Владикавказский математический журнал
2012, Том 14, Выпуск 2, С. 3–30

УДК **514.765**

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЯХ НА ГРУППАХ ЛИ МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ[1]

Д. С. Воронов, О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский

В статье дается полная классификация возможных сигнатур оператора одномерной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой и полная классификация четырехмерных алгебр Ли (с точностью до изоморфизма), группы Ли которых наделены левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором Вейля.

Ключевые слова: алгебры Ли, группы Ли, левоинвариантные римановы метрики, одномерная кривизна, гармонический тензор Вейля.

1. Введение и основные результаты

Исследованию инвариантных тензорных полей на группах Ли малых размерностей посвящены работы многих математиков. Так возможные сигнатуры оператора Риччи на группах Ли изучались в классической работе Дж. Милнора [1] в размерности не выше 3 и А. Г. Кремлевым, Ю. Г. Никоноровым [2, 3] в размерности 4. Важную роль при исследовании римановых многообразий также играет тензор одномерной кривизны A_{ij}, который представляет собой целую часть от деления риманова тензора кривизны на метрический тензор относительно произведения Кулкарни — Номидзу [4]. Исследование тензора одномерной кривизны проводилось в [5]. Данная работа обобщает и уточняет результаты, полученные в [5], дает классификацию возможных сигнатур оператора одномерной кривизны трехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

Особый интерес представляет вопрос гармоничности тензора Вейля, который характеризует степень отклонения римановых многообразий от конформно плоских. В размерности не выше 3 тензор Вейля тривиален, а его аналогом является тензор Схоутена — Вейля. Отметим, что вопросу гармоничности тензора Схоутена — Вейля на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой посвящена работа [6]. В размерности четыре и выше тензор Вейля, вообще говоря, отличен от нуля. Поэтому возникает вопрос о гармоничности тензора Вейля на группах Ли размерности $n \geqslant 4$ с левоинвариантными римановыми метриками (см. также [7, 8]). В данной работе мы исследуем случай вещественных четырехмерных групп Ли.

Пусть (M, g) — риманово многообразие размерности n; X, Y, Z, V — векторные поля на M. Обозначим через $R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$ тензор кривизны

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты №№ 08-01-98001, 10-01-90000-Бел_а, гранта Поддержки ведущей научной школы РФ НШ-5682.2008.1, а также при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № 02.740.11.0457.

Римана и через ∇ связность Леви — Чивита. Тензор Риччи r и скалярную кривизну s определим соответственно как $r(X,Y)=\mathrm{tr}(V\to R(X,V)Y)$ и $s=\mathrm{tr}(r)$. Разделив тензор кривизны R на метрический тензор g в смысле произведения Кулкарни — Номидзу, получим (см. [4]): $R=W+A \owedge g$, где W — тензор Вейля, A — тензор одномерной кривизны. При этом

$$A_{ij}=\frac{1}{n-2}\left(r_{ij}-\frac{sg_{ij}}{2(n-1)}\right), \tag{1}$$

$$(A\wedge g)(X,Y,Z,V)=A(X,Z)g(Y,V)+A(Y,V)g(X,Z)-A(X,V)g(Y,Z)-A(Y,Z)g(X,V).$$

Под *сигнатурой* симметрического оператора B, действующего на n-мерном евклидовом пространстве, будем понимать упорядоченный набор $(\mathrm{sgn}(\tau_1),\mathrm{sgn}(\tau_2),\dots,\mathrm{sgn}(\tau_n))$, где $\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant\ldots\leqslant\tau_n$ — собственные значения оператора B, $\mathrm{sgn}(x)$ означает знак (вещественного) числа x.

Проблема определения возможных сигнатур оператора одномерной кривизны левоинвариантных римановых метрик на заданной группе Ли является локальной. В данном случае оператор, соответствующий тензору A, действует на алгебре Ли группы Ли. Поэтому естественно переформулировать задачу в терминах метрических алгебр Ли. Именно, определить возможные значения сигнатур оператора одномерной кривизны для всевозможных скалярных произведений на заданной алгебре Ли.

Для упрощения изложения занумеруем все возможные сигнатуры в трехмерном случае так, как это указано в таблице 1.

Таблица 1

№	1	2	3	4	5
Сигнатура	$(-,-,-)$	$(-,-,0)$	$(-,-,+)$	$(-,0,0)$	$(-,0,+)$
№	6	7	8	9	10
Сигнатура	$(-,+,+)$	$(0,0,0)$	$(0,0,+)$	$(0,+,+)$	$(+,+,+)$

Классификация трехмерных групп Ли и соответствующих им алгебр Ли получена Дж. Милнором в [1], а формулы для нахождения главных значений оператора одномерной кривизны даны в [5]. Придерживаясь системы обозначений, введенных в [1], сформулируем один из основных результатов работы.

Теорема 1. *Пусть G — унимодулярная трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, s — произвольная сигнатура из таблицы 1. Тогда s реализуется в качестве сигнатуры оператора одномерной кривизны для некоторого скалярного произведения на $\mathfrak{g}$ в том и только том случае, если в таблице 2 на пересечении строки, соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и столбца, соответствующего сигнатуре s, находится знак «+».*

Таблица 2

	№ сигнатуры									
Алгебра Ли	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$su(2)$	−	−	+	−	+	+	−	+	+	+
$sl(2,R)$	−	−	+	−	+	+	−	−	−	−
$e(2)$	−	−	+	−	−	−	+	−	−	−
$e(1,1)$	−	−	+	−	+	+	−	−	−	−
h	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−
R^3	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−

Теорема 2. *Пусть G — неунимодулярная трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Тогда в качестве сигнатур оператора одномерной кривизны на $\mathfrak{g}$ реализуемы только сигнатуры* $(-,-,-)$, $(-,-,0)$, $(-,-,+)$, $(-,0,+)$, $(-,+,+)$, *т. е. сигнатуры* 1, 2, 3, 5 *и* 6 *таблицы* 1.

Придерживаясь терминологии работ [4, 10], будем говорить, что риманово многообразие (M,g) размерности $n \geqslant 4$ есть *пространство с гармоническим тензором Вейля* или *C-пространство*, если дивергенция $\operatorname{div} W = 0$.

Определение 1. Будем называть алгебру Ли группы Ли *разложимой*, если она представима в виде прямой суммы алгебр Ли меньших размерностей.

Определение 2. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *унимодулярной*, если след любого внутреннего дифференцирования алгебры Ли равен нулю, т. е. $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} X) \equiv 0$ для любого $X \in \mathfrak{g}$, где $\operatorname{ad} X(Y) = [X,Y]$, для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Одна из классификаций четырехмерных алгебр Ли дана Г. М. Мубаракзяновым в [9]. Придерживаясь системы обозначений [9], приведем результаты работ А. Г. Кремлева и Ю. Г. Никонорова [2, 3], которые понадобятся при исследовании вещественных четырехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором Вейля.

Таблица 3

Алгебра Ли	Знаки A, B, C
$4\mathbb{A}_1$	$0,0,0$
$\mathbb{A}_{3,1} \oplus \mathbb{A}_1$	$0,0,+$
$\mathbb{A}_{3,4} \oplus \mathbb{A}_1$	$-,0,+$
$\mathbb{A}_{3,6} \oplus \mathbb{A}_1$	$0,+,+$
$\mathbb{A}_{3,8} \oplus \mathbb{A}_1$	$-,+,+$
$\mathbb{A}_{3,9} \oplus \mathbb{A}_1$	$+,+,+$

Таблица 4

Алгебра Ли	Структурные константы	Ограничения
$\mathbb{A}_{4,1}$	$c^1_{2,4} = A$, $c^1_{3,4} = B$, $c^2_{3,4} = C$	$A > 0$, $C > 0$
$\mathbb{A}^{-2}_{4,2}$	$c^1_{1,4} = -2A$, $c^1_{2,4} = B$, $c^2_{2,4} = A$, $c^1_{3,4} = C$, $c^2_{3,4} = D$, $c^3_{3,4} = A$	$A > 0$, $D > 0$
$\mathbb{A}^{\alpha,\,-1-\alpha}_{4,5}$, $\alpha \in (-1, \frac{1}{2}]$	$c^1_{1,4} = A$, $c^1_{2,4} = B$, $c^2_{2,4} = C$, $c^1_{3,4} = D$, $c^2_{3,4} = F$, $c^3_{3,4} = -A - C$	$A > 0$, $C < 0$
$\mathbb{A}^{-2\beta,\beta}_{4,6}$, $\beta \in (0, +\infty)$	$c^1_{1,4} = -2A$, $c^1_{2,4} = B$, $c^3_{2,4} = D$, $c^1_{3,4} = F$, $c^2_{2,4} = A + C$, $c^2_{3,4} = G$, $c^3_{3,4} = A - C$	$A > 0$, $D < 0$, $G > 0$
$\mathbb{A}_{4,8}$	$c^1_{2,3} = A$, $c^1_{2,4} = B$, $c^2_{2,4} = C$, $c^1_{3,4} = D$, $c^2_{3,4} = F$, $c^3_{3,4} = -C$	$A > 0$, $C > 0$
$\mathbb{A}_{4,10}$	$c^1_{2,3} = A$, $c^1_{2,4} = B$, $c^3_{2,4} = C$, $c^1_{3,4} = D$, $c^2_{3,4} = G$	$A > 0$, $C < 0$, $G > 0$

Лемма 1 [2]**.** *Для произвольного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на четырехмерной действительной разложимой унимодулярной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует $\langle \cdot, \cdot \rangle$-ортонормированный базис, в котором ненулевые структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеют вид:* $c^3_{1,2} = A$, $c^4_{1,2} = -AM$, $c^1_{2,3} = B$, $c^4_{2,3} = -BK$, $c^2_{1,3} = -C$, $c^4_{1,3} = CL$, *где* $K, L, M \in \mathbb{R}$ *— произвольные,* $A, B, C \in \mathbb{R}$ *и* $A \leqslant B \leqslant C$.

Лемма 2 [2]**.** *Для произвольного скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на четырехмерной действительной неразложимой унимодулярной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует $\langle\cdot,\cdot\rangle$-ортонормированный базис с ненулевыми структурными константами, приведенными в таблице 4.*

Лемма 3 [3]**.** *Для произвольного скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на четырехмерной действительной разложимой неунимодулярной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует $\langle\cdot,\cdot\rangle$-ортонормированный базис с ненулевыми структурными константами, приведенными в таблице 5.*

Таблица 5

Алгебра Ли	Структурные константы	Ограничения
$\mathbb{A}_2\bigoplus 2\mathbb{A}_1$	$c^2_{1,2}=A$, $c^3_{1,2}=B$	$A>0$, $B\geqslant 0$
$2\mathbb{A}_2$	$c^2_{1,2}=A$, $c^2_{1,3}=B$, $c^4_{1,3}=C$, $c^2_{1,4}=F(A-D)$, $c^4_{1,4}=D$, $c^2_{3,4}=-FG$, $c^4_{3,4}=G$	$A>0$, $G>0$
$\mathbb{A}_{3,2}\bigoplus\mathbb{A}_1$	$c^1_{1,3}=c^2_{2,3}=A$, $c^4_{1,3}=B$, $c^1_{2,3}=C$, $c^4_{2,3}=D$	$A>0$, $C>0$
$\mathbb{A}_{3,3}\bigoplus\mathbb{A}_1$	$c^1_{1,3}=c^2_{2,3}=A$, $c^4_{2,3}=B$	$A>0$, $B\geqslant 0$
$\mathbb{A}^{\alpha}_{3,5}\bigoplus\mathbb{A}_1$	$c^1_{1,3}=A$, $c^4_{1,3}=B$, $c^1_{2,3}=C$, $c^2_{2,3}=A\alpha$, $c^4_{2,3}=D$	$A>0$, $0<\lvert\alpha\rvert<1$
$\mathbb{A}^{\alpha}_{3,7}\bigoplus\mathbb{A}_1$	$c^1_{1,3}=c^2_{2,3}=\alpha L$, $c^2_{1,3}=-AL$, $c^4_{13}=BL$, $c^4_{23}=CL$, $c^1_{2,3}=L/A$	$L>0$, $A>0$, $\alpha>0$

Таблица 6

Алгебра Ли	Структурные константы	Ограничения
$\mathbb{A}^{\alpha}_{4,2}$	$c^1_{1,4}=\alpha L$, $c^1_{2,4}=A(\alpha-1)L$, $c^2_{2,4}=c^3_{3,4}=L$, $c^1_{3,4}=(B(\alpha-1)-AC)L$, $c^2_{3,4}=CL$,	$C>0$, $L>0$, $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq -2$
$\mathbb{A}_{4,3}$	$c^1_{1,4}=L$, $c^1_{2,4}=AL$, $c^1_{3,4}=BL$, $c^2_{3,4}=CL$	$C>0$, $L>0$
$\mathbb{A}_{4,4}$	$c^1_{1,4}=c^2_{2,4}=c^3_{3,4}=L$, $c^1_{2,4}=AL$, $c^1_{3,4}=BL$, $c^2_{3,4}=CL$,	$A>0,C>0,L>0$
$\mathbb{A}^{\alpha,\beta}_{4,5}$	$c^1_{2,4}=A(\alpha-1)L$, $c^2_{2,4}=\alpha L$, $c^2_{3,4}=C(\alpha-\beta)L$, $c^1_{1,4}=L$, $c^1_{3,4}=(AC(\alpha-1)+B(\beta-1))L$, $c^3_{3,4}=\beta L$, $-1\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant 1$	$L>0$, $\alpha+\beta\neq -1$, $\alpha\beta\neq 0$
$\mathbb{A}^{\alpha,\beta}_{4,6}$	$c^1_{1,4}=\alpha L$, $c^1_{2,4}=AL$, $c^2_{2,4}=c^3_{3,4}=\beta L$, $c^3_{2,4}=-\frac{L}{C}$, $c^1_{3,4}=BL$, $c^2_{3,4}=CL$	$C>0$, $L>0$, $\alpha\neq 0$, $\beta\geqslant 0$
$\mathbb{A}_{4,7}$	$c^1_{1,4}=2A$, $c^1_{2,3}=B$, $c^1_{2,4}=C$, $c^2_{2,4}=A$, $c^1_{3,4}=D$, $c^2_{3,4}=F$, $c^3_{3,4}=A$	$A>0$, $B>0$, $F>0$
$\mathbb{A}^{\beta}_{4,9}$	$c^1_{1,4}=A(\beta+1)$, $c^1_{2,3}=B$, $c^1_{2,4}=C$, $c^2_{2,4}=A$, $c^1_{3,4}=D$, $c^2_{3,4}=F(1-\beta)$, $c^3_{3,4}=A\beta$	$-1<\beta\leqslant 1$, $A>0$, $B>0$,
$\mathbb{A}^{\alpha}_{4,11}$	$c^1_{1,4}=2A\alpha$, $c^1_{2,3}=B$, $c^1_{2,4}=C$, $c^2_{2,4}=A\alpha$, $c^1_{3,4}=F$, $c^3_{2,4}=-AD$, $c^2_{3,4}=\frac{A}{D}$, $c^3_{3,4}=A\alpha$	$\alpha>0$, $A>0$, $B>0$, $D>0$
$\mathbb{A}_{4,12}$	$c^1_{1,3}=c^2_{2,3}=A$, $c^1_{1,4}=c^2_{2,4}=B$, $c^2_{1,4}=C$, $c^1_{2,4}=D$, $c^1_{3,4}=F$, $c^2_{3,4}=G$	$A>0$, $C<0$, $D>0$

В зависимости от знаков чисел A, B и C получаются различные алгебры Ли. Все они, с точностью до изоморфизма, приведены в таблице 3, основанной на результатах Дж. Милнора о трехмерных унимодулярных алгебрах Ли [1]. Здесь $4\mathbb{A}_1$ — коммутативная алгебра Ли, а каждая $\mathbb{A}_{3,i}$ есть унимодулярная алгебра Ли размерности 3 [9].

