Владикавказский математический журнал
2011, Том 13, Выпуск 4, С. 52–59

УДК **514**

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ДЖ. В. ФИКЕ О ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ КОНГРУЭНТНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКАХ[1]

Ю. Г. Никоноров, Ю. В. Никонорова

В работе в деталях описывается некоторый общий подход к решению задачи Дж. В. Фике о налегающих конгруэнтных выпуклых многоугольниках на евклидовой плоскости.

Ключевые слова: евклидова плоскость, выпуклые многоугольники, задача Дж. В. Фике, планарные графы, дробно-линейные функции.

1. Общая задача Дж. В. Фике на евклидовой плоскости

Для множества A на евклидовой плоскости будем через $\partial(A)$ и $\operatorname{int}(A)$ обозначать соответственно его границу и внутренность, а для произвольной спрямляемой кривой γ через $\operatorname{length}(\gamma)$ будем обозначать длину этой кривой.

В статье [5] (см. также [4, с. 25]) Дж. В. Фике (J. W. Fickett) поставил следующую задачу: *Правда ли, что выполнено неравенство*

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{\operatorname{length}(\partial(\mathrm{K}) \cap \mathrm{K}')}{\operatorname{length}(\partial(\mathrm{K}') \cap \mathrm{K})} \leqslant 3$$

для произвольных пересекающихся конгруэнтных прямоугольников K и K' на евклидовой плоскости?

Это неравенство было доказано Ю. В. Никоноровой в работе [2], где было установлено даже несколько более сильное неравенство

$$\frac{1}{3} < \frac{\operatorname{length}(\partial(\mathrm{K}) \cap \operatorname{int}(\mathrm{K}'))}{\operatorname{length}(\partial(\mathrm{K}') \cap \operatorname{int}(\mathrm{K}))} < 3.$$

Отметим, что последнее неравенство неулучшаемо для произвольных прямоугольников, отличных от квадратов. В качестве примера, где нижняя и верхняя оценка почти достигается, можно рассмотреть прямоугольники K и K' с вершинами $(\pm a, \pm b)$ и $(\pm b, \pm a) - (0, a - b + \varepsilon)$ соответственно для $a > b > 0$ и достаточно малого $\varepsilon > 0$ (относительно некоторой прямоугольной системы координат на плоскости). В случае же, когда K и K' являются конгруэнтными квадратами, приведенное неравенство можно усилить:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{\operatorname{length}(\partial(\mathrm{K}) \cap \mathrm{K}')}{\operatorname{length}(\partial(\mathrm{K}') \cap \mathrm{K})} \leqslant \sqrt{2}.$$

[1] Работа частично поддержана Программой поддержки ведущих научных школ, грант № НШ-6613.2010.1; Российским республиканским фондом фундаментальных исследований, проект № 10-01-90000-Бел-а, а также Министерством образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № 02.740.11.0457.

Экстремальное значение $\sqrt{2}$ соответствует (в частности) такому расположению квадратов, когда вершина одного квадрата расположена в центре другого, а стороны, инцидентные этой вершине, проходят через две смежные вершины второго квадрата.

Задача Дж. В. Фике естественно переносится на случай произвольных выпуклых конгруэнтных пересекающихся фигур на плоскости [4].

Задача (общая задача Дж. В. Фике на евклидовой плоскости). Для заданной выпуклой фигуры K на евклидовой плоскости определить наименьшее число α такое, что для любой фигуры K', конгруэнтной K, выполняется неравенство

$$\mathrm{length}(\partial(\mathrm{K}) \cap \mathrm{K}') \leqslant \alpha \cdot \mathrm{length}(\partial(\mathrm{K}') \cap \mathrm{K}).$$

Замечание 1. Отметим, что таким образом сформулированная общая задача Дж. В. Фике может быть рассмотрена и для некоторых невыпуклых фигур K, например, для невыпуклых многоугольников.

