программой «Развитие научного потенциала высшей школы» Росиийского федерального агентства по образованию, грант 2.1.1.10726.

Теорема 3. *Пусть в каждой конечной подгруппе 2-группы G выполняется тождество $[x,y]^2=1$ и $[a,b]^2=1$ для любых элементов $a,b\in G$ порядков 2 и 8 соответственно. Тогда это тождество выполняется и в группе G. В частности, G локально конечна, период ее коммутанта равен 4, а второй коммутант лежит в центре G.*

1. Предварительные леммы

Лемма 1. *Если в каждом классе сопряженных элементов конечной 2-группы H содержится не более двух элементов, то коммутант C группы H содержит не более двух элементов.*

$\lhd$ Из условия следует, что централизатор любого элемента из H нормален в H и фактор-группа по нему коммутативна, поэтому фактор-группа H по ее центру Z коммутативна. В частности, $C\leqslant Z$. Пусть $h=|H|$, $c=|C|$, $z=|Z|$ и $n=|H:C|$. Тогда $c\leqslant z$ и $h=nc$.

Если k — число классов сопряженных элементов H, то

$$k=|Z|+\frac{|H\setminus Z|}{2}=\frac{z+h}{2}\geqslant\frac{c(1+n)}{2}.$$

С другой стороны, если $d_1,\dots,d_k$ — степени всех различных неприводимых комплексных характеров H, то число линейных характеров H совпадает с n и поэтому

$$h=\sum_{i=1}^{n}d_i^2\geqslant n+4(k-n),$$

откуда $k\leqslant\frac{(c+3)n}{4}$. Таким образом,

$$\frac{c+cn}{2}\leqslant k\leqslant\frac{(c+3)n}{4},$$

т. е. $c<3$. $\rhd$

Лемма 2. *Пусть в 2-группе G любая конечная подгруппа двуступенно нильпотентна.*
(a) *Если $a,b\in G$ и $a^2=b^2=1$, то $(ab)^4=1$ и $aa^b=a^ba$.*
(b) *Если $x,y\in G$ и $x^4=y^2=1$, то $\langle x,y\rangle$ — конечная группа и $[x^2,y]=1$.*

$\lhd$ Утверждение пункта (a) очевидно, если $a=1$ или $b=1$. Если же $a\neq 1\neq b$, то $\langle a,b\rangle$ — конечная группа диэдра. Так как она двуступенно нильпотентна, то ее порядок не превосходит числа 8 и поэтому $(ab)^4=1$. Отсюда

$$aa^b=(ab)^2=(ba)^2=a^ba.$$

Докажем (b). Положим $z=x^2$. По пункту (a) z и $t=z^y$ перестановочны. Так как x^2 и t^2 равны единице по модулю $\langle z\rangle$, то $\langle x,t\rangle$ — конечная группа и поэтому $(xt)^2=x^2[x,t]$ перестановочен с x и t.

Точно так же $(x^yz)^2$ перестановочен с x^y и z. Поэтому $a=(xt)^2$ и $b=(x^yz)^2$ содержится в централизаторе z и t. Более того, по модулю $\langle z,t\rangle$ элементы a и b равны 1, поэтому $[x,t]\in\langle z,t\rangle$, $[x^y,z]\in\langle z,t\rangle$, т. е. $\langle z,t\rangle\lhd\langle x,x^y\rangle$.

Так как $x^2,(x^y)^2\in\langle z,t\rangle$, то $\langle x,x^y\rangle$ — конечная y-допустимая подгруппа. Отсюда $\langle x,y\rangle=\langle x,x^y\rangle\langle y\rangle$ — конечная подгруппа. По условию она двуступенно нильпотентна, поэтому $[x,y]=x^{-1}x^y$ перестановочен с y. С другой стороны, $[x,y]^y=[x,y]^{-1}$, следовательно, $[x,y]^2=1$. Так как $[x^2,y]=[x,y]^2$, то $[x^2,y]=1$. $\rhd$

2. Доказательство основных результатов

Пусть G удовлетворяет условиям теоремы 1.

Лемма 3. *Если a, b, c — инволюции из G, то $[a,b,c] = [[a,b],c] = 1$.*

$\lhd$ Положим $x = ab$, $y = c$. Так как $x^4 = 1$, то по лемме 2 $[x^2, c] = 1$. С другой стороны, $x^2 = abab = [a,b]$. $\rhd$

Лемма 4. *Подгруппа I из G, порожденная инволюциями, двуступенно нильпотентна.*

$\lhd$ Пусть T — множество всех инволюций из G, $I = \langle T\rangle$. Так как $[t_1,t_2,t_3] = 1$ для любых элементов $t_1,t_2,t_3 \in T$, то подгруппа K, порожденная всеми коммутаторами вида $[x_1,x_2]$, $x_1,x_2 \in T$, лежит в центре I и в фактор-группе I/K образы инволюций из G перестановочны, т. е. I/K абелева, а I двуступенно нильпотентна. $\rhd$

Лемма 5. *Если G порождается тремя элементами, то она конечна.*

$\lhd$ Предположим, что $G = \langle a,b,c\rangle$ и 2^m — максимум порядков элементов a, b, c. Используем индукцию по m. Если $m \leqslant 1$, то $G \leqslant I$ и по лемме 4 G конечна.