Лемма 4 [3]**.** *Для произвольного скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на четырехмерной действительной неразложимой неунимодулярной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует $\langle\cdot,\cdot\rangle$-ортонормированный базис с ненулевыми структурными константами, приведенными в таблице 6.*

В указанных выше обозначениях имеют место

Теорема 3. *Пусть G — действительная четырехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и разложимой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда равенство* $\mathrm{div}W = 0$ *возможно лишь в том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ есть либо $4\mathbb{A}_1$, либо $\mathbb{A}_{3,6} \oplus \mathbb{A}_1$, либо $\mathbb{A}_{3,9} \oplus \mathbb{A}_1$.*

Теорема 4. *Пусть G — вещественная четырехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и неразложимой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда G не является C-пространством.*

Теорема 5. *Пусть G — вещественная четырехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и разложимой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда* $\mathrm{div}\, W = 0$ *в том и только в том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и ее структурные константы содержатся в таблице 7.*

Таблица 7

Разложимая алгебра Ли	Нетривиальные структурные константы	Ограничения
$\mathbb{A}_2 \bigoplus 2\mathbb{A}_1$	$c_{1,2}^2 = A$	$A > 0$
$2\mathbb{A}_2$	$c_{1,2}^2 = A$, $c_{3,4}^4 = G$	$A > 0$, $G > 0$
$\mathbb{A}_{3,3} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c_{1,3}^1 = c_{2,3}^2 = A$	$A > 0$
$\mathbb{A}_{3,7}^{\alpha} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c_{1,3}^1 = c_{2,3}^2 = \alpha L$, $-c_{1,3}^2 = c_{2,3}^1 = L$	$L > 0$, $\alpha > 0$

Теорема 6. *Пусть G — вещественная четырехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и неразложимой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда* $\mathrm{div}\, W = 0$ *в том и только том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и ее структурные константы содержатся в таблице 8.*

Таблица 8

Неразложимая алгебра Ли	Нетривиальные структурные константы	Ограничения
$\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta}$	$c_{1,4}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = L$	$L > 0$
$\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$	$c_{1,4}^1 = \alpha L$, $c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = -L$	$\alpha \neq 0$, $L > 0$
$\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$	$c_{1,4}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = \beta L$, $c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = -L$	$\beta > 0$, $L > 0$
$\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$	$c_{1,4}^1 = c_{2,3}^1 = 2A$, $c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = A$	$A > 0$
$\mathbb{A}_{4,11}^{\alpha}$	$c_{1,4}^1 = c_{2,3}^1 = 2A\alpha$, $c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = A\alpha$, $c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = A$	$A > 0$, $\alpha > 0$
$\mathbb{A}_{4,12}$	$c_{1,3}^1 = c_{2,3}^2 = A$, $c_{1,4}^1 = c_{2,4}^2 = B$, $c_{1,4}^2 = -c_{2,4}^1 = -D$	$A > 0$, $D > 0$

2. Сигнатура оператора одномерной кривизны на 3-мерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой

В данном разделе изучаются сигнатуры оператора одномерной кривизны на 3-мерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой и доказываются теоремы 1 и 2, при этом существенно используются результаты работ [1, 5].

2.1. Унимодулярный случай. Пусть G — трехмерная унимодулярная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение на $\mathfrak{g}$. Тогда в $\mathfrak{g}$ существует [1] ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 с коммутационными соотношениями

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_1, e_3] = \lambda_2 e_2, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \tag{2}$$

где структурные константы удовлетворяют неравенствам $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$.

Таблица 9

Случай	Знаки $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	Группа Ли	Алгебра Ли
(a)	$(+,+,+)$	$SU(2)$ или $SO(3)$	$su(2)$ — компактная, простая
(b)	$(+,+,-)$	$SL(2,\mathbb{R})$ или $O(1,2)$	$sl(2,\mathbb{R})$ — некомпактная, простая
(c)	$(+,+,0)$	$E(2)$	$e(2)$ — разрешимая
(d)	$(+,-,0)$	$E(1,1)$	$e(1,1)$ — разрешимая
(e)	$(+,0,0)$	H — группа Гейзенберга	h — нильпотентная
(f)	$(0,0,0)$	$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^3$ — коммутативная

Кроме того, существует ровно шесть неизоморфных трехмерных алгебр Ли и соответствующих им типов унимодулярных трехмерных групп Ли. Все они приведены в таблице 9 (см. подробнее в [1]).

Из (1) следует, что квадратичная форма A в базисе (2) имеет диагональный вид, и ее главные значения равны (см. [5]):

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{8}(5\lambda_1^2 - 3(\lambda_2-\lambda_3)^2 - 2\lambda_1(\lambda_3+\lambda_2)),\\ k_2 &= \frac{1}{8}(5\lambda_2^2 - 3(\lambda_1-\lambda_3)^2 - 2\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)),\\ k_3 &= \frac{1}{8}(5\lambda_3^2 - 3(\lambda_1-\lambda_2)^2 - 2\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)). \end{aligned} \tag{3}$$

Таким образом, определение сигнатуры оператора одномерной кривизны трехмерной унимодулярной алгебры Ли с левоинвариантной римановой метрикой сводится к нахождению всевозможных знаков главных значений k_1, k_2, k_3 в зависимости от знаков структурных констант $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Далее мы рассмотрим последовательно все трехмерные унимодулярные алгебры Ли, чем и докажем теорему 1.

Алгебра $su(2)$.

Предложение 1. *В качестве сигнатуры оператора одномерной кривизны на алгебре* $su(2)$ *реализуются только сигнатуры* $(-,-,+)$, $(-,0,+)$, $(-,+,+)$, $(0,0,+)$, $(0,+,+)$, $(+,+,+)$, *т. е. сигнатуры* 3, 5, 6, 8, 9 *и* 10 *таблицы* 1.

$\lhd$ Из функций (3) рассмотрим k_3. Заметим, что

$$k_3 = \frac{1}{8}\big[5\lambda_3^2 - 3(\lambda_1-\lambda_2)^2 - 2\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)\big] = \frac{1}{8}\big[4\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1) + 4\lambda_3^2 - 4\lambda_2^2 + (\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)^2\big].$$

Таким образом, $k_3 > 0$. Следовательно, сигнатуры 1, 2, 4 и 7 из таблицы 1 нереализуемы. $\rhd$

В таблице 10 приведены значения параметров λ_1, λ_2, λ_3, при которых реализуется сигнатуры, указанные в формулировке предложения.

Таблица 10

№	сигнатура	λ_1	λ_2	λ_3
3	$(-,-,+)$	1	1	$\frac{5}{3}$
5	$(-,0,+)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{4}{5}$	1
6	$(-,+,+)$	1	1	$\frac{2}{5}$
8	$(0,0,+)$	1	1	$\frac{4}{3}$
9	$(0,+,+)$	$\frac{4}{5}$	1	1
10	$(+,+,+)$	1	1	1

Алгебра $sl(2,R)$.

Предложение 2. *В качестве сигнатуры оператора одномерной кривизны на алгебре* $sl(2,R)$ *реализуются только сигнатуры* $(-,-,+)$, $(-,0,+)$, $(-,+,+)$, *т. е. сигнатуры* 3, 5 *и* 6 *таблицы* 1.

$\lhd$ В [5] показано, что при заданных ограничениях на структурные константы ($\lambda_3<0$, $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2$) алгебры Ли $sl(2,R)$ выполняются следующие неравенства:

1) $k_1<0$, $k_3>0$, если $\lambda_1=\lambda_2>0$,

2) $k_1<0$, $k_3>0$, если $0<\lambda_1<\lambda_2\leqslant\lambda_1+|\lambda_3|$,

3) $k_1<0$, $k_2>0$, если $0<\lambda_1<\lambda_1+|\lambda_3|<\lambda_2$.

Таким образом, сигнатуры 1, 2, 4, 7–10 из таблицы 1 нереализуемы. $\rhd$

В таблице 11 приведены значения параметров λ_1, λ_2, λ_3, при которых реализуются сигнатуры, указанные в формулировке предложения.

Таблица 11

№	сигнатура	λ_1	λ_2	λ_3
3	$(-,-,+)$	1	1	-1
5	$(-,0,+)$	$\frac{19+4\sqrt{31}}{15}$	$\frac{4}{5}$	-1
6	$(-,+,+)$	$\frac{1}{3}$	1	-1

Алгебра $e(2)$**.**

Предложение 3. *В качестве сигнатуры оператора одномерной кривизны на алгебре* $e(2)$ *реализуются только сигнатуры* $(-,-,+)$, $(0,0,0)$, *т. е. сигнатуры* 3 *и* 7 *таблицы* 1.

$\lhd$ Рассмотрим чему в данном случае равны главные кривизны оператора одномерной кривизны. Подставим $\lambda_3=0$ в (3), и после упрощения получим

$$\begin{aligned} k_1&=\frac{1}{8}(5\lambda_1+3\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2),\\ k_2&=-\frac{1}{8}(3\lambda_1+5\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2),\\ k_3&=-\frac{3}{8}(\lambda_1-\lambda_2)^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Из данных равенств, очевидно, следует, что возможны только два случая, при которых сигнатуры оператора одномерной кривизны будут различны: 1) $0<\lambda_1=\lambda_2$ и 2) $0<\lambda_1<\lambda_2$. В первом случае получаем сигнатуру $(0,0,0)$, во втором — сигнатуру $(-,-,+)$. $\rhd$

Алгебра $e(1,1)$.

Предложение 4. *В качестве сигнатуры оператора одномерной кривизны на алгебре* $e(1,1)$ *реализуются только сигнатуры* $(-,-,+)$, $(-,0,+)$, $(-,+,+)$, *т. е. сигнатуры* 3, 5 *и* 6 *таблицы* 1.

$\lhd$ Следуя работе [5], заменим в (4) λ_2 на $-|\lambda_2|$ и получим

$$k_1=\frac{1}{8}(5\lambda_1-3|\lambda_2|)(\lambda_1+|\lambda_2|),\quad k_2=-\frac{1}{8}(3\lambda_1-5|\lambda_2|)(\lambda_1+|\lambda_2|),\quad k_3=-\frac{3}{8}(\lambda_1+|\lambda_2|)^2.$$

Откуда нетрудно заметить, что возможны только три случая различных сигнатур:

1) если $0<\lambda_1<\frac{3}{5}|\lambda_2|$ или $\lambda_1>\frac{5}{3}|\lambda_2|$, то сигнатура $(-,-,+)$;

2) если $\lambda_1=\frac{3}{5}|\lambda_2|$ или $\lambda_1=\frac{5}{3}|\lambda_2|$, то сигнатура $(-,0,+)$;

3) если $\frac{3}{5}|\lambda_2|<\lambda_1<\frac{5}{3}|\lambda_2|$, то сигнатура $(-,+,+)$. $\rhd$

Алгебра h.

Предложение 5. *В качестве сигнатуры оператора одномерной кривизны на алгебре h реализуются только сигнатура $(-,-,+)$, т. е. сигнатура 3 таблицы 1.*

$\lhd$ Главные кривизны оператора одномерной кривизны (3) для рассматриваемой алгебры примут вид

$$k_1 = \frac{5}{8}\lambda_1^2, \quad k_2 = -\frac{3}{8}\lambda_1^2, \quad k_3 = -\frac{3}{8}\lambda_1^2.$$

Так как $\lambda_1 > 0$, то сигнатура $(-,-,+)$ является единственно возможной сигнатурой оператора одномерной кривизны. $\rhd$

Алгебра R^3. Для абелевой алгебры R^3 все структурные константы нулевые $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, поэтому нулевым является и оператор одномерной кривизны. Таким образом, мы получаем следующее очевидное

Предложение 6. *В качестве сигнатуры оператора одномерной кривизны на алгебре R^3 реализуется только сигнатура $(0,0,0)$, т. е. сигнатура 7 таблицы 1.*

Итак, теорема 1 доказана.

2.2. Неунимодулярный случай. Пусть G — трехмерная неунимодулярная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение на $\mathfrak{g}$. Тогда в $\mathfrak{g}$ существует (см. [1]) положительно ориентированный ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 с коммутационными соотношениями $[e_1, e_2] = \alpha e_1 + \beta e_2$, $\quad [e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta e_3$, $\quad [e_2, e_3] = 0$, где $\alpha + \delta = 2$.

Следуя [1] и не ограничивая общности рассуждений, положим $\alpha = 1+\xi$, $\beta = (1+\xi)\eta$, $\gamma = -(1-\xi)\eta$, $\delta = 1-\xi$, где $\xi \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$. Тогда квадратичная форма A диагонализируема в этом базисе, ее главные значения равны [5]:

$$\begin{gathered} k_1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{3}{2}\eta^2\xi^2, \quad k_2 = -\frac{1}{2} - 2\xi - 2\eta^2\xi + \frac{1}{2}\xi^2\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^2, \\ k_3 = -\frac{1}{2} + 2\xi + 2\eta^2\xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2\xi^2. \end{gathered} \tag{5}$$

Таким образом, определение сигнатуры оператора одномерной кривизны трехмерной неунимодулярной алгебры Ли группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой сводится к нахождению всевозможных знаков ее главных значений k_1, k_2, k_3 в первом квадранте.

Доказательство теоремы 2. Так как $k_1 < 0$, а $k_2 \leqslant k_3$ в квадранте $\xi \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$, то достаточно исследовать знак k_2 и k_3 в данном квадранте. Рассмотрим кривые в первом квадранте, при переходе через которые меняют знак функции k_2 и k_3.

$$\xi = 2 + \sqrt{4 + \frac{1}{1+\eta^2}} \quad (k_2 = 0), \quad \xi = -2 + \sqrt{4 + \frac{1}{1+\eta^2}} \quad (k_3 = 0).$$

Нетрудно видеть, что эти функции являются непрерывными и, в силу гиперболической зависимости, монотонно убывающими при $\eta \geqslant 0$. Кроме того, прямая $\xi = 4$ является горизонтальной асимптотой кривой $k_2 = 0$, а прямая $\xi = 0$ является горизонтальной асимптотой кривой $k_3 = 0$. Таким образом, указанные кривые разбивают квадрант $\xi \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$ на области возможных сигнатур $(-,-,-)$, $(-,-,0)$, $(-,-,+)$, $(-,0,+)$, $(-,+,+)$. Для наглядности продемонстрируем это на рисунке 1:

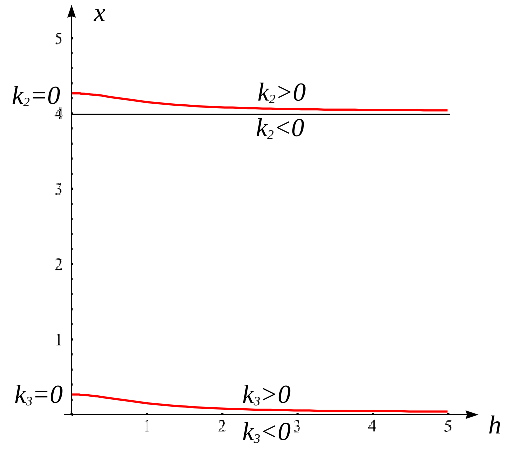

Рис. 1

Теорема 2 доказана. ▷

3. Гармоничность тензора Вейля на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой

В настоящем разделе исследуются четырехмерные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором Вейля и доказываются теоремы 3–6, при этом существенно используются результаты работ [2, 3, 9]. Пусть G — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$.

Фиксируем в $\mathfrak{g}$ базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и положим

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, \quad \nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k, \quad \langle e_i, e_j \rangle = g_{ij}, \tag{6}$$

где $\{c_{ij}^k\}$ — структурные константы алгебры Ли, $\{g_{ij}\}$ — метрический тензор.

Тогда тензор Вейля имеет вид (см. [6])

$$W_{ijkt} = R_{ijkt} + A_{it}g_{jk} + A_{jk}g_{it} - A_{ik}g_{jt} - A_{jt}g_{ik}, \tag{7}$$

дивергенция тензора Вейля определяется как (см. [11])

$$\operatorname{div} W_{jkt} = g^{ip} W_{ijkt,p}, \tag{8}$$

где $W_{ijkt,p} = \Gamma_{pi}^l W_{ljkt} + \Gamma_{pj}^l W_{ilkt} + \Gamma_{pk}^l W_{ijlt} + \Gamma_{pt}^l W_{ijkl}$ — ковариантные производные тензора Вейля в левоинвариантном базисе.

Следует заметить, что ковариантные производные тензора Вейля обладают следующими симметриями $W_{ijkl,p} = -W_{jikl,p}$, $W_{ijkl,p} = -W_{ijlk,p}$, $W_{ijkl,p} = W_{klij,p}$ и дивергенция тензора Вейля кососимметрична относительно второго и третьего индексов, т. е. $\operatorname{div} W_{ijk} = -\operatorname{div} W_{ikj}$. Всюду далее из компонент тензора Вейля и его дивергенции соответствующих групп Ли будем приводить только существенные, поскольку остальные либо выражаются через них, либо равны нулю. Кроме того, в силу инвариантности римановой метрики вопрос о гармоничности тензора Вейля на группах Ли может быть сведен к вопросу о гармоничности соответствующего тензора на алгебре Ли группы Ли.

Поскольку вопрос о гармоничности тензора Вейля на четырехмерных унимодулярных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой (см. теоремы 3 и 4) подробно исследован в [12], осталось изучить лишь случай неунимодулярных групп Ли. Отметим лишь то, что методы, использованные при исследовании унимодулярных групп Ли, аналогичны методам, применяемым далее в доказательстве теорем 5 и 6.