Кроме известного значения $\alpha = 3$ для конгруэнтных прямоугольников, отличных от квадратов ($\alpha = \sqrt{2}$ для конгруэнтных квадратов), отметим известное значение $\alpha = 2$ для случая правильных треугольников [3]. Понятно также, что в (самом простом) случае конгруэнтных кругов имеет место равенство $\alpha = 1$.

2. Общий подход к решению задачи Дж. В. Фике для выпуклых многоугольников

Несмотря на простоту постановки задачи Дж. В. Фике для прямоугольников K и K', насколько известно авторам, решение этой задачи не было известно вплоть до публикации [2]. В цитируемой работе предложено решение этой задачи, по существу сводящееся к исследованию различных возможностей для комбинаторного строения многоугольника $S = K \cap K'$.

Следуя в целом работе [2] и несколько модифицированному изложению соответствующего вопроса в [1] (где также исправлены некоторые неточности работы [2]), мы опишем некоторый общий подход к решению задачи Дж. В. Фике для произвольного выпуклого многоугольника на плоскости. При этом мы доведем изложение по сути до конкретного и простого алгоритма, который очевидным образом порождает теорема 2. Для случая более общих выпуклых фигур какого-либо подхода к решению общей задачи Дж. В. Фике авторам не известно.

Пусть на евклидовой плоскости даны два произвольных выпуклых многоугольника S_1 и S_2 в общем положении, т. е. не существует стороны многоугольника S_1, параллельной некоторой стороне многоугольника S_2. Пусть L_1 — длина части границы $\partial(S_1)$ первого многоугольника, попадающей во внутренность $\mathrm{int}(\mathrm{S}_2)$ второго. Точно так же, L_2 — длина части границы $\partial(S_2)$ второго многоугольника, попадающей во внутренность $\mathrm{int}(\mathrm{S}_1)$ первого. Рассматривается следующая

Задача. Найти максимальное значение величины

$$Q = Q(S_1, S_2) = \frac{L_1}{L_2} \tag{1}$$

для неподвижного многоугольника S_1 и всевозможных параллельных переносов многоугольника S_2.

Замечание 2. Некоторая модификация нижеследующих рассуждений может быть использована и при исследовании не обязательно выпуклых многоугольников S_1 и S_2. Правда, в невыпуклом случае придется преодолеть ряд дополнительных технических трудностей.

Начнем рассуждение с простой леммы, утверждение которой хорошо известно, а доказательство приводится для удобства читателей.

Лемма 1. *Рассмотрим на евклидовой плоскости треугольник с длинами сторон a, b и c. Пусть φ — угол между сторонами длины a и b. Тогда справедливо неравенство $a+b \leqslant \delta \cdot c$, где $\delta = 1/\sin(\varphi/2)$.*

$\lhd$ Возводя в квадрат обе части неравенства из формулировки леммы и учитывая теорему косинусов, получаем эквивалентное утверждение:

$$(\delta^2-1)a^2 - 2\big(1+\delta^2\cos(\varphi)\big)ab + (\delta^2-1)b^2 \geqslant 0.$$

Но поскольку $1+\delta^2\cos(\varphi) = \delta^2-1$, то последнее неравенство эквивалентно очевидному неравенству $(\delta^2-1)(a-b)^2 \geqslant 0$. $\rhd$

Введем на евклидовой плоскости декартову систему координат, так чтобы центр масс многоугольника S_1 имел координаты $(0,0)$. Положение многоугольника S_2 при этом полностью определяется координатами (x,y) его центра масс. Пусть

$$\Omega = \{(x,y)\,|\,\mathrm{int}(\mathrm{S}_1\cap\mathrm{S}_2) \neq \varnothing\}.$$