Пусть $m \geqslant 2$. Если $\overline{X} = \{\overline{x_1},\ldots,\overline{x_x}\}$ — конечная подгруппа фактор-группы G/I, то по теореме Шмидта полный прообраз $\overline{X}$ в G локально конечен как конечное расширение локально конечной группы и, следовательно, подгруппа $X = \langle x_1,\ldots,x_s\rangle$, где $x_iI = \overline{x_i}$, $i = 1,\ldots,s$, конечна. По предположению X двуступенно нильпотентна, а значит, подгруппа $\overline{X} = XI/I$, будучи изоморфной $X/X \cap I$, двуступенно нильпотентна.

Итак, G/I удовлетворяет условию теоремы 1 и порождается тремя элементами aI, bI, cI. Кроме того, максимум их порядков равен 2^{m-1}. По предположению индукции G/I конечна. Поскольку I локально конечна в силу леммы 4 и теоремы Шмидта, а также конечно порождена, то G конечна. $\rhd$

Лемма 6. *Группа G двуступенно нильпотентна.*

$\lhd$ Пусть $a,b,c \in G$ и $K = \langle a,b,c\rangle$. По лемме 5 K конечна и, следовательно, нильпотентна ступени нильпотентности 2, откуда $[[a,b],c] = 1$. $\rhd$

Лемма 6 завершает доказательство теоремы 1.

Пусть G удовлетворяет условиям теоремы 2. По лемме 1 $|[H,H]| \leqslant 2$ для любой конечной подгруппы H группы G, что влечет двуступенную нильпотентность H. По теореме 1 G двуступенно нильпотентна и, в частности, локально конечна.

Можно считать, что G неабелева.

Пусть $a,b \in G$ и $c = [a,b] \neq 1$. Так как $\langle a,b\rangle$ — конечная группа, то порядок $c = [a,b]$ равен двум и коммутант $\langle a,b\rangle$ совпадает с $\langle c\rangle$. Пусть $x,y \in G$. Так как $K = \langle a,b,x,y\rangle$ — конечная группа, то $|[K,K]| \leqslant 2$ и поэтому $[K,K] = \langle c\rangle$. В частности, $[x,y] \in \langle c\rangle$. Отсюда вытекает, что $[G,G] = \langle [x,y] \mid x,y \in G\rangle = \langle c\rangle$. $\rhd$

Пусть, наконец, G — 2-группа и $[x,y]^2 = 1$ для любых элементов $x,y \in G$, порождающих конечную подгруппу.

Лемма 7. (a) *Если $x,y \in G$ и $x^2 = y^2 = 1$, то $(xy)^4 = 1$.*

(b) *Если G порождена тремя инволюциями, то коммутант G — элементарная абелева группа и G — конечная группа периода 4.*

(c) *Если G порождена инволюцией и элементом порядка 4, то G конечна.*

$\lhd$ Пункт (a) следует из условия теоремы 2 в силу того, что две инволюции в группе порождают группу диэдра.

Пусть $G = \langle x,y,z\rangle$ и $x^2 = y^2 = z^2 = 1$. По пункту (a)

$$1 = (xy)^4 = (xz)^4 = (yz)^4 = ((xy)^2z)^4 = ((yz)^2x)^4 = ((zx)^2y)^4$$
$$= ((xy)^2(xz)^2)^4 = ((yz)^2(yx)^2)^4 = ((zx)^2(zy)^2)^4.$$

Вычисления в GAP [4] с помощью алгоритма перечисления смежных классов показывают, что $|G|$ не превосходит 2^{16}. В частности, G конечна и, следовательно, $[xy,z]^2 = [xz,y]^2 = [yz,x]^2 = 1$. Дальнейшие вычисления в GAP после добавления этих равенств показывают, что $|G| \leqslant 2^8$, ее коммутант C абелев и, следовательно, периода 2. Поскольку G/C периода два, то G периода 4. Пункт (b) доказан.

Пусть G порождена элементом x порядка 4 и инволюцией y. Тогда $H = \langle x^2, y, y^x\rangle$ инвариантна относительно x и поэтому является нормальной подгруппой в G индекса 1 или 2. По пункту (b) H конечна, поэтому G также конечна. $\triangleright$

Лемма 8. *Если G порождена четырьмя инволюциями, то G — конечная группа периода* 8.