3.1. Разложимые четырехмерные действительные неунимодулярные алгебры Ли. Рассмотрим последовательно каждую неунимодулярную разложимую алгебру Ли из таблицы 5 и тем самым докажем теорему 5.

Алгебра $\mathbb{A}_2 \bigoplus 2\mathbb{A}_1$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 3. С помощью формул (7) определим компоненты тензора Вейля. Учитывая, что в этом базисе $-W_{1212} = 2W_{1313} = 2W_{1414} = 2W_{2323} = 2W_{2424} = -W_{3434}$, существенной будет следующая компонента тензора Вейля:

$$W_{1212} = -(1/3)(A^2 + B^2).$$

Применяя формулы (8), найдем компоненты дивергенции тензора Вейля в указанном базисе. Заметим, что $2 \operatorname{div} W_{123} = -2 \operatorname{div} W_{213} = \operatorname{div} W_{312}$. Поэтому существенная координата дивергенции тензора Вейля равна

$$\operatorname{div} W_{123} = (-1/4)B(B^2 + A^2).$$

Решая систему уравнений $\operatorname{div} W = 0$ относительно структурных констант A, B и принимая во внимание, что $A > 0$, получим единственное действительное решение: $A > 0$, $B = 0$. Таким образом, для четырехмерной действительной разложимой неунимодулярной алгебры Ли $\{\mathbb{A}_2 \bigoplus 2\mathbb{A}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ тензор Вейля является гармоническим в том и только в том случае, если ее нетривиальные структурные константы имеют вид $c^2_{1,2} = A$, где $A > 0$, $B = 0$.

Алгебра $2\mathbb{A}_2$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 3. Тогда $W_{1314} = -W_{2324}$, $W_{1214} = W_{2334}$, $W_{1414} = W_{2323}$, $W_{1313} = W_{2424}$, $W_{1212} = W_{3434}$, $W_{1213} = -W_{2434}$, $W_{1223} = W_{1434}$, $W_{1224} = -W_{1334}$, $W_{1323} = -W_{1424}$. Применяя (7), получаем существенные компоненты тензора Вейля:

$$W_{1212} = (B^2 - 2A^2 + F^2(D^2 - 2AD - 2G^2 + A^2) + D^2 - 2G^2 + AD + C^2)/6,$$

$$W_{1213} = (1/4)(BD - 2AB - FCA + FCD), \quad W_{1214} = (1/2)(AFD - A^2F),$$

$$W_{1223} = (1/2)(F^2GA - F^2GD - DG), \quad W_{1224} = (1/2)(CG - BFG), \quad W_{1234} = (1/2)AFG,$$

$$W_{1313} = (1/6)(F^2G^2 - B^2 - 2C^2 + D^2 + F^2A^2 + F^2D^2 + G^2 - 2F^2AD - 2AD + A^2),$$

$$W_{1314} = -(1/2)BFA + (1/2)BFD - (1/2)CD + (1/4)AC, \quad W_{1323} = -(1/4)(FGC + BG),$$

$$W_{1414} = (1/6)(2F^2A^2 + 4F^2AD - 2F^2D^2 - 2D^2 + C^2 + F^2G^2 + B^2 + G^2 + AD + A^2),$$

и компоненты дивергенции тензора Вейля с учетом (8) в приведенном базисе примут следующий вид:

$$\operatorname{div} W_{112} = -G(BD - ACF + FCD - 2AB)/4,$$

$$\operatorname{div} W_{113} = 3G(B^2 + 2C^2 - BFC)/8,$$

$$\operatorname{div} W_{114} = -G(F^2CD - 3ABF - ACF^2 - 6CD + 7BFD)/8,$$

$$\operatorname{div} W_{123} = \big(2(BA^2 + BG^2 + BC^2 + BF^2A^2 + BF^2D^2 + BF^2G^2 - FCD^2) \\ -CA^2F + 2B^3 - 4BF^2AD + 3CAFD\big)/8,$$

$$\operatorname{div} W_{124} = (A-D)(2D^2F^3 + 2FD^2 - 4AFD - 4DF^3A + 2F^3A^2 \\ + 2A^2F - FC^2 + 2FG^2 - 3CB + 2FB^2 + 2F^3G^2)/8,$$

$$\operatorname{div} W_{134} = (CA^2F^2 - 3BFAD - 2C^3 - 4FG^2B - 2CD^2 \\ -2CAF^2D + F^2CD^2 - 2CB^2 + 4CG^2 + 3BFD^2)/8,$$

$$\operatorname{div} W_{212} = (6B^2A + 2F^2G^2A - 12F^2A^2D + 6F^2AD^2 + BFCD \\ +B^2D - BFCA - 4A^2D + 2C^2A + 4D^2A + 6F^2A^3)/8,$$

$$\operatorname{div} W_{213} = (2BD^2 - 2BA^2 + 2BG^2 + 4BC^2 - 2FG^2C + 4BF^2(A^2 + D^2) \\ + 4BF^2G^2 + 4B^3 - 4BAD - 3CA^2F - 2FCD^2 - 8BF^2AD + 5CAFD)/8,$$

$$\operatorname{div} W_{214} = (4F^3G^2A + 12F^3(AD^2 - A^2D) - 4F^3G^2D + 2FG^2A - 2FA^3 + 4FB^2A \\ + 4F^3A^3 - 4FD(B^2 + A^2 + G^2) + 10AFD^2 + 4CBD + CAB - 4FD^3 - 4F^3D^3)/8,$$

$$\operatorname{div} W_{223} = -G(BFC + B^2 - 4F^2A^2 + 4F^2AD + 4AD)/8,$$

$$\operatorname{div} W_{224} = -AG(5BF - 4C)/8,$$

$$\operatorname{div} W_{234} = -G(F^3G^2 + FG^2 - 2AFD + D^2F - 2DF^3A - CB + F^3A^2 + D^2F^3 + FB^2)/2,$$

$$\operatorname{div} W_{312} = (-2BA^2 + BD^2 + BC^2 - FG^2C + BF^2A^2 + BF^2D^2 \\ +BF^2G^2 - 2BAD + B^3 - CA^2F - 2BF^2AD + CAFD)/4,$$

$$\operatorname{div} W_{313} = (3BFC(D-A) - 6B^2A - 3C^2A - 6C^2D - 3B^2D)/8,$$

$$\operatorname{div} W_{314} = (2BFAD + 2CA^2 - 3FG^2B + 2C^3 - 4CD^2 + 2CG^2 \\ + 2CB^2 - 4CDA + 4BFD^2 - 6BFA^2 - CF^2G^2)/8,$$

$$\operatorname{div} W_{323} = -G(2BD + CAF + 2FCD)/8,$$

$$\operatorname{div} W_{324} = -G(2D^2F^3 + 2D^2F - 4AFD + 2FA^2 - 4DF^3A \\ + 2F^3A^2 + 2FG^2 - 3CB + 2FB^2 + 2F^3G^2 - FC^2)/8,$$

$$\operatorname{div} W_{334} = G(-AF^2C + F^2CD + 2BFA + 7BFD - 6CD - 4CA)/8,$$

$$\operatorname{div} W_{412} = (2F^3G^2A + 6F^3AD^2 + 2F^3A^3 - 4FA^3 + 2FB^2A + 2FA^2D \\ - 2FB^2D - 2F^3D^3 - 2FD^3 - 6F^3A^2D - 2F^3G^2D - FC^2D \\ + FC^2A - 2FG^2D + 4AFD^2 + CBD + 4CAB)/8,$$

$$\operatorname{div} W_{413} = (5BFAD + 2CA^2 + FG^2B - 2CD^2 + 2CAF^2D - CA^2F^2 - F^2CD^2 \\ + 4C^3 - 2CG^2 - 4CDA + BFD^2 - 6BFA^2 - CF^2G^2 + 4CB^2)/8,$$

$$\operatorname{div} W_{414} = (-2F^2G^2A + 12F^2A^2D - 6F^2AD^2 - 4BFCD + 4BFCA \\ + 4A^2D + C^2A + 6C^2D - 4D^2A - 6F^2A^3 + 2B^2D)/8,$$

$$\operatorname{div} W_{423} = G(2F^3A^2 - 4DF^3A + 2D^2F^3 + 2D^2F - 4AFD \\ +FC^2 - CB - 2FA^2 + 2F^3G^2 + 2FB^2 + 2FG^2)/8,$$

$$\operatorname{div} W_{424} = AG(3FC + 4B)/8,$$

$$\operatorname{div} W_{434} = G(-2BFC + B^2 + 2F^2A^2 - 2F^2AD + 3C^2 - 2AD)/4.$$

Решая систему уравнений $\operatorname{div} W = 0$ относительно структурных констант A, B, C, D, F, G, получим следующие действительные решения:

1. $A = A$, $B = 0$, $C = 0$, $D = A$, $F = F$, $G = 0$.

2. $A = A$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, $F = 0$, $G = G$.

3. $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = D$, $F = 0$, $G = G$.

При $A > 0$ и $G > 0$ только второе решение удовлетворяет ограничениям леммы 3, и поэтому для четырехмерной действительной разложимой неунимодулярной алгебры Ли $\{2\mathbb{A}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля является гармоническим в том и только в том случае, если ее нетривиальные структурные константы имеют следующий вид:

$$c_{1,2}^2 = A, \quad c_{3,4}^4 = G, \quad A > 0,\ G > 0.$$

Алгебра $\mathbb{A}_{3,2} \bigoplus \mathbb{A}_1$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 3. Замечаем, что в этом базисе $W_{1214} = W_{2334}$, $W_{1414} = W_{2323}$, $W_{1313} = W_{2424}$, $W_{1212} = W_{3434}$, $W_{1224} = -W_{1334}$, $W_{1323} = -W_{1424}$. Поэтому с учетом (7) существенными будут следующие компоненты тензора Вейля:

$$W_{1212} = (1/6)(C^2 + B^2 + D^2), \quad W_{1214} = (1/4)(CB - AD), \quad W_{1224} = (1/4)AB,$$

$$W_{1313} = (1/6)(C^2 - 2B^2 + D^2), \quad W_{1323} = -(1/2)(AC + DB), \quad W_{1414} = (1/6)(B^2 - 2C^2 - 2D^2).$$

При этом компоненты дивергенции тензора Вейля определяются из (8) следующим образом:

$$\operatorname{div} W_{113} = (3/4)AC^2 + (1/2)CDB - (3/8)AB^2 + (1/4)AD^2,$$

$$\operatorname{div} W_{123} = (1/2)C^3 + (1/2)CD^2 - (1/2)A^2C - (5/8)BAD - (1/8)CB^2,$$

$$\operatorname{div} W_{134} = -(1/8)BC^2 - (1/8)DAC - (1/2)A^2B - (1/4)B^3 - (1/4)BD^2,$$

$$\operatorname{div} W_{213} = (1/4)C^3 + (1/4)CD^2 - (1/2)A^2C - (5/8)BAD,$$

$$\operatorname{div} W_{223} = (1/4)AB^2 - (3/4)AC^2 - (3/8)AD^2 - (3/8)CDB,$$

$$\operatorname{div} W_{234} = -(1/2)A^2D + (1/8)BAC - (1/4)DB^2 - (1/4)DC^2 - (1/4)D^3,$$

$$\operatorname{div} W_{312} = -(1/8)C(-B^2 + 2C^2 + 2D^2),$$

$$\operatorname{div} W_{314} = (1/8)(-BC^2 + 3DAC + 2B^3 + 2BD^2 + 2A^2B),$$

$$\operatorname{div} W_{324} = (1/8)(BAC + 2DB^2 + 2A^2D + 2DC^2 + 2D^3),$$

$$\operatorname{div} W_{413} = (1/2)DAC + (1/2)B^3 + (1/2)BD^2 + (3/4)A^2B,$$

$$\operatorname{div} W_{423} = (1/4)D(3A^2 + 2B^2 + 2C^2 + 2D^2),$$

$$\operatorname{div} W_{434} = (-AB^2 - AD^2 + CDB)/8.$$

Рассмотрим $\operatorname{div} W_{423} = 0$. Из того что $A > 0$ и $C > 0$ следует, что $(3A^2 + 2B^2 + 2C^2 + 2D^2) > 0$, поэтому $\operatorname{div} W_{423} = 0$ тогда и только тогда, когда $D = 0$. Так как $D = 0$, то $\operatorname{div} W_{434} = -(1/8)AB^2$, из чего получаем, что $B = 0$. Далее рассмотрим $\operatorname{div} W_{223} = 0$, исходя из того, что $D = 0$ и $B = 0$, получим, что $\operatorname{div} W_{223} = -(3/4)AC^2$, а в силу ограничений на структурные константы A и C ($A > 0$ и $C > 0$) очевидно, что $\operatorname{div} W_{223}$ не равна нулю, следовательно, система уравнений $\operatorname{div} W = 0$ не имеет решений при заданных в лемме 3 ограничениях на структурные константы. Таким образом, для четырехмерной действительной разложимой неунимодулярной метрической алгебры Ли $\{\mathbb{A}_{3,2} \bigoplus \mathbb{A}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля не является гармоническим.

Алгебра $\mathbb{A}_{3,3} \bigoplus \mathbb{A}_1$. Фиксируем соответствующий ортонормированный базис. Для компонент тензора Вейля в этом базисе имеются следующие соотношения: $\mathrm{W}_{1214} = \mathrm{W}_{2334}$ и $2\mathrm{W}_{1212} = -\mathrm{W}_{2323} = -\mathrm{W}_{1414} = 2\mathrm{W}_{1313} = 2\mathrm{W}_{2424} = 2\mathrm{W}_{3434}$. Поэтому существенными координатами тензора Вейля с учетом (7) являются:

$$W_{1212} = (1/6)B^2, \quad W_{1214} = -(1/4)AB.$$

Для компонент дивергенции в выбранном базисе выполняются следующие тождества: $\operatorname{div} W_{113} = -(2/3)\operatorname{div} W_{223} = -2\operatorname{div} W_{434}$, $\operatorname{div} W_{423} = \operatorname{div} W_{324} - \operatorname{div} W_{234}$. Из (8) следует, что существенные компоненты дивергенции тензора Вейля равны:

$$\operatorname{div} W_{113} = (1/4)B^2A, \quad \operatorname{div} W_{234} = -(1/4)B(2A^2 + B^2), \quad \operatorname{div} W_{324} = (1/4)B(A^2 + B^2).$$

Решая систему уравнений $\operatorname{div} W = 0$ относительно структурных констант A, B и принимая во внимание, что $A > 0$, получим одно действительное решение: $A > 0$, $B = 0$. Таким образом, для четырехмерной действительной разложимой неунимодулярной алгебры Ли $\{\mathbb{A}_{3,3} \bigoplus \mathbb{A}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля является гармоническим в том и только в том случае, если ее нетривиальные структурные константы имеют вид: $c^1_{1,3} = c^2_{2,3} = A$, где $A > 0$, $B = 0$.