Очевидно, что это множество открыто, а граница введенного множества $\partial(\Omega)$ описывает именно те случаи, когда $S_1\cap S_2 = \partial(S_1)\cap\partial(S_2)$. Рассмотрим множество

$$\mathscr{K} = \mathscr{K}(S_1,S_2) \quad (\mathscr{K}\subset\Omega) \tag{2}$$

таких положений центра масс второго многоугольника, при которых граница пересечения $\partial(S_1\cap S_2)$ содержит по крайней мере одну из вершин S_1 или S_2. Нетрудно понять, что $\partial(\Omega)\subset\mathscr{K}$, и $\mathscr{K}$ представляется в виде объединения конечного числа прямолинейных отрезков. Нам полезно представить себе множество $\mathscr{K}$ как *вложение* (*с прямолинейными ребрами*) *некоторого графа в евклидову плоскость*. Очевидно, что вершины вложенного графа $\mathscr{K}$ описывают случаи, когда граница пересечения $\partial(S_1\cap S_2)$ содержит по крайней мере две вершины многоугольников S_1 и S_2, причем вершина одного из многоугольников лежит на границе другого многоугольника. Пусть $G_0, G_1, G_2, \dots, G_m$ — грани планарного графа $\mathscr{K}$, где через G_0 обозначена единственная неограниченная грань. Мы будем рассматривать ребра этого графа как относительно открытые множества (в то время как грани — открытые множества).

Величину Q (см. (1)) можно интерпретировать как функцию $Q:\Omega\to\mathbb{R}$. Очевидно, что эта функция непрерывна на Ω. Используя предположение об общем положении многоугольников, можно по непрерывности доопределить значение величины Q и во многих точках границы $\partial(\Omega)$ (граничные точки соответствуют расположениям многоугольников с условием $S_1\cap S_2 = \partial S_1\cap\partial S_2$). В силу выпуклости многоугольников S_1 и S_2 исключительным здесь является лишь случай, когда пересечение $S_1\cap S_2$ является одноточечным и состоит из общей вершины рассматриваемых многоугольников. В таких точках $\partial(\Omega)$ доопределить величину Q по непрерывности невозможно, в чем нетрудно убедиться (в окрестности этой точки присутствуют точки, соответствующие разным вариантам комбинаторного строения многоугольника $\partial(S_1\cap S_2)$, см. доказательство леммы 2). Но в этом особом случае можно получить *оценку сверху на величину* Q в окрестности каждой из таких точек границы Ω.

Пусть теперь ψ — радианная мера наименьшего из углов многоугольника S_1 и

$$\Delta = \Delta(S_1) = \frac{1}{\sin(\psi/2)}. \tag{3}$$

Лемма 2. *Пусть $x \in \partial\Omega$ соответствует случаю, когда пересечение $S_1 \cap S_2$ состоит из общей вершины двух многоугольников. Тогда для всех достаточно близких к x точек $y \in \mathrm{int}(\Omega)$ справедлива оценка*

$$Q \leqslant \Delta.$$

$\lhd$ Мы будем рассматривать настолько близкие к x точки y, что пересечение $S_1 \cap S_2$ представляет либо треугольник, либо четырехугольник. Возможны лишь три принципиально различных случая.

1) В пересечении получается треугольник KLM, стороны KL и LM являются частями границы многоугольника S_1, а сторона KM является частью границы многоугольника S_2. Пусть φ — угол между KL и LM. По лемме 1 получаем

$$Q = \frac{|KL| + |LM|}{|KM|} \leqslant \frac{1}{\sin(\varphi/2)} \leqslant \frac{1}{\sin(\psi/2)} = \Delta.$$

2) В пересечении получается треугольник KLM, стороны KL и LM которого являются частями границы многоугольника S_2, а сторона KM является частью границы многоугольника S_1. Тогда по неравенству треугольника имеем

$$Q = \frac{|KM|}{|KL| + |LM|} \leqslant 1 \leqslant \Delta.$$

3) Наконец, пусть в пересечении получится четырехугольник $KLMN$, стороны KL и LM являются частями границы многоугольника S_1, а стороны KN и MN являются частями границы многоугольника S_2. Пусть φ — угол между KL и LM. По неравенству треугольника и по лемме 1 получаем

$$Q = \frac{|KL| + |LM|}{|KN| + |MN|} < \frac{|KL| + |LM|}{|KM|} \leqslant \frac{1}{\sin(\varphi/2)} \leqslant \frac{1}{\sin(\psi/2)} = \Delta. \rhd$$