$\triangleleft$ Пусть $G = \langle a,b,c,d\rangle$, где a, b, c, d — инволюции из G. По лемме 7(b), $H = \langle a,b,c\rangle$ — конечная группа периода 4. По лемме 7(c), $\langle d,h\rangle$ — конечная подгруппа для любого $h \in H$, и по условию $1 = [d,h]^2 = (d\cdot d^h)^2$, откуда $dd^h = d^hd$, $d^{h_1}d^{hh_1} = d^{hh_1}d^{h_1}$ для любого $h_1 \in H$, т. е. $D = \langle d^h \mid h \in H\rangle$ — элементарная абелева группа. Так как $D \trianglelefteq G$ и $G = DH$, то G — конечная группа периода, делящего 8. $\triangleright$

В дальнейшем G — группа, удовлетворяющая условиям теоремы 3.

Лемма 9. *Для любых инволюций $x,y,z,t,u \in G$ выполняется равенство*

$$\big[[[x,y],[z,t]],u\big] = 1.$$

$\triangleleft$ По лемме 8 подгруппа $H = \langle x,y,z,t\rangle$ — конечная группа периода 8. Если h — элемент из H, порядок которого отличен от 8, то $\langle u,h\rangle$ — конечная группа по лемме 7 (c) и по условию $[u,h]^2 = (uu^h)^2 = 1$, откуда $uu^h = u^hu$. То же самое выполняется и в случае, когда h порядка 8. Поэтому, как и в доказательстве леммы 8, $D = \langle u^h \mid h \in H\rangle$ — конечная группа и $G = DH$ также конечна. По [5, теорема 4], $\big[[[x,y],[z,t]],u\big] = 1$. $\triangleright$

Лемма 10. *Группа G локально конечна.*

$\triangleleft$ Пусть I — подгруппа, порожденная всеми инволюциями группы G, Z — ее центр. По лемме 9 для любых инволюций $a,b,c,d \in I$ элемент $[[a,b],[c,d]]$ содержится в Z, т. е. $[a,b][c,d] = [c,d][a,b]$ по модулю Z. Многократное применение известных равенств

$$[xy,z] = [x,z]^y[y,z], \quad [x,yz] = [x,z][x,y]^z$$

показывает, что $[x_1x_2\dots x_r, y_1y_2\dots y_s]$, где $x_1,\dots,x_r$, $y_1,\dots,y_s$ — инволюции, равно произведению коммутаторов вида $[z,t]$, где z и t — инволюции. Поэтому коммутант I коммутативен по модулю Z и, в частности, I — локально конечная группа. Если теперь F/I — конечная подгруппа из G/I, то F также локально конечна, и поэтому $F = F_0I$, где F_0 — конечная подгруппа. По условию коммутаторы элементов из F_0 лежат в I и поэтому F/I коммутативна. По теореме 1 G/I коммутативна, и, следовательно, G локально конечна. $\triangleright$

Закончим доказательство теоремы 3.

Для любых $x,y \in G$ подгруппа $\langle x,y\rangle$ конечна и по условию $[x,y]^2 = 1$. Теперь утверждение теоремы вытекает из [5, теорема 4] и леммы 10.

Автор выражает признательность рецензенту за ценные замечания, позволившие существенно улучшить качество работы.

Литература

1. *Адян С. И.* О подгруппах свободных периодических групп нечетного показателя // Тр. мат. ин-та АН СССР.—1971.—Т. 112.—С. 64–72.
2. *Лысёнок Г. И.* Бесконечные бернсайдовы группы четного периода // Изв. РАН. Сер. мат.—1996.—Т. 60, № 3.—С. 3–224.

3. *Lytkina D. V.* On 2-groups, all of whose finite subgroups are of nilpotency class 2 // Sib. Electronic Math. Reports.—2011.—Vol. 8.—P. 1–3.
4. GAP — Groups, algorithms and programming.—URL: http://www.gap-system.org/.
5. *Macdonald D. I.* On certain varieties of groups // Math. Z.—1961.—Vol. 76, № 2.—P. 270–282.

Статья поступила 19 мая 2011 г.

Лыткина Дарья Викторовна
Сибирский гос. ун-т телекоммуникаций и информатики,
доцент кафедры высшей математики факультета ИВТ
РОССИЯ, 630102, Новосибирск, ул. Кирова, 86
E-mail: daria.lytkin@gmail.com

2-GROUPS WITH GIVEN PROPERTIES OF FINITE SUBGROUPS

Lytkina D. V.

A local finiteness is proved of 2-groups, all of whose finite subgroups (a) are nilpotent of class 2 or (b) belong to a variety defined by the law $[x, y]^2 = 1$. Besides, it is proved that the order of the derived subgroup of a 2-group G is at most 2 if the order of every conjugacy class of every finite subgroup of G is at most 2.

Key words: periodic group, nilpotency, local finiteness.