Алгебра $\mathbb{A}^{\alpha}_{3,5} \bigoplus \mathbb{A}_1$, $0 < |\alpha| < 1$. Для рассматриваемого семейства алгебр фиксируем ортонормированный базис леммы 3. Поскольку компоненты тензора Вейля в этом базисе удовлетворяют следующим соотношениям: $W_{1214} = W_{2334}$, $W_{1414} = W_{2323}$, $W_{1313} = W_{2424}$, $W_{1212} = W_{3434}$, $W_{1224} = -W_{1334}$, $W_{1323} = -W_{1424}$, то существенными компонентами тензора Вейля согласно (7) являются:

$$W_{1212} = (1/6)(C^2 - 2A^2\alpha + A^2 + B^2 + \alpha^2A^2 + D^2), \quad W_{1214} = (1/4)(CB - AD),$$

$$W_{1224} = (1/4)\alpha AB, \quad W_{1313} = (1/6)(A^2\alpha - 2A^2 - 2B^2 + C^2 + \alpha^2A^2 + D^2),$$

$$W_{1323} = -(1/2)(AC + DB), \quad W_{1414} = (1/6)(B^2 - 2C^2 + A^2\alpha + A^2 - 2\alpha^2A^2 - 2D^2),$$

а компоненты дивергенции тензора Вейля из (8) равны:

$$\operatorname{div} W_{113} = (1/8)(6AC^2 + 2AD^2 - 4A^3\alpha - 3\alpha AB^2 + 4\alpha^2A^3 + 4CDB),$$

$$\operatorname{div} W_{123} = (1/8)(4C^3 - 6CA^2\alpha - 2CA^2 + 4CD^2 - 4\alpha ABD - 4CB^2 - BAD + 4C\alpha^2A^2),$$

$$\operatorname{div} W_{134} = (1/8)(-BC^2 - CAD - 2B\alpha^2A^2 - 2BA^2 - 2B^3 - 2BD^2),$$

$$\operatorname{div} W_{213} = (1/8)(-4CA^2 - 4BAD - 2CA^2\alpha + 2C^3 + 2C\alpha^2A^2 + 2CD^2 - \alpha ABD),$$

$$\operatorname{div} W_{223} = (1/8)(-6AC^2 + 4A^3\alpha - 4\alpha^2A^3 - 3AD^2 - 3CDB + 2\alpha AB^2),$$

$$\operatorname{div} W_{234} = (1/8)(-2DA^2 + \alpha ABC - 2DB^2 - 2DC^2 - 2D\alpha^2A^2 - 2D^3),$$

$$\operatorname{div} W_{312} = (1/8)(-2CA^2 - 3BAD + CB^2 - 2C^3 + 4CA^2\alpha - 2C\alpha^2A^2 - 2CD^2 + 3\alpha ABD),$$

$$\operatorname{div} W_{314} = (1/8)(-BC^2 + 3CAD + 2B^3 + 2BA^2 + 2BD^2),$$

$$\operatorname{div} W_{324} = (1/8)(-\alpha ABC + 2BAC + 2DB^2 + 2DC^2 + 2D\alpha^2A^2 + 2D^3),$$

$$\operatorname{div} W_{413} = (1/4)(2CAD + 2B^3 + 2BA^2 + B\alpha^2A^2 + 2BD^2),$$

$$\operatorname{div} W_{423} = (1/4)(DA^2 + 2DB^2 - \alpha ABC + 2DC^2 + 2D\alpha^2A^2 + 2D^3 + BAC),$$

$$\operatorname{div} W_{434} = (1/8)(-AD^2 + CDB - \alpha AB^2).$$

Решая систему уравнений $\operatorname{div} W = 0$ относительно структурных констант A, B, C, D и параметра α, получим следующие действительные решения:

1. $A = A$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, $\alpha = 0$.

2. $A = A$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, $\alpha = 1$.

Найденные решения не удовлетворяют условиям леммы 3. Следовательно, для четырехмерной действительной разложимой неунимодулярной метрической алгебры Ли $\{\mathbb{A}^{\alpha}_{3,5} \bigoplus \mathbb{A}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля не является гармоническим.

Алгебра $\mathbb{A}^{\alpha}_{3,7} \bigoplus \mathbb{A}_1$, $\alpha > 0$. Для рассматриваемого семейства алгебр фиксируем соответствующий ортонормированный базис. Для компонент тензора Вейля в рассматриваемом базисе имеют место соотношения: $W_{1214} = W_{2334}$, $W_{1414} = W_{2323}$, $W_{1313} = W_{2424}$, $W_{1212} = W_{3434}$, $W_{1224} = -W_{1334}$, $W_{1323} = -W_{1424}$. Тогда существенные компоненты тензора Вейля выражаются согласно (7) следующим образом:

$$W_{1212} = (1/6)L^2(1 - 2A^2 + A^4 + B^2A^2 + C^2A^2)/A^2, \quad W_{1214} = (1/4)(L^2(B - \alpha CA)/A,$$

$$W_{1224} = (1/4)L^2(\alpha B + AC), \quad W_{1313} = -(1/6)L^2(-1 - A^2 + 2A^4 + 2B^2A^2 - C^2A^2)/A^2,$$

$$W_{1323} = -(1/2)L^2(\alpha - A^2\alpha + BAC)/A, \quad W_{1414} = (1/6)L^2(B^2A^2 - 2 + A^2 + A^4 - 2C^2A^2)/A^2.$$

Компоненты дивергенции тензора Вейля в рассматриваемом базисе из (8) равны:

$$\operatorname{div} W_{113} = L^3(6\alpha - 6A^4\alpha + 4BAC + 3BA^3C - 3\alpha B^2A^2 + 2\alpha C^2A^2)/(8A^2),$$

$$\operatorname{div} W_{123} = L^3(4 + 2(2C^2 - 2\alpha^2 - 1)A^2 + 4A^4\alpha^2 - 5A^3\alpha BC - 2B^2A^4 - 2A^6 - B^2A^2)/(8A^3),$$

$$\operatorname{div} W_{134} = L^3(B(A^2 - 1 - 4\alpha^2A^2 - 2A^4) - 2B^3A^2 - \alpha CA(1 + A^2) - 2BC^2A^2)/(8A^2),$$

$$\operatorname{div} W_{213} = L^3(4A^4\alpha^2 - 4\alpha^2A^2 - 5A^3\alpha BC + 2A^4 - 4A^6 - 4B^2A^4 + 2 + C^2A^4 + 2C^2A^2)/(8A^3),$$

$$\operatorname{div} W_{223} = (L^3(2\alpha B^2A^2 - 6\alpha + 6A^4\alpha - 3\alpha C^2A^2 - 3BAC - 4BA^3C))/8A^2,$$

$$\operatorname{div} W_{234} = L^3(\alpha AB - 4C\alpha^2A^2 + BA^3\alpha + CA^2 - CA^4 - 2B^2A^2C - 2C - 2C^3A^2)/(8A^2),$$

$$\operatorname{div} W_{312} = L^3(B^2A^2 + 2(A^2 - 1 - B^2A^4 - C^2A^2 + A^4 - A^6) + C^2A^4)/(8A^3),$$

$$\operatorname{div} W_{314} = L^3(3\alpha CA - B - BA^2 + 2BA^4 + 2B^3A^2 - A^3\alpha C + 2BC^2A^2 + 2B\alpha^2A^2)/(8A^2),$$

$$\operatorname{div} W_{324} = L^3(\alpha AB - 3BA^3\alpha - CA^2 - CA^4 + 2(B^2A^2C + C\alpha^2A^2 + C + C^3A^2))/(8A^2),$$

$$\operatorname{div} W_{413} = L^3(2B^3A - BA + 2BA^3 + 3\alpha^2AB + 2\alpha C + 2BAC^2)/(4A),$$

$$\operatorname{div} W_{423} = L^3(3C\alpha^2A^2 - 2BA^3\alpha + 2B^2A^2C + 2C - CA^2 + 2C^3A^2)/(4A^2),$$

$$\operatorname{div} W_{434} = L^3(-\alpha AB^2 - BA^2C + CB - \alpha C^2A)/(8A).$$

Решая систему уравнений $\operatorname{div} W = 0$ относительно структурных констант A, B, C, L и параметра α, получим следующие действительные решения:

1. $A = A$, $B = B$, $C = C$, $L = 0$, $\alpha = \alpha$.

2. $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $L = L$, $\alpha = \alpha$.

3. $A = -1$, $B = 0$, $C = 0$, $L = L$, $\alpha = \alpha$.

При $L > 0$, $A > 0$, $\alpha > 0$ только второе решение не противоречит условиям леммы 3. Значит, для четырехмерной действительной разложимой неунимодулярной алгебры Ли $\{\mathbb{A}^{\alpha}_{3,7} \bigoplus \mathbb{A}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля является гармоническим в том и только в том случае, если нетривиальные структурные константы имеют вид: $c^1_{1,3} = c^2_{2,3} = \alpha L$, $c^2_{1,3} = -c^1_{2,3} = -L$, где $L > 0$, $\alpha > 0$.

3.2. Неразложимые четырехмерные действительные неунимодулярные алгебры Ли. В данном разделе работы мы последовательно рассмотрим все четырехмерные действительные неразложимые неунимодулярные алгебры Ли из таблицы 6, группы Ли которых наделены левоинвариантной римановой метрикой с нулевой дивергенцией тензора Вейля, и тем самым докажем теорему 6.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,2}^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq -2$. Для рассматриваемого семейства алгебр фиксируем ортонормированный базис леммы 4. Поскольку для компонент тензора Вейля в приведенном базисе имеются связи: $W_{1212} = W_{3434}$, $W_{1213} = -W_{2434}$, $W_{1223} = W_{1434}$, $W_{1313} = W_{2424}$, $W_{1323} = -W_{1424}$, $W_{1414} = W_{2323}$, то с учетом (7) существенными являются следующие компоненты тензора Вейля:

$$\begin{gathered}
W_{1212} = (1/6)(A^2L^2\alpha^2 - 4L^2B^2A - 2L^2B^2\alpha^2 - 2A^2L^2\alpha + 4L^2B^2\alpha \\
+A^2L^2 - 2L^2B^2A^2 + \alpha^2L^2 - \alpha L^2 + 4L^2B^2\alpha A - 2L^2B^2 - 2C^2L^2),
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
W_{1213} = (1/4)(AL^2B\alpha^2 - 4AL^2B\alpha - 2A^2L^2\alpha B + 2AL^2B + 2A^2L^2B - \alpha L^2C + 2CL^2), \\
W_{1223} = (1/4)(3L^2B\alpha - L^2B - AL^2B - AL^2C\alpha + AL^2C - 2L^2B\alpha^2 + 2AL^2B\alpha), \\
W_{1313} = (1/6)(-A^2L^2\alpha^2 + 2L^2B^2A + L^2B^2\alpha^2 + 4A^2L^2\alpha - 2L^2B^2\alpha \\
-2A^2L^2 + L^2B^2A^2 + \alpha^2L^2 - \alpha L^2 - 2L^2B^2\alpha A + L^2B^2 + C^2L^2), \\
W_{1323} = (1/4)(-AL^2\alpha + AL^2 + 2AL^2\alpha^2), \\
W_{1414} = (1/6)(A^2L^2\alpha^2 + 2L^2B^2A + L^2B^2\alpha^2 - 2A^2L^2\alpha - 2L^2B^2\alpha \\
+A^2L^2 + L^2B^2A^2 - 2\alpha^2L^2 + 2\alpha L^2 - 2L^2B^2\alpha A + L^2B^2 + C^2L^2)
\end{gathered}$$

и компоненты дивергенции тензора Вейля согласно (8) равны:

$$\begin{gathered}
\operatorname{div} W_{114} = (1/8)L^3(2\alpha C^2 + 4\alpha B^2 + 4\alpha A^2 - 11\alpha^2B^2 - 11\alpha^2A^2 + 6\alpha^3B^2 \\
+ 6\alpha^3A^2 + A^2B^2 - 12\alpha^2B^2A + 6\alpha B^2A^2 + 10\alpha B^2A + 2AB^2 - BAC\alpha^2 \\
+BA^2C\alpha + B^2 - BA^2C + 8\alpha - BAC + A^2 + 2BAC\alpha - 8\alpha^2), \\
\operatorname{div} W_{124} = (1/8)L^3(-4A^3B^2 + 12A^3\alpha - 8A^2B^2 - 12A^3\alpha^2 + 4A^3\alpha^3 - 12\alpha^2B^2A \\
+ 16\alpha B^2A^2 + 12\alpha B^2A - 4AB^2 + 16\alpha A - 8\alpha^2A - 2A\alpha^3 - 8A^2B^2\alpha^2 + 4A^3B^2\alpha \\
+ 4AB^2\alpha^3 - 4BC - 4A^3 + BC\alpha^2 - 6A + 3BC\alpha - 4BAC - BAC\alpha), \\
\operatorname{div} W_{134} = -(1/8)L^3(6B + 6AB + 4BA^2 + 4B^3 + 12B^3A - 16\alpha B + 8\alpha^2B - 12B^3A^2\alpha \\
-12B^3\alpha + 4A^3B + 12B^3A^2 + 12B^3\alpha^2 - 4B^3\alpha^3 + 3A\alpha^2C + 12B^3\alpha^2A + 4B^3A^3 \\
+ 4BC^2 + 2B\alpha^3 - 3A\alpha C - 24B^3\alpha A - 4A^2B\alpha^3 + 12A^2B\alpha^2 - 12A^2B\alpha \\
+ 4A^3B\alpha^2 - 8A^3\alpha B - 2BA\alpha^2 - 4BC^2\alpha + 4BC^2A - 10BA\alpha), \\
\operatorname{div} W_{214} = (1/8)L^3(-2A^3B^2 + 8\alpha B^2A^2 + 6A^3\alpha - 4A^2B^2 - 6A^3\alpha^2 + 2A^3\alpha^3 + 6\alpha B^2A \\
- 6\alpha^2B^2A - AC^2 - 2AB^2 + 10\alpha A - 2\alpha^2A - 4A\alpha^3 + AC^2\alpha - 4A^2B^2\alpha^2 + 2A^3B^2\alpha \\
+ 2AB^2\alpha^3 - BC - 3BC\alpha - 2A^3 + 4BC\alpha^2 - 4A - BAC - 4BAC\alpha), \\
\operatorname{div} W_{224} = -(1/8)L^3(-\alpha C^2 + 4\alpha B^2 + 4BA^2C\alpha - 2\alpha^2B^2 - 9\alpha^2A^2 + 6\alpha^3A^2 - 4BAC\alpha^2 \\
+ 4\alpha B^2A - 2A^2B^2 - 4AB^2 - 6C^2 - 2B^2 - 4BA^2C + 3A^2 + 4\alpha - 4BAC + 8BAC\alpha - 4\alpha^2), \\
\operatorname{div} W_{234} = (1/8)L^3(-A^2C - 5AB - 6AB\alpha^3 + 4C^3 + 8CB^2A + 2C\alpha^2 - A^2C\alpha^2 \\
- 8CB^2\alpha + 4CB^2A^2 - 8CB^2\alpha A + 4CB^2 - 4C\alpha + 4CB^2\alpha^2 + 2A^2C\alpha \\
+ 6A^2B\alpha^2 - A^2B\alpha + 4BA\alpha - 4C + 7BA\alpha^2 - 5BA^2),
\end{gathered}$$

$$\operatorname{div} W_{314} = -(1/8)L^3(-CA + 4B + 4AB + 2BA^2 + 2A^3B\alpha^2 + 6B^3A - 10\alpha B$$
$$+ 2\alpha^2 B - 6B^3A^2\alpha + 6B^3\alpha^2 A - 6B^3\alpha + 6B^3A^2 + 6B^3\alpha^2 - 2B^3\alpha^3 - 12B^3\alpha A$$
$$+ 2BC^2A + 2A\alpha^2 C + 2A^3B + 2B^3A^3 + 2BC^2 - 6A^2B\alpha - A\alpha C - 2A^2B\alpha^3$$
$$+ 6A^2B\alpha^2 - 4BA\alpha^2 + 2B^3 - 2BC^2\alpha + 4B\alpha^3 - 4A^3\alpha B - 6BA\alpha),$$
$$\operatorname{div} W_{324} = (1/8)L^3(-4CB^2\alpha + 2CB^2A^2 - 5AB - 6AB\alpha^3 - 4CB^2\alpha A + 4CB^2A + 2C\alpha^2$$
$$- 4C\alpha + 2CB^2 + 2CB^2\alpha^2 + 6A^2B\alpha^2 - A^2B\alpha + 4BA\alpha + 2C^3 + 7BA\alpha^2 - 4C - 5BA^2),$$
$$\operatorname{div} W_{334} = (1/8)L^3(-6\alpha B^2A^2 - 6\alpha B^2A - 3\alpha C^2 - 4\alpha A^2 + 9\alpha^2B^2 + 2\alpha^2A^2$$
$$- 6\alpha^3B^2 - 3BAC\alpha^2 + 12\alpha^2B^2A - 6AB^2 - 6C^2 + 3BA^2C\alpha - 3A^2B^2$$
$$- 3B^2 - 3BA^2C - 4\alpha - 3BAC + 2A^2 + 4\alpha^2 + 6BAC\alpha),$$
$$\operatorname{div} W_{412} = -(1/8)L^3(\alpha - 1)(4\alpha B^2A^2 + 2\alpha^2B^2A + 2A^3\alpha^2 - 4A^3\alpha - 4\alpha B^2A - 4\alpha A$$
$$+ 2A + 3BC - 3BC\alpha + 2A^3B^2 + 2\alpha^2A + 2AB^2 + 2A^3 - AC^2 + 3BAC + 4A^2B^2),$$
$$\operatorname{div} W_{413} = (1/8)L^3(CA + 2B + 2AB + 6B^3\alpha^2A + 2BA^2 + 2B^3 + 6B^3A - 6\alpha B$$
$$+ 6\alpha^2B - 4BA\alpha - 6B^3A^2\alpha + 6B^3A^2 + 6B^3\alpha^2 - 2B^3\alpha^3 + A\alpha^2C + 6A^2B\alpha^2$$
$$-2BC^2\alpha - 2B\alpha^3 - 2A\alpha C - 2A^2B\alpha^3 + 2A^3B - 6A^2B\alpha + 2B^3A^3 + 2A^3B\alpha^2$$
$$- 4A^3\alpha B + 2BA\alpha^2 + 2BC^2 - 12B^3\alpha A + 2BC^2A - 6B^3\alpha),$$
$$\operatorname{div} W_{423} = -(1/8)CL^3(-A^2 + 2C^2 + 4AB^2 + 2B^2 + 2\alpha^2B^2$$
$$- 4\alpha B^2 + 2A^2B^2 - 4\alpha B^2A - \alpha^2A^2 + 2\alpha A^2).$$

Решая систему уравнений $\operatorname{div} W = 0$ относительно структурных констант A, B, C, L и параметра α, получим следующие действительные решения:

1. $A = A$, $B = B$, $C = C$, $L = 0$, $\alpha = \alpha$.