Нам будет также полезна следующая простая

Лемма 3. *Пусть функция f является дробно-линейной на открытом множестве $A \subset \mathbb{R}^2$ и принимает в некоторой точке значение, большее заданного числа s. Обозначим через $\widetilde{\partial}(A)$ те точки границы множества A, для которых существует предел функции f. Предположим дополнительно, что для любой точки $x \in \partial(A) \setminus \widetilde{\partial}(A)$ в некоторой ее окрестности значения функция f не превосходят числа s. Тогда (доопределенная по непрерывности на множество $\widetilde{\partial}(A)$) функция f принимает свое наибольшее значение на множестве $A \cup \widetilde{\partial}(A)$, причем среди точек максимального значения обязательно присутствуют точки множества $\widetilde{\partial}(A)$.*

$\lhd$ Для доказательства достаточно заметить, что дробно-линейная функция от двух аргументов является монотонной на любом прямолинейном отрезке области своего определения. $\rhd$

Таким образом, функция Q корректно определена и непрерывна на множестве $\Omega \cup \partial(\Omega)$ за исключением тех точек, которые соответствуют пересечениям $S_1 \cap S_2$, состоящим из общей вершины двух многоугольников. Но в окрестности таких точек величина Q ограничена сверху числом Δ согласно лемме 2. Это наблюдение приводит нас к следующему результату.

Теорема 1. *Допустим, что в некоторой точке $y \in \mathrm{int}(\Omega)$ функция Q принимает значение, большее $\Delta = \Delta(S_1)$. Тогда Q достигает своего наибольшего значения, причем среди расположений S_2 относительно S_1, на которых Q принимает свое максимальное значение, есть расположение со следующим свойством: граница пересечения $\partial(S_1 \cap S_2)$ содержит по крайней мере две геометрически различные вершины многоугольников S_1 и S_2, причем вершина одного из многоугольников лежит на границе другого.*

$\lhd$ Очевидно, что эта функция $Q : \Omega \to \mathbb{R}$ корректно определена и непрерывна на любой грани G_i ($1 \leqslant i \leqslant m$) планарного графа $\mathscr{K}$ (см. (2)). Основным свойством этой функции является ее дробно-линейность по переменным x, y на любой из граней G_i ($(x, y) \in \Omega$). Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно доказать линейность функций $L_1 = L_1(x, y)$ и $L_2 = L_2(x, y)$ на множестве G_i.

Докажем линейность L_1. Пусть $(x_0, y_0) \in G_i$. Будем рассматривать достаточно малые приращения $(\Delta x, \Delta y)$, чтобы $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in G_i$. Нам достаточно показать, что выражение

$$\Delta L_1 := L_1(x_0 + \Delta x, y + \Delta y) - L_1(x_0, y_0)$$

имеет вид $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ для некоторых вещественных чисел α и β (и для всех достаточно малых приращений одновременно). Действительно, линейность L_1 на G_i тогда будет следовать из связности G_i.

Пусть $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_s$ — произвольным образом занумерованные ребра многоугольника $S_2 = S_2(x, y)$, пересекающиеся с внутренностью многоугольника S_1 при $(x, y) \in G_i$ (комбинаторное строение многоугольника $S_1 \cap S_2$ при этом неизменно!). Понятно, что $\Delta L_1 = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_s$, где Δ_j — приращение длины той части стороны l_j многоугольника S_2, которая попадает во внутренность многоугольника S_1. Простые вычисления показывают, что $\Delta_j = \alpha_j\Delta x + \beta_j\Delta y$ для некоторых вещественных чисел α_j и β_j (координаты точек пересечения стороны l_j с соответствующими сторонами многоугольника S_1 зависят линейно от Δx и Δy). Отсюда и из предыдущих выкладок легко получается линейность функции L_1 на множестве G_i. Линейность функции L_2 доказывается аналогично. Таким образом, мы получили, что Q является дробно-линейной на множестве G_i.

Далее, если все значения функции Q на множестве G_i не превосходят Δ, то f не может достигать своего максимального значения ни на множестве G_i, ни на его замыкании. Если же значение Q в некоторой точке множества G_i превосходит Δ, то по лемме 3 существует точка на границе $\partial(G_i)$, значение Q в которой не меньше значения Q в любой точке G_i.

Поскольку множеств G_i конечное число, то величина Q достигает своего наибольшего значения, и одной из точек максимального значения является точка границы некоторого G_i.

Напомним, что множество $\mathscr{K}$ является объединением границ всех множеств G_i ($1 \leqslant i \leqslant m$).

Функция Q на относительной внутренности каждого ребра (прямолинейного отрезка плоскости) графа $\mathscr{K}$ также является дробно-линейной (как «предельное» значение дробно-линейной функций на множестве G_i, границе которого и принадлежит рассматриваемое ребро). Поэтому среди точек максимального значения Q обязательно наличествует вершина графа $\mathscr{K}$.

Подчеркнем, что вершины графа, соответствующие пересечениям $S_1 \cap S_2$, каждое из которых состоит из общей вершины двух многоугольников, исключаются из рассмотрения, поскольку в окрестностях этих точек (согласно лемме 2) выполнено неравенство $Q \leqslant \Delta$. $\rhd$

При доказательстве вышеприведенной теоремы мы воспользовались принципом, аналогичным основной идее метода линейного программирования: экстремальные значения функции обязаны достигаться (в том числе и) на границе исследуемого многоугольника. Нетрудно понять, что теорема 1 может быть обобщена и на случай многомерных задач подобного класса.

Замечание 3. В работе [2] в качестве вспомогательного средства использовался (неверный в целом) вариант вышеприведенной теоремы 1 [2, теорема 2], в котором нет предположения о том, что величина Q принимает значения большие $\Delta = \Delta(S_1)$ в некоторых точках $y \in \mathrm{int}(\Omega)$. В теореме 1 из [2] доказывалось неравенство $Q < 3$ для конгруэнтных прямоугольников, и поскольку в этом случае $\Delta = \sqrt{2} < 3$, доказательство указанной теоремы становится корректным, если заменить в нем ссылку на теорему 2 из той же работы ссылкой на теорему 1 из работы настоящей. Этот недочет в статье [2] был ранее отмечен в работе [1], в которой был также указан и способ его устранения.

3. Алгоритм решения задачи Дж.В. Фике для выпуклых многоугольников

Теперь мы рассмотрим некоторый алгоритм решения общей задачи Фике для выпуклого многоугольника K, обладающего осью симметрии (в случае отсутствия такой оси требуется несложная модификация алгоритма).

Важное значение в таком исследовании играет величина $\Delta = \Delta(K)$ (см. (3)). Отметим, что существует такое расположение K' относительно K, для которого $\mathrm{length}(\partial(\mathrm{K}) \cap \mathrm{K}') = \Delta \cdot \mathrm{length}(\partial(\mathrm{K}') \cap \mathrm{K})$. Для этого достаточно расположить многоугольники так, что $K \cap K'$ является равнобедренным треугольником, угол которого, противолежащий основанию, совпадает с наименьшим углом многоугольника K' (имеющим радианную меру ψ). Таким образом, Δ не превосходит искомой величины α.

Далее можно действовать следующим образом. Мы фиксируем многоугольник K и декартову систему координат с центром в центре масс этого многоугольника. Тогда положение второго многоугольника K' (он конгруэнтен K) определяется некоторым движением евклидовой плоскости (переводящим K в K'). Любое такое движение можно представить в виде композиции некоторого элемента общей ортогональной группы $O(2)$ и некоторого параллельного переноса. Более того, в силу наличия у многоугольника K осевой симметрии мы можем ограничиться лишь собственными движениями плоскости, т. е. для описания возможных положений многоугольника K' достаточно композиций поворотов вокруг начала координат и параллельных переносов.