2. $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $L = L$, $\alpha = 0$.

3. $A = 0$, $B = B$, $C = 0$, $L = L$, $\alpha = 1$.

4. $A = A$, $B = 0$, $C = 0$, $L = L$, $\alpha = 1$.

Так как данные решения не удовлетворяют ограничениям леммы 4, то для четырехмерной действительной неразложимой неунимодулярной метрической алгебры Ли $\{\mathbb{A}^{\alpha}_{4,2}, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля не является гармоническим.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,3}$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 4. Учитывая, что компоненты тензора Вейля в исследуемом базисе удовлетворяют соотношениям: $W_{1212} = W_{3434}$, $W_{1213} = -W_{2434}$, $W_{1223} = W_{1434}$, $W_{1313} = W_{2424}$, $W_{1323} = -W_{1424}$, $W_{1414} = W_{2323}$, получаем, что существенными компонентами тензора Вейля согласно (7) являются:

$$W_{1212} = (1/6)(A^2L^2 - 2B^2L^2 - 2C^2L^2 + L^2, \quad W_{1213} = (1/4)(2AL^2B - L^2C),$$
$$W_{1223} = (1/4)(-AL^2C - 2L^2B), \quad W_{1313} = (1/6)(B^2L^2 - 2A^2L^2 + C^2L^2 + L^2),$$
$$W_{1323} = (1/2)L^2A, \quad W_{1414} = (1/6)(-2L^2 + A^2L^2 + B^2L^2 + C^2L^2),$$

а компоненты дивергенции тензора Вейля из (8) можно записать в виде:

$$\operatorname{div} W_{114} = (1/8)L^3(6A^2 + 2C^2 - BAC + 6B^2),$$
$$\operatorname{div} W_{124} = (1/8)L^3(4AB^2 + 4A^3 + BC - 2A),$$
$$\operatorname{div} W_{134} = (1/8)L^3(4A^2B - 3AC + 4B^3 + 4BC^2 - 2B),$$
$$\operatorname{div} W_{214} = (1/8)L^3(-4A + AC^2 + 4BC + 2AB^2 + 2A^3),$$
$$\operatorname{div} W_{224} = -(1/8)L^3(6A^2 - C^2 - 4BAC),$$

$$\operatorname{div} W_{234} = -(1/8)L^3(6AB - 2C + A^2C - 4CB^2 - 4C^3),$$
$$\operatorname{div} W_{314} = (1/4)L^3(-2B - AC + A^2B + BC^2 + B^3),$$
$$\operatorname{div} W_{324} = -(1/4)L^3(3AB - C - CB^2 - C^3),$$
$$\operatorname{div} W_{334} = -(3/8)L^3(2B^2 + C^2 + BAC),$$
$$\operatorname{div} W_{412} = -(1/8)L^3(2A - AC^2 - 3BC + 2AB^2 + 2A^3),$$
$$\operatorname{div} W_{413} = -(1/8)L^3(2B - AC + 2A^2B + 2BC^2 + 2B^3),$$
$$\operatorname{div} W_{423} = (1/8)CL^3(A^2 - 2B^2 - 2C^2).$$

Решая систему уравнений $\operatorname{div} W = 0$ относительно структурных констант A, B, C, L, получим следующие действительные решения:

1. $A = A$, $B = B$, $C = C$, $L = 0$.

2. $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $L = L$.

Данные решения не удовлетворяют ограничениям леммы 4. Следовательно, для четырехмерной действительной неразложимой неунимодулярной метрической алгебры Ли $\{\mathbb{A}_{4,3}, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля не является гармоническим.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,4}$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 4. Заметим, что в данном базисе имеют место следующие соотношения: $W_{1212} = W_{3434}$, $W_{1213} = -W_{2434}$, $W_{1223} = W_{1434}$, $W_{1313} = W_{2424}$, $W_{1323} = -W_{1424}$, $W_{1414} = W_{2323}$. Поэтому существенные компоненты тензора Вейля согласно (7) примут вид:

$$W_{1212} = (1/6)A^2L^2 - (1/3)B^2L^2 - (1/3)C^2L^2, \quad W_{1213} = (1/2)AL^2B + (1/4)L^2C,$$
$$W_{1223} = -(1/4)L^2B - (1/4)AL^2C, \quad W_{1313} = (1/6)B^2L^2 - (1/3)A^2L^2 + (1/6)C^2L^2,$$
$$W_{1323} = (1/4)L^2A, \quad W_{1414} = (1/6)A^2L^2 + (1/6)B^2L^2 + (1/6)C^2L^2,$$

а существенными компонентами дивергенции тензора Вейля согласно (8) будут:

$$\operatorname{div} W_{114} = (1/8)L^3(7A^2 + 7B^2 + 2C^2 - BAC),$$
$$\operatorname{div} W_{124} = (1/8)L^3(4AB^2 + 4A^3 - 6A + 5BC),$$
$$\operatorname{div} W_{134} = (1/8)L^3(-3AC + 4A^2B - 6B + 4BC^2 + 4B^3),$$
$$\operatorname{div} W_{214} = (1/8)L^3(-6A + AC^2 + 5BC + 2AB^2 + 2A^3),$$
$$\operatorname{div} W_{224} = (1/8)L^3(2B^2 - 9A^2 + 7C^2 + 4BAC),$$
$$\operatorname{div} W_{234} = -(1/8)L^3(11AB + 6C + A^2C - 4CB^2 - 4C^3),$$
$$\operatorname{div} W_{314} = (1/8)L^3(-3AC - 6B + 2A^2B + 2BC^2 + 2B^3),$$
$$\operatorname{div} W_{324} = (1/8)L^3(2CB^2 - 11AB - 6C + 2C^3),$$
$$\operatorname{div} W_{334} = (1/8)L^3(2A^2 - 9B^2 - 9C^2 - 3BAC),$$
$$\operatorname{div} W_{412} = -(1/8)AL^3(-C^2 + 2B^2 + 2A^2),$$
$$\operatorname{div} W_{413} = -(1/4)BL^3(A^2 + B^2 + C^2),$$
$$\operatorname{div} W_{423} = (1/8)CL^3(A^2 - 2B^2 - 2C^2).$$

Решая систему уравнений $\operatorname{div} W = 0$ относительно структурных констант A, B, C, L, получим следующие действительные решения:

1. $A = A$, $B = B$, $C = C$, $L = 0$.

2. $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $L = L$.

Данные решения не удовлетворяют ограничениям леммы 4. Следовательно, для четырехмерной действительной неразложимой неунимодулярной метрической алгебры Ли $\{\mathbb{A}_{4,4}, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля не является гармоническим.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta}$, $\alpha\beta \neq 0$, $-1 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$, $\alpha+\beta \neq -1$. Для рассматриваемого семейства алгебр фиксируем ортонормированный базис леммы 4. Отметим, что в этом базисе выполняются следующие соотношения: $W_{1212} = W_{3434}$, $W_{1213} = -W_{2434}$, $W_{1223} = W_{1434}$, $W_{1313} = W_{2424}$, $W_{1323} = -W_{1424}$, $W_{1414} = W_{2323}$.

Значит существенными компонентами тензора Вейля, учитывая (7), будут:

$$W_{1212} = (1/6)(-2C^2L^2\beta^2 - 2C^2L^2\alpha^2 - 2A^2L^2\alpha + \alpha L^2\beta + L^2\beta + \alpha^2L^2 - 2L^2\alpha + A^2L^2$$
$$+A^2L^2\alpha^2 + 4C^2L^2\beta\alpha - 2L^2B^2\beta^2 + 4L^2B^2\beta - 2L^2A^2C^2 + L^2 - 2L^2A^2C^2\alpha^2$$
$$-4L^2AC\alpha B\beta + 4L^2A^2C^2\alpha - 4L^2BAC - 2L^2B^2 + 4L^2AC\alpha B + 4L^2ACB\beta - 2\beta^2L^2),$$
$$W_{1213} = (1/4)(2A^2L^2C\alpha^2 + 2AL^2\beta B\alpha + 2AL^2B - 2AL^2B\beta - A^2L^2C\alpha$$
$$-L^2C\alpha + L^2C\beta + 2L^2C\alpha^2 + 2A^2L^2C - 2AL^2B\alpha - 2L^2C\alpha\beta),$$
$$W_{1223} = (1/4)(L^2\alpha B\beta - 2L^2\alpha AC + AL^2C\beta\alpha$$
$$-L^2\alpha B - AL^2C\beta - 2L^2B\beta + 2AL^2C + 2L^2B),$$

$$W_{1313} = (1/6)(C^2L^2\beta^2 + C^2L^2\alpha^2 + \alpha L^2\beta + L^2\alpha - 2L^2\beta - 2C^2L^2\beta\alpha - 2\alpha^2L^2 - 2A^2L^2$$
$$-2A^2L^2\alpha^2 + L^2 + 4A^2L^2\alpha + L^2B^2\beta^2 - 2L^2B^2\beta + L^2A^2C^2 + 2L^2AC\alpha B\beta$$
$$-2L^2A^2C^2\alpha + 2L^2BAC + L^2B^2 + \beta^2L^2 + L^2A^2C^2\alpha^2 - 2L^2AC\alpha B - 2L^2ACB\beta),$$
$$W_{1323} = (1/4)(AL^2\beta - AL^2\beta\alpha + 2AL^2\alpha - 2AL^2),$$
$$W_{1414} = (1/6)(C^2L^2\beta^2 + C^2L^2\alpha^2 - 2\alpha L^2\beta + L^2\beta - 2C^2L^2\beta\alpha + L^2B^2\beta^2 - 2L^2B^2\beta$$
$$+A^2L^2 + L^2\alpha - 2A^2L^2\alpha + 2L^2BAC - 2L^2A^2C^2\alpha + L^2A^2C^2\alpha^2 + L^2B^2 + \alpha^2L^2$$
$$+A^2L^2\alpha^2 + \beta^2L^2 - 2L^2ACB\beta + L^2A^2C^2 - 2L^22L^2AC\alpha B\beta - 2L^2AC\alpha B).$$

Компоненты дивергенции тензора Вейля в выбранном базисе согласно (8) примут вид:

$$\operatorname{div} W_{114} = (1/8)L^3(12BAC + 2C^2\alpha^2 + 6B^2 + 4\alpha^2 + A^2\beta - 4\alpha - 4\beta + 6A^2\alpha^2$$
$$-AC\beta^2B + AC\alpha\beta^2B + \alpha^2ACB\beta - 11ACB\beta - 11AC\alpha B + 10AC\alpha B\beta - \alpha^2ACB + 6A^2$$
$$-2B^2\beta\alpha + B^2\beta^2\alpha + A^2C^2\alpha^2\beta - 2A^2C^2\alpha\beta + A^2C^2\beta - 12B^2\beta + A^2\beta\alpha^2 + 4\beta^2 + 6A^2C^2$$
$$+2C^2\beta^2 + 6B^2\beta^2 - 12A^2\alpha - 12A^2C^2\alpha + 6A^2C^2\alpha^2 - 4C^2\beta\alpha + B^2\alpha - 2A^2\beta\alpha),$$
$$\operatorname{div} W_{124} = (1/8)L^3(-C^2A\alpha - 4C\alpha^2B - 8A^2BC + 12A^3C^2\alpha + C^2\beta A + 2A + CB\beta$$
$$+8A^2C\alpha^2B\beta + 16A^2C\alpha B + 8A^2CB\beta + 4C\alpha^2B\beta + 4A^3C^2\alpha^3 - 4A^3 + 8AB^2\beta + 4AC^2\alpha^3$$
$$-12A^3C^2\alpha^2 + 4A^3\alpha^3 - 3AC^2\alpha^2 + 4AB^2\alpha + 4A\alpha^3 + 12A^3\alpha - 12A^3\alpha^2 - 4A\alpha\beta + 3AC^2\beta\alpha$$
$$-4A^3C^2 - 4AC^2\beta\alpha^2 - 2A\beta^2 + 5C\alpha B\beta - 8AB^2\beta\alpha + 4AB^2\beta^2\alpha - 16A^2C\alpha B\beta - 8A^2C\alpha^2B$$
$$+4A\alpha - 4AB^2\beta^2 - CB\beta^2 - 4AB^2 - C\alpha B - 10A\alpha^2 + 2A\alpha\beta^2 - 4C\alpha\beta^2B + 4A\beta),$$
$$\operatorname{div} W_{134} = (1/8)L^3(2B - 4A^2B + 2AC + 5AC\alpha - 2B\alpha^2 + 4B^3\beta^3 - 12B^3\beta^2 + 12B^3\beta$$
$$+2\beta B\alpha^2 + 4\beta^3B - 11AC\alpha^2 + 3AC\beta + 4A^3C\alpha^3 - 10B\beta^2 + 12A^3C\alpha - 4A^2\alpha^2B + 8A^2\alpha B$$
$$+4AC\alpha^3 - 4B^3 - 12A^3C\alpha^2 + 4B\alpha - 4\beta B\alpha - 4A^3C^3 - 4AC\alpha^2\beta + AC\alpha\beta + 4B\beta$$
$$-24A^2C^2\alpha B\beta - 12A^2C^2\alpha^2B + 24A^2C^2\alpha B - 4A^3C + 4A^2\alpha^2B\beta - 8A^2\alpha B\beta - 6\beta^2AC$$
$$+12A^3C^3\alpha + 8C^2\beta\alpha B + 12B^2\beta^2AC\alpha + 6\beta^2AC\alpha - 4C^3\beta^2A + 4C^2\alpha^2B\beta + 4C^3\beta^2A\alpha$$
$$+12B^2AC\alpha + 4C^3\alpha^3A - 4C^3\alpha^2A - 12B^2\beta^2AC + 12A^2C^2\alpha^2B\beta - 24B^2\beta AC\alpha$$
$$+12A^2C^2B\beta - 8C^3\beta\alpha^2A + 8C^3\beta\alpha A - 8C^2\beta^2\alpha B - 12B^2AC + 24B^2\beta AC + 4\beta BA^2$$
$$+4C^2\beta^3B - 12A^3C^3\alpha^2 + 4A^3C^3\alpha^3 - 12A^2C^2B - 4C^2\alpha^2B - 4C^2\beta^2B),$$

$$\operatorname{div} W_{214} = (1/8)L^3(4A - C\alpha^2 B + 4A^2C\alpha^2B\beta + 6A^3C^2\alpha - 4C^2A\alpha + 4C^2\beta A$$
$$- 4CB\beta^2 + 2A^3 + 4CB\beta + 8A^2C\alpha B - 4A^2BC + 4A^2CB\beta + 2A^3C^2\alpha^3$$
$$+ 4AB^2\beta + 2AC^2\alpha^3 - 6A^3C^2\alpha^2 + C\alpha^2B\beta + 2AC^2\alpha^2 + 2AB^2\alpha + 2A\alpha^3 + 6A^3\alpha$$
$$- 6A^3\alpha^2 - AC^2\beta\alpha - 3AC^2\beta\alpha^2 - 8A^2C\alpha B\beta - C\alpha\beta^2B + 5C\alpha B\beta - 4AB^2\beta\alpha$$
$$+ 2AB^2\beta^2\alpha - 4A^2C\alpha^2B - AC^2\beta^2 - 4A\alpha^2 + 2A\alpha\beta^2 - 2A^3\alpha^3 - 2AB^2\beta^2$$
$$- 2AB^2 - 4C\alpha B - 2A\beta^2 + AC^2\beta^2\alpha - 4A\alpha\beta - 2A^3C^2 - 2A\alpha + 4A\beta),$$

$$\operatorname{div} W_{224} = (1/8)L^3(-4\beta\alpha^2 - 6A^2 - 4\alpha^2 - 3A^2\beta + 4\alpha - 6A^2\alpha^2 + C^2\alpha^2 - 4AC\alpha B\beta$$
$$+ 8\alpha^2ACB\beta - 4AC\alpha\beta^2B + 4AC\beta^2B - 4ACB\beta + 8AC\alpha B - 8\alpha^2ACB - 4A^2C^2\alpha^2\beta$$
$$+ 8A^2C^2\alpha\beta + 6A^2C^2\alpha^3 - 4B^2\beta\alpha + 2B^2\beta^2\alpha + 12A^2\alpha + 6A^2C^2\alpha + 2B^2\alpha - 4A^2C^2\beta$$
$$- 12C^2\alpha^2\beta + 4\beta^2\alpha + 6C^2\alpha^3 + C^2\beta^2 - 12A^2C^2\alpha^2 - 2C^2\beta\alpha + 6\alpha C^2\beta^2 - 3A^2\beta\alpha^2 + 6A^2\beta\alpha),$$