Зафиксируем угол $\varphi \in [0, 2\pi)$. Пусть $K(\varphi)$ — результат поворота многоугольника K на угол φ. Если теперь рассмотреть в качестве многоугольников S_1 и S_2 в формулировке теоремы 1 многоугольники K и $K(\varphi)$ соответственно, то мы можем определить максимальное значение величины Q (см. (1)), используя результат этой теоремы. Необходимо отметить, что для применимости теоремы 1, мы должны исключить рассмотрение тех углов φ, для которых у многоугольника $K(\varphi)$ есть сторона параллельная некоторой стороне многоугольника K. Обозначим множество таких особых значений φ через Φ_0 (очевидно, что это множество конечно). Пусть теперь $\Phi_r = [0, 2\pi) \setminus \Phi_0$.

Зафиксируем некоторый угол $\varphi \in \Phi_r$. Рассмотрим теперь такой параллельный перенос L, для которого граница пересечения $\partial(L(K(\varphi)) \cap K)$ содержит по крайней мере две геометрически различные вершины многоугольников $L(K(\varphi))$ и K (см. формулировку теоремы 1). Отметим, что таких параллельных переносов существует лишь конечное число. Теперь по всем этим переносам следует вычислить максимум величины

$$\frac{\mathrm{length}\bigl(\partial(\mathrm{K})\cap\mathrm{int}(\mathrm{L}(\mathrm{K}(\varphi)))\bigr)}{\mathrm{length}\bigl(\partial(\mathrm{L}(\mathrm{K}(\varphi)))\cap\mathrm{int}(\mathrm{K})\bigr)}=\frac{\mathrm{length}\bigl(\partial(\mathrm{K})\cap\mathrm{L}(\mathrm{K}(\varphi))\bigr)}{\mathrm{length}\bigl(\partial(\mathrm{L}(\mathrm{K}(\varphi)))\cap\mathrm{K}\bigr)},$$

который мы обозначим через $Q_{\max}(\varphi)$ (приведенное равенство справедливо, поскольку $\varphi\in\Phi_r$, т. е. у многоугольника $L(K(\varphi))$ нет сторон, параллельных какой-либо стороне многоугольника K).

Пусть α_0 — верхняя грань всех значений $Q_{\max}(\varphi)$, где $\varphi\in\Phi_r$. Теперь мы можем сформулировать основной результат работы.

Теорема 2. *Число* $\alpha'=\max\{\alpha_0,\Delta\}$ *является решением задачи Дж. В. Фике для исследуемого выпуклого многоугольника* K.

$\lhd$ Пусть число α — решение задачи Дж. В. Фике для многоугольника K. Сначала продемонстрируем справедливость неравенства $\alpha\geqslant\alpha'=\max\{\alpha_0,\Delta\}$. Действительно, неравенство $\alpha\geqslant\Delta$ обосновано выше, а неравенство $\alpha\geqslant\alpha_0$ очевидно.

Осталось доказать, что $\alpha\leqslant\alpha'$. Допустим противное. Тогда существуют некоторый угол $\varphi_0\in[0,2\pi)$ и параллельный перенос L, для которых справедливо неравенство

$$\mathrm{length}\bigl(\partial(\mathrm{K})\cap\mathrm{L}(\mathrm{K}(\varphi_0))\bigr)>\alpha'\cdot\mathrm{length}\bigl(\partial(\mathrm{L}(\mathrm{K}(\varphi_0)))\cap\mathrm{K}\bigr).$$

Рассмотрим последовательность углов $\{\varphi_n\}$, где $\varphi_n\in\Phi_r$ и $\lim_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi_0$. Пусть

$$A_n=\mathrm{length}\bigl(\partial(\mathrm{K})\cap\mathrm{L}(\mathrm{K}(\varphi_\mathrm{n}))\bigr),\quad \mathrm{B_n}=\mathrm{length}\bigl(\partial(\mathrm{L}(\mathrm{K}(\varphi_\mathrm{n})))\cap\mathrm{K}\bigr).$$

Нетрудно понять, что

$$\mathrm{length}\bigl(\partial(\mathrm{K})\cap\mathrm{L}(\mathrm{K}(\varphi_0))\bigr)=\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\mathrm{A_n}+\mathrm{G},\quad \mathrm{length}\bigl(\partial(\mathrm{L}(\mathrm{K}(\varphi_0)))\cap\mathrm{K}\bigr)=\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\mathrm{B_n}+\mathrm{G},$$

где $G=\mathrm{length}\bigl(\partial(\mathrm{K})\cap\partial(\mathrm{L}(\mathrm{K}(\varphi_0)))\bigr)$.

Из приведенных выкладок и очевидного неравенства $\alpha'\geqslant\Delta>1$ следует, что для достаточно больших n выполнено неравенство

$$A_n=\mathrm{length}\bigl(\partial(\mathrm{K})\cap\mathrm{L}(\mathrm{K}(\varphi_\mathrm{n}))\bigr)>\alpha'\cdot\mathrm{length}\bigl(\partial(\mathrm{L}(\mathrm{K}(\varphi_\mathrm{n})))\cap\mathrm{K}\bigr)=\alpha'\cdot\mathrm{B_n}.$$

Поскольку $\alpha'\geqslant\Delta$, то по теореме 1 мы получаем неравенство $Q_{\max}(\varphi_n)>\alpha'$, и, соответственно, $\alpha_0>\alpha'$, что невозможно. $\rhd$

Только что доказанная теорема дает достаточно простой алгоритм для нахождения решения задачи Дж. В. Фике для произвольного выпуклого многоугольника. Использование этого алгоритма будет полезно при аналитическом решении этой задачи для многоугольников с небольшим числом сторон, а также для приближенного решения с помощью компьютерных вычислений.

Если многоугольник K не имеет оси симметрии, то дополнительно к поворотам на угол φ требуется добавить еще симметрию S относительно некоторой прямой, поскольку многоугольник K' может переводиться в многоугольник K с помощью несобственного движения евклидовой плоскости. Таким образом, кроме исследования многоугольников $K(\varphi)$ надо тем же способом исследовать и многоугольники, получающиеся из $S(K)$ поворотом на различные углы. При такой небольшой модернизации алгоритм может быть использовать и для исследования многоугольников без осевой симметрии.

Авторы выражают признательность профессору Эндре Макаи мл. (Endre Makai Jr.) за полезные обсуждения представленной тематики.

Литература

1. *Никоноров Ю. Г., Никонорова Ю. В.* Применение системы Maple к решению геометрических задач: Учебное пособие, 2-е изд. доп.—Рубцовск: Изд-во Алтайского гос. ун-та, 2005.—80 с.
2. *Никонорова Ю. В.* Об одной экстремальной задаче на евклидовой плоскости // Мат. тр.—2001.—Т. 4, № 1.—С. 111–121.
3. *Рассказова Н. В.* Задача Дж. В. Фике для треугольников // Изв. АГУ. Спец. вып., посвященный пятилетию краевой конф. по математике.—Барнаул: Изд-во Алтайского гос. ун-та, 2002.—С. 26–28.
4. *Croft H. T., Falconer K. J., Guy R. K.* Unsolved problems in geometry. Corrected reprint.—Berlin: Springer-Verlag, 1994.—xvi+198 p.
5. *Fickett J. W.* Overlapping congruent convex bodies // Amer. Math. Monthly.—1980.—Vol. 87.—P. 814–815.

Статья поступила 21 сентября 2009 г.

Никоноров Юрий Геннадьевич
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
главный научный сотрудник лаб. прикладного нелинейного анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: nikonorov2006@mail.ru

Никонорова Юлия Васильевна
Волгодонский институт сервиса (ВИС ГОУ ВПО «ЮРГУЭС»),
доцент кафедры экономики и управления
РОССИЯ, 347386, Волгодонск, пр. Мира, 16
E-mail: nikonorova2009@mail.ru

ON AN APPROACH TO SOLUTION OF J.W. FICKETT'S PROBLEM ON OVERLAPPING CONGRUENT POLYGONS

Nikonorov Yu. G., Nikonorova Yu. V.

A general approach to J. W. Fickett's problem on overlapping congruent convex polygons on Euclidean plane is considered in details.

Key words: Euclidean plane, convex polygons, problem of J. W. Fickett, planar graphs, fractional-linear functions.