$$\operatorname{div} W_{234} = (1/8)L^3(-4C\alpha^2 - 2C\alpha^3 - 4A\beta^2\alpha B + 8C^2A\alpha^2B\beta + 4C^3A^2\alpha + 4CB^2\alpha - 4CB^2\beta^3$$
$$- 3A^2C\beta - 2A^2\alpha^3C + 10A^2C\alpha + 2AB\beta + A\alpha^2B - 8C^3A^2\alpha^2 + 4A\beta^2B - A\alpha^2B\beta - A\alpha B\beta$$
$$+ 4C^3\alpha^3 + 5A\alpha B + 4C^3A^2\alpha^3 - 12C^3\beta\alpha^2 + 12C^3\beta^2\alpha + 8CB^2\beta^2 - 4CB^2\beta - 4C^3A^2\beta$$
$$+ 6A^2C\alpha\beta - 8CB^2\beta\alpha + 4CB^2\beta^2\alpha - 8C^2A\alpha^2B - 8C^2AB\beta + 8C^3A^2\alpha\beta + 10C\alpha\beta^2$$
$$+ 8C^2A\beta^2B - 3A^2\alpha^2\beta C - 2C\beta + 2C\alpha + 4C\alpha\beta - 6A^2C - 8C^2A\alpha\beta^2B$$
$$+ 8C^2A\alpha B - 4C^3A^2\alpha^2\beta - 2A^2C\alpha^2 - 4\alpha^2C\beta - 4C^3\beta^3 - 6AB - 4C\beta^3),$$

$$\operatorname{div} W_{314} = (1/8)L^3(4B - 2A^2B + 4AC + 2AC\alpha - 2B\alpha^2 + 2B^3\beta^3 - 6B^3\beta^2 - 6A^3C\alpha^2$$
$$+ 6A^3C\alpha + 6B^3\beta + 2\beta^3B + 2\beta B\alpha^2 - 8AC\alpha^2 + 2A^3C\alpha^3 - 2A^2\alpha^2B + 4A^2\alpha B + 2AC\alpha^3$$
$$- 4B\beta^2 + 4B\alpha - 4\beta B\alpha - 2A^3C^3 - 2A^3C - 2B\beta + 12A^2C^2\alpha B - 12A^2C^2\alpha B\beta$$
$$-6A^2C^2\alpha^2B - 2B^3 + 4C^2\beta\alpha B + AC\alpha\beta + 2A^2\alpha^2B\beta - 12B^2\beta AC\alpha + 6A^3C^3\alpha$$
$$- 4A^2\alpha B\beta - AC\alpha^2\beta - 3\beta^2AC + 12B^2\beta AC + 2C^3\alpha^3A - 2C^3\alpha^2A - 2C^3\beta^2A$$
$$+ 6B^2AC\alpha + 2C^2\alpha^2B\beta + 6B^2\beta^2AC\alpha + 6A^2C^2\alpha^2B\beta + 3\beta^2AC\alpha - 6B^2\beta^2AC$$
$$+ 2C^3\beta^2A\alpha - 6B^2AC - 4C^3\beta\alpha^2A + 4C^3\beta\alpha A - 4C^2\beta^2\alpha B + 2\beta BA^2 + 6A^2C^2B\beta$$
$$+ 2C^2\beta^3B - 2C^2\alpha^2B - 2C^2\beta^2B + 2A^3C^3\alpha^3 - 6A^3C^3\alpha^2 - 6A^2C^2B),$$

$$\operatorname{div} W_{324} = (1/8)L^3(-4C\alpha^2 - 4C\alpha^3 + 2C^3\alpha^3 + 4C^2A\alpha^2B\beta + 2C^3A^2\alpha - A^2C\beta - 4C^3A^2\alpha^2$$
$$- 4A^2\alpha^3C + 8A^2C\alpha + 5AB\beta - 2C\beta + 2C\alpha + A\beta^2B + 4A\alpha^2B + 2A\alpha B + 4C\alpha\beta - 6A^2C$$
$$+ 2C^3A^2\alpha^3 - 6C^3\beta\alpha^2 + 6C^3\beta^2\alpha + 2CB^2\alpha - 2CB^2\beta^3 + 4CB^2\beta^2 - 2CB^2\beta - 2C^3A^2\alpha^2\beta$$
$$- 2C^3A^2\beta + 2A^2C\alpha\beta - 4A\alpha^2B\beta - A\alpha B\beta - A\beta^2\alpha B - 4CB^2\beta\alpha + 4C^3A^2\alpha\beta$$
$$+ 4C\alpha\beta^2 + 2CB^2\beta^2\alpha - 4C^2A\alpha^2B + 4C^2A\alpha B - 6AB - 4C^2AB\beta - 4C^2A\alpha\beta^2B$$
$$+ 4C^2A\beta^2B - 2C\beta^3 - A^2\alpha^2\beta C + 2A^2C\alpha^2 - 2C^3\beta^3 + 2\alpha^2C\beta),$$

$$\operatorname{div} W_{334} = -(1/8)L^3(-4\beta\alpha^2 + 12BAC + 6B^2 - 2A^2\beta - 4\beta + 3C^2\alpha^2 + 6AC\alpha B\beta$$
$$+ 9\alpha^2ACB\beta - 3AC\alpha\beta^2B + 3AC\beta^2B - 15ACB\beta - 3AC\alpha B - 9\alpha^2ACB$$
$$-3A^2C^2\alpha^2\beta + 6A^2C^2\alpha\beta + 6A^2C^2 - 6B^2\beta\alpha + 3B^2\beta^2\alpha + 6A^2C^2\alpha^3 + 3C^2\beta^2$$
$$+ 4\beta^2 - 3A^2C^2\beta - 12B^2\beta + 3B^2\alpha + 4\beta^2\alpha + 6C^2\alpha^3 + 6B^2\beta^2 - 6A^2C^2\alpha$$
$$- 6A^2C^2\alpha^2 - 6C^2\beta\alpha - 12C^2\alpha^2\beta - 2A^2\beta\alpha^2 + 4A^2\beta\alpha + 6\alpha C^2\beta^2),$$

$$\operatorname{div} W_{412} = -(1/8)L^3(\alpha - 1)(2A - 4A\alpha + 2A^3C^2 - 4AB^2\beta - 3C^2A\alpha + 3C^2\beta A + 4A^2BC$$
$$+ 2A\alpha^2 - 3CB\beta^2 - 4A^3C^2\alpha + 3CB\beta - 4A^2C\alpha B + 2A^3 + 2A^3C^2\alpha^2 + 2AC^2\alpha^2 - 4A^2CB\beta$$
$$+ 4A^2C\alpha B\beta - 4A^3\alpha + 2A^3\alpha^2 - AC^2\beta\alpha + 3C\alpha B\beta + 2AB^2 + 2AB^2\beta^2 - 3C\alpha B - AC^2\beta^2),$$

$$\operatorname{div} W_{423} = -(1/8)L^3(\alpha-\beta)(2C^3\alpha^2 + 2C^3A^2\alpha^2 + 2A^2C\alpha^2 - 4C^3\alpha\beta + 2C\alpha^2 - 4C\alpha\beta$$
$$- 3A\alpha B - 4C^3A^2\alpha + 3A\alpha B\beta - 4C^2A\alpha B - 4A^2C\alpha + 2C^3A^2 + 2CB^2\beta^2 + 2C^3\beta^2 + 3AB$$
$$+ 2A^2C + 2CB^2 + 2C\beta^2 - 4CB^2\beta - 3AB\beta + 4AC^2\alpha B\beta + 4C^2AB - 4C^2AB\beta),$$
$$\operatorname{div} W_{413} = -(1/8)L^3(2A^3C\alpha^3 - 2A^2B + 3AC\alpha - 2AC + 2B^3\beta^3 - 6B^3\beta^2 - 2B - 2A^3C$$
$$+ 6B\beta + 6B^3\beta + 2\beta^3B - 3AC\alpha^2 + 3AC\beta - 3\beta^2AC - 6A^3C\alpha^2 + 6A^3C\alpha + 12A^2C^2\alpha B$$
$$- 2A^2\alpha^2B + 4A^2\alpha B + 2AC\alpha^3 - 6B\beta^2 - 4A^2\alpha B\beta - 2A^3C^3 - 12A^2C^2\alpha B\beta$$
$$- 6A^2C^2\alpha^2B + 6A^2C^2\alpha^2B\beta - 3AC\alpha^2\beta + 6A^3C^3\alpha + 2C^3\alpha^3A + 2A^2\alpha^2B\beta$$
$$- 2C^3\alpha^2A - 2C^3\beta^2A + 6B^2AC\alpha + 4C^2\beta\alpha B + 2C^2\alpha^2B\beta + 2C^3\beta^2A\alpha - 2B^3$$
$$- 6B^2\beta^2AC + 3\beta^2AC\alpha + 6B^2\beta^2AC\alpha + 12B^2\beta AC + 2\beta BA^2 - 12B^2\beta AC\alpha$$
$$+ 2C^2\beta^3B - 2C^2\alpha^2B - 2C^2\beta^2B - 4C^3\beta\alpha^2A + 4C^3\beta\alpha A - 4C^2\beta^2\alpha B$$
$$+ 6A^2C^2B\beta - 6B^2AC + 2A^3C^3\alpha^3 - 6A^3C^3\alpha^2 - 6A^2C^2B).$$

Решая подсистему из двух уравнений $\mathrm{divW}_{412} = 0$ и $\operatorname{div} W_{423} = 0$ относительно параметров α и β, получим единственное решение $\alpha = 1$ и $\beta = 1$. Подстановка этих значений в систему $\operatorname{div} W = 0$ обращает в нуль каждое ее уравнение. Таким образом единственным решением системы $\operatorname{div} W = 0$ является следующий набор структурных констант:

$$A = A, \quad B = B, \quad C = C, \quad L = L, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1.$$

При $L > 0$ данное решение удовлетворяет ограничениям леммы 4, и поэтому для четырехмерной действительной неразложимой неунимодулярной алгебры Ли $\{\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,\beta}, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля является гармоническим в том и только в том случае, если нетривиальные структурные константы имеют вид $c_{1,4}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = L$, где $L > 0$.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \geqslant 0$. Для рассматриваемого семейства алгебр фиксируем ортонормированный базис леммы 4. Принимая во внимание, что в этом базисе: $\mathrm{W}_{1212} = \mathrm{W}_{3434}$, $W_{1213} = -W_{2434}$, $W_{1223} = W_{1434}$, $W_{1313} = W_{2424}$, $W_{1323} = -W_{1424}$, $W_{1414} = W_{2323}$, получаем, что существенными компонентами тензора Вейля согласно (7) являются:

$$W_{1212} = L^2(A^2C^2 - C^2\beta\alpha - 2B^2C^2 + C^2\alpha^2 - 2C^4 + C^2 + 1)/6C^2,$$
$$W_{1213} = L^2(2BAC - \alpha C^2 + \alpha + 2C^2\beta - 2\beta)/4C,$$
$$W_{1223} = -(1/4)L^2(-B\beta + AC + 2B\alpha),$$
$$W_{1313} = -L^2(-B^2C^2 + C^2\beta\alpha + 2A^2C^2 - C^2\alpha^2 - C^4 - C^2 + 2)/6C^2,$$
$$W_{1323} = L^2(-B - AC\beta + 2AC\alpha)/4C,$$
$$W_{1414} = L^2(A^2C^2 + B^2C2 + 2C^2\beta\alpha - 2C^2\alpha^2 + C^4 - 2C^2 + 1)/6C^2,$$

а компоненты дивергенции тензора Вейля из (8) равны:

$$\operatorname{div} W_{114} = (1/8)L^3(BAC + 2\alpha + A^2C^2\beta - 4\alpha C^2 + B^2C^2\beta - BC^3A$$
$$+6B^2C^2\alpha - 8C^2\alpha^2\beta + 2\alpha C^4 + 6A^2C^2\alpha + 8\alpha C^2\beta^2)/C^2,$$
$$\operatorname{div} W_{124} = (1/8)L^3(-10AC^2\beta\alpha + 4A^3C^2 - 2AC^2 + 4A + 6AC^2\beta^2$$
$$+BC^3\alpha + 3C\alpha B + 4AB^2C^2 + 4BC^3\beta - 2AC^2\alpha^2)/C^2,$$
$$\operatorname{div} W_{134} = (1/8)L^3(4A^2BC - 3C^2A\alpha - A\alpha - 4A\beta + 6CB\beta^2$$
$$-10C\alpha B\beta + 4B^3C + 4BC^3 - 2BC - 2C\alpha^2B)C,$$
$$\operatorname{div} W_{214} = (1/8)L^3(2A + CB\beta - 4AC^2\alpha^2 + 2C\alpha B - 6AC^2\beta\alpha + AC^4$$
$$+4AC^2\beta^2 - AC^2 + 2A^3C^2 + 2AB^2C^2 + BC^3\beta + 4BC^3\alpha)/C^2,$$

$$\operatorname{div} W_{224} = -L^3(-3BAC + 3\alpha + 6\beta + 3A^2C^2\beta - 4C^2\alpha^2\beta - 2\alpha C^2 + 6A^2C^2\alpha - 4BC^3A - 2B^2C^2\beta + 4\alpha C^2\beta^2 - \alpha C^4 - 6C^4\beta)/(8C^2),$$

$$\operatorname{div} W_{234} = -L^3(4C^4\beta^2 + A^2C^4 - 2C^4\alpha^2 + 2C^2\alpha^2 + 4C^4\beta\alpha + 2A^2C^2 + 2C^4 - 4C^2\beta^2 + 5BC^3A\beta + 6BC^3A\alpha - 4C^6 - 4B^2C^4 + 2 - 4C^2\beta\alpha)/(8C^3),$$

$$\operatorname{div} W_{314} = (1/8)L^3(B - BC^2 - 4AC\alpha + 2B^3C^2 + 2BC^4 - AC\beta - AC^3\beta - 2AC^3\alpha - 6C^2\beta\alpha B + 2A^2C^2B - 4C^2\alpha^2B + 4C^2\beta^2B)/C^2,$$

$$\operatorname{div} W_{324} = -L^3(6BC^3A\alpha - 2C^2 - 2C^4\alpha^2 + 2C^2\alpha^2 + 4C^4\beta\alpha - 4C^2\beta\alpha - B^2C^2 + 5BC^3A\beta + 4C^4\beta^2 + 4 + 4A^2C^2 - 4C^2\beta^2 - 2C^6 - 2B^2C^4)/(8C^3),$$

$$\operatorname{div} W_{334} = (1/8)L^3(-4BAC + \alpha + 6\beta + 2A^2C^2\beta + 4C^2\alpha^2\beta + 2\alpha C^2 - 6B^2C^2\alpha - 3BC^3A - 3B^2C^2\beta - 4\alpha C^2\beta^2 - 3\alpha C^4 - 6C^4\beta)/C^2,$$

$$\operatorname{div} W_{412} = -(1/8)L^3(2A - CB\beta + 2AC^2\alpha^2 - AC^4 - 4AC^2\beta\alpha + C\alpha B + 2AC^2\beta^2 - AC^2 + 2A^3C^2 + 2AB^2C^2 + 3BC^3\beta - 3BC^3\alpha)/C^2,$$

$$\operatorname{div} W_{413} = -L^3(-B - BC^2 + 3AC\alpha + 2B^3C^2 + 2BC^4 - 3AC\beta + AC^3\beta - AC^3\alpha - 4C^2\beta\alpha B + 2A^2C^2B + 2C^2\alpha^2B + 2C^2\beta^2B)/(8C^2),$$

$$\operatorname{div} W_{423} = (1/8)L^3(B^2C^2 - 2 + 2C^2 - 2A^2C^2 + 2C^4 - 2C^6 - 2B^2C^4 + A^2C^4)/C^3.$$

Найдем решение системы уравнений $\operatorname{div} W = 0$. Рассмотрим уравнение $\operatorname{div} W_{423} = 0$ и запишем его в виде

$$2C^6 + (2B^2 - A^2 - 2)C^4 + (2A^2 - 2 - B^2)C^2 + 2 = 0.$$

Заметим, что если $C = 1$ данное равенство имеет место лишь при $A = B = 0$. В этом случае система уравнений $\operatorname{div} W = 0$ эквивалентна равенству вида $\alpha\beta(\alpha - \beta) = 0$. Откуда учитывая, что $\alpha \neq 0$, $\beta \geqslant 0$, получаем два решения $\alpha = \beta > 0$ и $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$.

Если $C \neq 1$, то при заданных ограничениях на структурные константы ($C > 0$, $L > 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta \geqslant 0$) уравнение $\operatorname{div} W_{423} = 0$ не имеет решений, удовлетворяющих условиям леммы 4.

Таким образом, для четырехмерной действительной неразложимой неунимодулярной алгебры Ли $\{\mathbb{A}_{4,6}^{\alpha,\beta}, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля является гармоническим в том и только том случае, если ее нетривиальные структурные константы имеют вид: $c_{1,4}^1 = \alpha L$, $c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = -L$, где $\alpha \neq 0$, $L > 0$, или $c_{1,4}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = \beta L$, $c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = -L$, где $\beta > 0$, $L > 0$.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,7}$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 4. Для компонент тензора Вейля в рассматриваемом базисе выполнено: $W_{1212} = W_{3434}$, $W_{1213} = -W_{2434}$, $W_{1214} = W_{2334}$, $W_{1223} = W_{1434}$, $W_{1224} = -W_{1334}$, $W_{1234} = -W_{1324}$, $W_{1313} = W_{2424}$, $W_{1314} = -W_{2324}$, $W_{1323} = -W_{1424}$, $W_{1414} = W_{2323}$. Значит, существенными компонентами тензора Вейля согласно (7) будут:

$$W_{1212} = (1/6)(B^2 + C^2 + 2A^2 - 2D^2 - 2F^2), \quad W_{1213} = CD/2, \quad W_{1214} = -BD/2,$$
$$W_{1223} = -(3AD + CF)/4, \quad W_{1224} = BF/4, \quad W_{1234} = BA/2,$$
$$W_{1313} = (1/6)(B^2 + D^2 + 2A^2 - 2C^2 + F^2), \quad W_{1314} = BC/2,$$
$$W_{1323} = 3AC/4, \quad W_{1414} = (1/6)(-4A^2 + C^2 + D^2 - 2B^2 + F^2),$$

и компоненты дивергенции тензора Вейля согласно (8) примут вид:

$$\operatorname{div} W_{112} = -(9/8)BDA,$$
$$\operatorname{div} W_{113} = (1/8)B(9AC - FD),$$
$$\operatorname{div} W_{114} = (1/2)AB^2 + (13/8)A(C^2 + D^2) - 2A^3 + (1/2)AF^2 - (1/8)DCF,$$
$$\operatorname{div} W_{123} = -(1/2)B(4A^2 - C^2 - D^2 - B^2),$$
$$\operatorname{div} W_{124} = (1/2)CB^2 + 1/2CD^2 - 11/4CA^2 + 1/2C^3 + 3/4FAD,$$
$$\operatorname{div} W_{134} = (1/2)D(B^2 + C^2 + D^2 + F^2) - (3/4)ACF - (11/4)DA^2,$$
$$\operatorname{div} W_{212} = (1/2)BFA,$$
$$\operatorname{div} W_{213} = -(1/8)B(-F^2 + 8A^2 - 2C^2 - 2D^2 - 2B^2),$$
$$\operatorname{div} W_{214} = -3CA^2 + (1/8)CF^2 + (1/4)CB^2 + (9/8)FAD + (1/4)(C^3 + CD^2),$$
$$\operatorname{div} W_{223} = -(1/8)B(13AC - 4FD),$$

$$\operatorname{div} W_{224} = (1/4)AD^2 - (15/8)AC^2 + AF^2 + (1/2)DCF - (1/4)AB^2 + A^3,$$
$$\operatorname{div} W_{234} = -(17/8)ACD - (1/8)(B^2F + C^2)F + (1/2)(FD^2 + F^3 - FA^2),$$
$$\operatorname{div} W_{312} = (1/8)B(F^2 + 8A^2 - 2C^2 - 2D^2 - 2B^2),$$
$$\operatorname{div} W_{313} = -(1/2)BFA,$$
$$\operatorname{div} W_{314} = -(5/8)ACF - 3DA^2 + (1/4)D(B^2 + C^2 + D^2 + F^2),$$
$$\operatorname{div} W_{323} = -(1/8)B(13AD - CF),$$
$$\operatorname{div} W_{324} = -(17/8)AC(D) - (1/8)B^2F - (1/2)FA^2 + (1/4)(FD^2 + F^3),$$
$$\operatorname{div} W_{334} = -(15/8)AD^2 + (1/4)A(C^2 - B^2) - (3/2)AF^2 - (3/8)DCF + A^3,$$
$$\operatorname{div} W_{412} = -(1/4)C(A^2 - (1/2)F^2 + B^2 + D^2 + C^2) + (3/8)FAD,$$
$$\operatorname{div} W_{413} = (1/8)ACF - (1/4)D(A^2 + C^2 + B^2 + D^2 + F^2),$$
$$\operatorname{div} W_{423} = -(1/8)F(-C^2 + 2D^2 + 2F^2),$$
$$\operatorname{div} W_{424} = (1/8)B(4AD - CF),$$
$$\operatorname{div} W_{434} = -(1/8)B(4AC - 3FD).$$

Решая систему уравнений $\operatorname{div} W = 0$ относительно структурных констант A, B, C, D, F, получим следующие действительные решения:

1. $A = A$, $B = -2A$, $C = 0$, $D = 0$, $F = 0$.

2. $A = A$, $B = 2A$, $C = 0$, $D = 0$, $F = 0$.

Данные решения не удовлетворяют ограничениям леммы 4, и поэтому для четырехмерной действительной неразложимой неунимодулярной метрической алгебры Ли $\{\mathbb{A}_{4,7}, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля не является гармоническим.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$, $-1 < \beta \leqslant 1$. Для рассматриваемого семейства алгебр фиксируем ортонормированный базис леммы 4. Тогда $W_{1212} = W_{3434}$, $W_{1213} = -W_{2434}$, $W_{1214} = W_{2334}$, $W_{1223} = W_{1434}$, $W_{1224} = -W_{1334}$, $W_{1313} = W_{2424}$, $W_{1314} = -W_{2324}$, $W_{1323} = -W_{1424}$, $W_{1414} = W_{2323}$. Учитывая (7), получаем, что существенные компоненты тензора Вейля равны:

$$W_{1212} = (1/6)(B^2 + C^2 + 2A^2\beta - 2D^2 - 2F^2 - 2F^2\beta^2 + 4F^2\beta),$$

$$W_{1213} = (1/4)(2CD + AF\beta^2 + AF - 2AF\beta), \quad W_{1214} = -(1/2)BD,$$
$$W_{1223} = -(1/4)(AD + CF - CF\beta) - (1/2)A\beta D,$$
$$W_{1224} = -(1/4)BF(-1+\beta), \quad W_{1234} = (1/2)BA\beta,$$
$$W_{1313} = (1/6)(B^2 + D^2 + 2A^2\beta - 2C^2 + F^2 + F^2\beta^2 - 2F^2\beta),$$
$$W_{1314} = (1/2)BC, \quad W_{1323} = (1/4)CA\beta + (1/2)AC, \quad W_{1324} = -(1/2)BA,$$
$$W_{1414} = -(2/3)A^2\beta + (1/6)(C^2 + D^2 - 2B^2 + F^2 + F^2\beta^2 - 2F^2\beta).$$

Компоненты дивергенции тензора Вейля в данном базисе согласно (8) имеют вид:

$$\operatorname{div} W_{112} = -(1/8)ABD(5+4\beta),$$
$$\operatorname{div} W_{113} = (1/8)B(5CA\beta + 4AC - FD + FD\beta),$$
$$\operatorname{div} W_{114} = (1/8)(6AC^2 - 8A^3\beta + 2B^2A + 7AD^2 + 2AF^2 + 7C^2A\beta - 2AF^2\beta$$
$$+2AF^2\beta^3 - DCF + 6AD^2\beta + DCF\beta - A^3\beta^2 - 2AF^2\beta^2 + 2B^2A\beta),$$
$$\operatorname{div} W_{123} = -(1/2)B(2A^2\beta - C^2 - D^2 - B^2 + A^2 + A^2\beta^2),$$
$$\operatorname{div} W_{124} = (1/8)(-4DAF\beta - DAF\beta^2 - 14CA^2\beta - 4CA^2\beta^2$$
$$+5DAF + 4C^3 + 4B^2C + 4CD^2 - 4A^2C),$$
$$\operatorname{div} W_{134} = (1/8)(4DF^2 - 14DA^2\beta + 4DF^2\beta^2 - 8DF^2\beta - FAC$$
$$-1/2A^2\beta^2D + 4DB^2 + 4D^3 - 4A^2D + 4DC^2 - 4FCA\beta + 5FCA\beta^2),$$
$$\operatorname{div} W_{212} = -(1/8)BAF(\beta+3)(-1+\beta),$$
$$\operatorname{div} W_{213} = -(1/8)B(4A^2 - F^2 - F^2\beta^2 + 2F^2\beta + 4A^2\beta - 2C^2 - 2D^2 - 2B^2),$$
$$\operatorname{div} W_{214} = (1/8)(CF^2\beta^2 - DAF\beta - 4DAF\beta^2 - 2CF^2\beta - 14CA^2\beta$$
$$-6CA^2\beta^2 + 5DAF + 2C^3 + 2B^2C + CF^2 + 2CD^2 - 4A^2C),$$
$$\operatorname{div} W_{223} = (1/8)B(4FD - 9CA\beta - 4AC - 4FD\beta),$$
$$\operatorname{div} W_{224} = (1/8)(2AD^2 - 6AC^2 - 2B^2A + 7AF^2 - 9C^2A\beta$$
$$-13AF^2\beta + AF^2\beta^3 + 5AF^2\beta^2 + 8A^3\beta^2 - 4DCF\beta + 4DCF),$$
$$\operatorname{div} W_{234} = (1/8)(FB^2\beta - 7DAC - 10DCA\beta + FC^2\beta + 12FA^2\beta^2 - 2FA^2\beta - 4FD^2\beta$$
$$-4F^3\beta^3 - 6A^2\beta^3F - 12F^3\beta + 12F^3\beta^2 - 4A^2F - FC^2 + 4FD^2 - FB^2 + 4F^3),$$
$$\operatorname{div} W_{312} = (1/8)B(F^2 + F^2\beta^2 - 2F^2\beta + 4A^2\beta^2 + 4A^2\beta - 2C^2 - 2D^2 - 2B^2),$$
$$\operatorname{div} W_{313} = (1/8)BAF(\beta+3)(-1+\beta),$$
$$\operatorname{div} W_{314} = (1/8)(3FCA\beta^2 - 2FAC - 14DA^2\beta - 6A^2D - 4A^2\beta^2D$$
$$-FCA\beta + 2DB^2 + 2DC^2 + 2D^3 + 2DF^2 + 2DF^2\beta^2 - 4DF^2\beta),$$
$$\operatorname{div} W_{323} = -(1/8)B(4A\beta D + 9AD - CF + CF\beta),$$
$$\operatorname{div} W_{324} = (1/8)(-7DCA\beta + FB^2\beta - 10DAC + 6FA^2\beta^2 + 4FA^2\beta - 2FD^2\beta$$
$$-4A^2\beta^3F - 2F^3\beta^3 - 6F^3\beta + 6F^3\beta^2 - 6A^2F + 2FD^2 - FB^2 + 2F^3),$$
$$\operatorname{div} W_{334} = (1/8)(8A^3\beta - 9AD^2 - 9AF^2 + 2C^2A\beta + 15AF^2\beta$$
$$-3AF^2\beta^3 - 3AF^2\beta^2 + 3DCF\beta - 6AD^2\beta - 3DCF - 2B^2A\beta),$$
$$\operatorname{div} W_{412} = (1/8)(3DAF\beta - 3DAF\beta^2 - 2CF^2\beta$$
$$+CF^2\beta^2 - 2CA^2\beta^2 - 2C^3 - 2B^2C + CF^2 - 2CD^2),$$

$$\operatorname{div} W_{413} = (1/8)(-FAC - 2FCA\beta^2 - 2A^2D + 3FCA\beta$$
$$-2DC^2 - 2DB^2 - 2D^3 - 2DF^2 - 2DF^2\beta^2 + 4DF^2\beta),$$
$$\operatorname{div} W_{424} = (1/8)B(4AD - CF + CF\beta),$$
$$\operatorname{div} W_{434} = -(1/8)B(4CA\beta - 3FD + 3FD\beta),$$
$$\operatorname{div} W_{423} = (1/8)(-1+\beta)(2FA^2\beta^2 + 2F^3\beta^2 - 4FA^2\beta$$
$$-4F^3\beta + 2FD^2 - FC^2 + 2A^2F + 2F^3 + 3DAC).$$

Решая систему уравнений $\operatorname{div} W = 0$ относительно структурных констант A, B, C, D, F и параметра β, получим следующие действительные решения:

1. $A = A$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, $F = 0$, $\beta = 0$.

2. $A = A$, $B = -2A$, $C = 0$, $D = 0$, $F = F$, $\beta = 1$.

3. $A = A$, $B = 2A$, $C = 0$, $D = 0$, $F = F$, $\beta = 1$.

4. $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, $F = F$, $\beta = 1$.

5. $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, $F = 0$, $\beta = \beta$.

Поскольку при $A > 0$ только третье решение удовлетворяет ограничениям леммы 4, то для четырехмерной действительной неразложимой неунимодулярной алгебры Ли $\{\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля является гармоническим в том и только в том случае, если ее нетривиальные структурные константы имеют вид $c_{1,4}^1 = c_{2,3}^1 = B$, $c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = A$, при $B = 2A > 0$, $\beta = 1$.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,11}^{\alpha}$, $\alpha > 0$. Для рассматриваемого семейства алгебр фиксируем ортонормированный базис леммы 4. Для компонент тензора Вейля в указанном базисе имеют место соотношения: $W_{1212} = W_{3434}$, $W_{1213} = -W_{2434}$, $W_{1214} = W_{2334}$, $W_{1223} = W_{1434}$, $W_{1224} = -W_{1334}$, $W_{1234} = -W_{1324}$, $W_{1313} = W_{2424}$, $W_{1314} = -W_{2324}$, $W_{1323} = -W_{1424}$, $W_{1414} = W_{2323}$.

Поэтому существенными компонентами тензора Вейля согласно (7) будут:

$$W_{1212} = (B^2D^2 + C^2D^2 + 2A^2\alpha^2D^2 - 2F^2D^2 - 2A^2 + A^2D^2 + A^2D^4)/(6D^2),$$
$$W_{1213} = (1/2)CF, \quad W_{1214} = -(1/2)BF, \quad W_{1223} = -(1/4)A(3\alpha FD + C)/D,$$
$$W_{1224} = -AB(D^2-1)/(4D), \quad W_{1234} = (1/2)BA\alpha,$$
$$W_{1313} = (B^2D^2 + F^2D^2 + 2A^2\alpha^2D^2 - 2C^2D^2 + A^2 + A^2D^2 - 2A^2D^4)/(6D^2),$$
$$W_{1314} = (1/2)BC, \quad W_{1323} = (1/4)A(-FD + 3\alpha C),$$
$$W_{1414} = (C^2D^2 + F^2D^2 - 2B^2D^2 + A^2 - 2A^2D^2 + A^2D^4 - 4A^2\alpha^2D^2)/(6D^2).$$

Компоненты дивергенции тензора Вейля с учетом (8) в рассматриваемом базисе примут вид:

$$\operatorname{div} W_{112} = -(1/8)AB(9\alpha F + CD),$$
$$\operatorname{div} W_{113} = (1/8)AB(9\alpha CD - F)/D,$$
$$\operatorname{div} W_{114} = A(4B^2\alpha D^2 + CD^3F + 13C^2D^2\alpha - 16A^2\alpha^3D^2$$
$$+13\alpha F^2D^2 + 4A^2\alpha - 8A^2\alpha D^2 - CFD + 4\alpha A^2D^4)/(8D^2),$$
$$\operatorname{div} W_{123} = (1/2)B(C^2 + F^2 + B^2 - 4A^2\alpha^2),$$
$$\operatorname{div} W_{124} = (1/4)(2B^2CD + 2CF^2D - 11A^2\alpha^2DC + 2C^3D$$
$$-CA^2D + 2CA^2D^3 + 3A^2\alpha D^2F + 3A^2\alpha F)/D,$$

$$\operatorname{div} W_{134} = (1/4)(D^2(2FB^2 + 2C^2F - 11FA^2\alpha^2 - FA^2)$$
$$-3A^2D\alpha C + 2F^3D^2 + 2FA^2 - 3A^2D^3\alpha C)/D^2,$$
$$\operatorname{div} W_{212} = -(1/2)BA^2\alpha(D^2 - 1)/D,$$
$$\operatorname{div} W_{213} = (1/8)B(A^2(1 - D^4 - 8\alpha^2D^2) + 2D^2(C^2 + F^2 + B^2))/D^2,$$
$$\operatorname{div} W_{214} = (5A^2\alpha D^3F + CA^2 + (2C^3 + 2CF^2 - CA^2$$
$$+2B^2C - 24A^2\alpha^2C)D^2 + 9A^2\alpha FD + 2CA^2D^4)/(8D^2),$$
$$\operatorname{div} W_{223} = -(1/8)AB(13\alpha CD + FD^2 - 4F)/D,$$
$$\operatorname{div} W_{224} = -A(-2\alpha F^2D^2 + 15C^2D^2\alpha - 8A^2\alpha + 12\alpha A^2D^4$$
$$-3CD^3F - 4CFD + 2B^2\alpha D^2 - 8A^2\alpha^3D^2 - 4A^2\alpha D^2)/(8D^2),$$
$$\operatorname{div} W_{234} = A(-17D^3F\alpha C - B^2D^2 + B^2D^4 - C^2D^2 - 4A^2\alpha^2D^2$$
$$-2A^2D^2 + 4A^2 + 4F^2D^2 + 4A^2\alpha^2D^4 - 2C^2D^4 - 2A^2D^6)/(8D^3),$$
$$\operatorname{div} W_{312} = B(A^2 - A^2D^4 + 8A^2\alpha^2D^2 - 2C^2D^2 - 2F^2D^2 - 2B^2D^2)/(8D^2),$$
$$\operatorname{div} W_{313} = (1/2)B(A^2(D^2 - 1)\alpha)/D,$$
$$\operatorname{div} W_{314} = (-24FA^2\alpha^2D^2 - 5A^2D\alpha C - FA^2D^2 + FA^2D^4$$
$$+2FB^2D^2 - 9A^2D^3\alpha C + 2C^2FD^2 + 2F^3D^2 + 2FA^2)/(8D^2),$$
$$\operatorname{div} W_{323} = -(1/8)AB(13\alpha FD - C + 4CD^2)/D,$$
$$\operatorname{div} W_{324} = A(-17D^3F\alpha C - B^2D^2 + B^2D^4 + D^4F^2 - 4A^2\alpha^2D^2$$
$$+2A^2D^4 - 4C^2D^4 - 4A^2D^6 + 4A^2\alpha^2D^4 + 2A^2 + 2F^2D^2)/(8D^3),$$
$$\operatorname{div} W_{334} = -A(15\alpha F^2D^2 - 2C^2D^2\alpha + 12A^2\alpha - 8\alpha A^2D^4$$
$$+3CFD + 2B^2\alpha D^2 - 8A^2\alpha^3D^2 - 4A^2\alpha D^2 + 4CD^3F)/(8D^2),$$
$$\operatorname{div} W_{412} = -(A^2\alpha D^3F + 2A^2\alpha^2D^2C - CA^2$$
$$+(2B^2C + 2CF^2 + 2C^3 - CA^2)D^2 + 2CA^2D^4 - 3A^2\alpha FD)/(8D^2),$$
$$\operatorname{div} W_{413} = -(2FA^2\alpha^2D^2 - A^2D\alpha C - FA^2D^2 - FA^2D^4$$
$$+2C^2FD^2 + 3A^2D^3\alpha C + 2FB^2D^2 + 2F^3D^2 + 2FA^2)/(8D^2),$$
$$\operatorname{div} W_{423} = A(C^2 + D^2F^2 + 2A^2 + 2A^2D^2 - 2C^2D^2 - 2A^2D^3 - 2F^2 - 2A^2)/(8D^3),$$
$$\operatorname{div} W_{424} = (1/8)AB(4\alpha FD - C + 3CD^2)/D,$$
$$\operatorname{div} W_{434} = -(1/8)AB(4\alpha CD + FD^2 - 3F)/D.$$

Из уравнения $\operatorname{div} W_{313} = 0$ и ограничений на структурные константы $A > 0$, $B > 0$, $D > 0$, $\alpha > 0$ получаем, что D может быть равно только 1. Решаем систему уравнений $\operatorname{div} W = 0$ (добавив к нему уравнение $D = 1$) относительно структурных констант A, B, C, D, F и параметра α. В результате получаем следующие действительные решения:

1. $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1$, $F = 0$, $\alpha = \alpha$.

2. $A = A$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1$, $F = 0$, $\alpha = 0$.

3. $A = A$, $B = -2A\alpha$, $C = 0$, $D = 1$, $F = 0$, $\alpha = \alpha$.

4. $A = A$, $B = 2A\alpha$, $C = 0$, $D = 1$, $F = 0$, $\alpha = \alpha$.

При $A > 0$ и $\alpha > 0$ четвертое решение удовлетворяет ограничениям леммы 4. Следовательно, для четырехмерной действительной неразложимой неунимодулярной алгебры Ли $\{\mathbb{A}^{\alpha}_{4,11}, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля является гармоническим в том и только том случае, если ее нетривиальные структурные константы имеют вид: $c^1_{1,4} = 2A\alpha$, $c^1_{2,3} = B$, $c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = A\alpha$, $c^3_{2,4} = -AD$, $c^2_{3,4} = A/D$, при $A > 0$, $B = 2A\alpha$, $D = 1$, $\alpha > 0$.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,12}$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 4. В виду того, что в выбранном базисе: $W_{1212} = W_{3434}$, $W_{1213} = -W_{2434}$, $W_{1214} = W_{2334}$, $W_{1223} = W_{1434}$, $W_{1224} = -W_{1334}$, $W_{1313} = W_{2424}$, $W_{1323} = -W_{1424}$, $W_{1414} = W_{2323}$ заключаем из (7), что существенными компонентами тензора Вейля являются:

$$W_{1212} = (1/6)(2DC + D^2 + C^2 - 2F^2 - 2G^2),$$

$$W_{1213} = (1/2)FD + (1/4)(FC + BG), \quad W_{1214} = (-1/4)AG,$$
$$W_{1223} = -(1/4)(BF + GD) - (1/2)GC, \quad W_{1224} = (1/4)AF,$$
$$W_{1313} = (1/6)(F^2 - 2D^2 + C^2 + G^2 - DC), \quad W_{1323} = (1/2)(BC + BD),$$
$$W_{1414} = (1/6)(D^2 + F^2 + G^2 - DC - 2C^2).$$

При этом компоненты дивергенции тензора Вейля согласно (8) примут вид:

$$\operatorname{div} W_{112} = (1/8)AF(3C + 5D),$$
$$\operatorname{div} W_{113} = (1/8)A(-2C^2 + 2D^2 + 7F^2 + 2G^2,$$
$$\operatorname{div} W_{114} = (1/4)(BG^2 + 3BD^2 - 3BC^2) - (1/8)(FGD - 7BF^2 - 4FGC),$$
$$\operatorname{div} W_{123} = (5/8)AGF,$$
$$\operatorname{div} W_{124} = (4F^2D + F^2C + 4D^3 + 2D^2C$$
$$-4(A^2D + A^2C + B^2C + B^2D) + 5FBG + 2C^3 + 2G^2C)/8,$$
$$\operatorname{div} W_{134} = (FCD - BGD - 7BGC - FC^2 + 4(FD^2 - A^2F - B^2F + F^3 + FG^2))/8,$$
$$\operatorname{div} W_{212} = -(1/8)AG(5C + 3D),$$
$$\operatorname{div} W_{213} = (5/8)AGF,$$
$$\operatorname{div} W_{214} = (1/2)(G^2C - A^2D - A^2C - B^2C - B^2D + C^3)$$
$$+(1/8)(G^2D + 5FBG) + (1/4)(D^3 + F^2D + DC^2),$$
$$\operatorname{div} W_{223} = (1/8)A(2C^2 - 2D^2 + 2F^2 + 7G^2),$$
$$\operatorname{div} W_{224} = (1/4)(BF^2 - 3BD^2 + 3BC^2) + (1/8)(7BG^2 + 4FGD - FGC),$$
$$\operatorname{div} W_{234} = (1/8)(4(G^3 - A^2G + GC^2 + GF^2 - B^2G) - 7BFD - BFC - GD^2 + GCD),$$
$$\operatorname{div} W_{313} = -(1/2)A(2BF + GC),$$
$$\operatorname{div} W_{314} = (1/4)(F^3 + FG^2 - 5BGC - BGD - 3B^2F + A^2F + FD^2),$$
$$\operatorname{div} W_{323} = -(1/2)A(2BG + FD),$$
$$\operatorname{div} W_{324} = (2GC^2 + 2G^3 - 10BFD - 6B^2G - 2BFC + 2A^2G + 2GF^2)/8,$$
$$\operatorname{div} W_{334} = -(3/8)(3BF^2 + 3BG^2 + FGC + FGD),$$
$$\operatorname{div} W_{412} = (2DC^2 - 2D^3 + 2C^3 - F^2C - 2F^2D + 2G^2C + G^2D - 2D^2C)/8,$$
$$\operatorname{div} W_{413} = (1/8)(FC^2 - 3BGC - BGD - 2B^2F - FCD + 6A^2F - 2FD^2 - 2F^3 - 2FG^2),$$
$$\operatorname{div} W_{414} = (1/8)A(8BF + 3GD + 9GC),$$
$$\operatorname{div} W_{423} = (1/8)(6A^2G - GCD - 2GC^2 + GD^2 - 3BFD - BFC - 2B^2G - 2GF^2 - 2G^3),$$
$$\operatorname{div} W_{424} = (1/8)(8BG + 3FC + 9FD),$$
$$\operatorname{div} W_{434} = (9/8)A(F^2 + G^2).$$

Из уравнения $\operatorname{div} W_{213} = 0$ данной системы и ограничений на структурные константы ($A > 0$, $C < 0$, $D > 0$), получаем что $F = 0$ или $G = 0$. Если $F = 0$, то из равенства $\operatorname{div} W_{313} = 0$ и $C < 0$ находим, что $G = 0$. Если $G = 0$, то из $\operatorname{div} W_{323} = 0$ и $D > 0$ заключаем, что $F = 0$. Это означает, что система уравнений $\operatorname{div} W = 0$ имеет решение только если F и G равны нулю одновременно. Решая приведенную выше систему уравнений $\operatorname{div} W = 0$ (добавив условия $F = 0$ и $G = 0$) относительно структурных констант A, B, C, D, F, G, получим следующие действительные решения:

1. $A = D$, $B = 0$, $C = D$, $D = D$, $F = G = 0$.
2. $A = -D$, $B = 0$, $C = D$, $D = D$, $F = G = 0$.
3. $A = A$, $B = B$, $C = -D$, $D = D$, $F = G = 0$.
4. $A = \sqrt{D^2 - B^2}$, $C = D$, $B, D \in \mathbb{R}$, $F = G = 0$.
5. $A = -\sqrt{D^2 - B^2}$, $C = D$, $B, D \in \mathbb{R}$, $F = G = 0$.

Так как при $A > 0$ и $D > 0$ только третье решение удовлетворяет ограничениям леммы 4, то для четырехмерной действительной неразложимой неунимодулярной алгебры Ли $\{\mathbb{A}_{4,12}, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ тензор Вейля является гармоническим в том и только в том случае, если нетривиальные структурные константы имеют вид: $c^1_{1,3} = c^2_{2,3} = A$, $c^1_{1,4} = c^2_{2,4} = B$, $c^2_{1,4} = -c^1_{2,4} = -D$, где $A > 0$, $D > 0$.

Теорема 6 доказана. $\rhd$

Замечание 1. Отметим, что конформно-плоские левоинвариантные римановы метрики существуют только на четырехмерных разложимых унимодулярных группах Ли, и список соответствующих алгебр Ли исчерпывается алгебрами $\mathbb{A}_{3,6} \oplus \mathbb{A}_1$ при $c^1_{2,3} = C$, $c^2_{1,3} = -C$, $C > 0$, $\mathbb{A}_{3,9} \oplus \mathbb{A}_1$ при $c^3_{1,2} = A$, $c^4_{1,2} = -AM$, $c^1_{2,3} = -c^2_{1,3} = AM^2 + A$, $A > 0$ и коммутативной алгеброй $4\mathbb{A}_1$.

Замечание 2. Среди четырехмерных действительных неунимодулярных алгебр Ли конформно плоскими являются лишь алгебры $\mathbb{A}_{3,3} \bigoplus \mathbb{A}_1$ при $A > 0$, $B = 0$; $\mathbb{A}^{\alpha}_{3,7} \bigoplus \mathbb{A}_1$ при $A = 1$, $B = C = 0$, $L > 0$, $\alpha > 0$; $\mathbb{A}^{\alpha,\beta}_{4,5}$ при $A, B, C \in \mathbb{R}$, $L > 0$, $\alpha = \beta = 1$; $\mathbb{A}^{\alpha,\beta}_{4,6}$ при $A = B = 0$, $C = 1$, $L > 0$, $\alpha = \beta > 0$, а так же $\mathbb{A}_{4,12}$ при $A > 0$, $C = -D$, $D > 0$, $F = G = 0$.

Замечание 3. Исследование по изометричности изученных классов метрик с гармоническим тензором Вейля можно провести с помощью геометрических инвариантов, таких как δ-защемленность кривизны, спектр и сигнатура оператора Риччи, квадрат длины тензора Вейля (см. [12]).

Замечание 4. Решение систем алгебраических уравнений настоящей работы проводилось с использованием пакетов аналитических расчетов Maple и Mathematica, что позволило оптимизировать вычислительную часть исследования.

Литература

1. *Milnor J.* Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics.—1976.—Vol. 21.—P. 293–329.
2. *Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г.* Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. труды.—2008.—Т. 11, № 2.—С. 115–147.
3. *Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г.* Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды.—2009.—Т. 12, № 1.—С. 40–116.
4. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна—М.: Мир, 1990.—704 с.
5. *Rodionov E. D., Slavskii V. V.* Curvature estimations of left invariant Riemannian metrics on three dimensional Lie groups // Differential Geometry and Application. Proceeding of the 7^{th} International Conference (Brno, August 10–14, 1998).—1999.—P. 111–126.

6. *Гладунова О. П., Родионов Е. Д., Славский В. В.* О гармонических тензорах на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // Докл. РАН.—2008.—Т. 419, № 6.—С. 735–738.
7. *Гладунова О. П., Славский В. В.* Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных унимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля // Докл. РАН.—2010.—Т. 431, № 6.—С. 736–738.
8. *Воронов Д. С., Родионов Е. Д.* Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных неунимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля // Докл. РАН.—2010.—Т. 432, № 3.—С. 301–303.
9. *Мубаракзянов Г. М.* О разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов. Сер. мат.—1963.—Т. 32, № 1.—С. 144–123.
10. *Listing M.* Conformal Einstein spaces in N-dimensions // Ann. Global Anal. Geom.—2001.—Vol. 20.—P. 183–197.
11. *Yano K.* Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces.—New York: Pergamon press, 1965.—323 p.
12. *Гладунова О. П., Славский В. В.* О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных унимодулярных группах Ли // Мат. труды.—2011.—Т. 14, № 1.—С. 1–20.

Статья поступила 26 октября 2010 г.

Воронов Дмитрий Сергеевич
Алтайская государственная педагогическая академия,
аспирант каф. геометрии и мат. методов в экономике
РОССИЯ, 656031, Барнаул, ул. Молодежная, 55
E-mail: VoronovDmSerg@yandex.ru

Гладунова Олеся Павловна
Алтайский государственный университет,
доцент каф. мат. анализа
РОССИЯ, 656049, Барнаул, пр. Ленина, 61
E-mail: gladunova_olesya@mail.ru

Родионов Евгений Дмитриевич
Алтайская государственная педагогическая академия,
профессор каф. геометрии и мат. методов в экономике
РОССИЯ, 656031, Барнаул, ул. Молодежная, 55
E-mail: edr2002@mail.ru

Славский Виктор Владимирович
Алтайская государственная педагогическая академия,
профессор каф. геометрии и мат. методов в экономике
РОССИЯ, 656031, Барнаул, ул. Молодежная, 55
E-mail: slavsky@uriit.ru, slavsky2004@mail.ru

ABOUT INVARIANT TENSOR FIELDS ON LOW DIMENSIONAL LIE GROUPS

Voronov D. S., Gladunova O. P., Rodionov E. D., Slavskii V. V.

Complete classification of possible signatures of the one dimensional curvature operator on three dimensional Lie groups with left-invariant Riemannian metric and complete classification of four-dimensional Lie algebras (up to isomorphism) of Lie groups with left-invariant Riemannian metrics and harmonic Weyl tensor are given in this paper.

Key words: Lie algebras, Lie groups, left-invariant Riemannian metrics, one dimensional curvature, harmonic Weyl tensor.