

УДК 519.46

ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ ДИССИПАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ  
СВОЙСТВ ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ<sup>1</sup>

И. В. Богачев, А. О. Ватульян

Представлена общая постановка обратной задачи идентификации неоднородных характеристик вязкоупругого тела, сформулировано вариационное уравнение. Рассмотрена задача о восстановлении функций-коэффициентов диссипативных операторов, возникающих при решении ряда задач об идентификации свойств слоистых неоднородных вязкоупругих структур на основе анализа спектральных характеристик. Представлены способы построения итерационного процесса, приведены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению функций различных типов.

**Ключевые слова:** обратные задачи, диссипативные операторы, вязкоупругость, идентификация, итерационный процесс.

Введение

Исследование характеристик материалов со сложными неоднородными свойствами [1], таких как полимеркомпозиты, функционально-градиентные материалы, геологические породы, биологические ткани, в настоящее время является одним из важнейших направлений механики сплошной среды. Вследствие сложности прямых экспериментальных оценок механических свойств таких материалов со сложной реологией важна разработка иных методов идентификации неоднородных характеристик, основанных на различных моделях вязкоупругости. Кроме того, в связи со спецификой самих материалов (например, биологических тканей) интерес представляют неинвазивные методы [2]. Одним из способов воздействия является акустическое зондирование, при специальной обработке результатов которого для упругих тел [3, 4] удается восстанавливать неизвестные функции по информации об амплитудно-частотных характеристиках, измеренных в некоторых точках исследуемого объекта [5]. Отметим, что исследование установившихся колебаний тел в рамках линейной вязкоупругости для модели стандартного вязкоупругого тела приводит к краевым задачам с переменными характеристиками для диссипативных операторов. Соответственно, решение обратных задач об определении функций координат, характеризующих неоднородность, приводит к некоторым обобщениям методов, использовавшихся ранее для положительных операторов.

В случаях исследования более сложных моделей, учитывающих неоднородную структуру материалов, ситуация значительно усложняется и требуется более глубокий анализ

---

© 2012 Богачев И. В., Ватульян А. О.

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 10-01-00194-а, и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № П596.

проблемы, основанный на исследовании решений общих краевых задач с переменными коэффициентами и изучение зависимости следов решений от коэффициентов [6].

На начальных этапах исследования таких задач в зарубежной литературе была широко распространена постановка, в которой известны физические поля внутри исследуемого объекта [7, 8]. Обратная задача об определении характеристик материалов в таком случае оказывается линейной и сводится к решению системы дифференциальных уравнений первого порядка или к интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Проведено исследование и построение численных решений с использованием различных регуляризованных подходов (метод А. Н. Тихонова [10, 11], метод минимизации расширенного лагранжиана [9], регуляризованные методы обращения разностных схем [8]). Если информацию о следах решений можно получить только на границе, то обратная задача существенно нелинейна. В последнее время исследования связаны с более сложной постановкой, в которой известны (измерены) граничные поля в некотором диапазоне изменения спектрального параметра (частоты колебаний зондирующего возмущения). Она сводится к нелинейным операторным уравнениям, которые содержат промежуточные переменные — компоненты полей смещений. Задачи в такой постановке могут быть исследованы лишь на основе некоторых итеративных процедур, основные принципы построения которых опираются на метод линеаризации и слабую постановку [12, 13].

Результаты исследования таких задач на примере определения свойств одномерных упругих объектов (стержней, балок) представлены в статьях [11, 13, 19]. В работах для исследования задач о восстановлении модулей упругости и плотности упругого или вязкоупругого неоднородного стержня при возбуждении продольных и/или изгибных колебаний предложен итерационный алгоритм, основанный на аппарате интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода.

Для областей типа слоя прямые и обратные коэффициентные задачи исследованы, например, в работе [15], где представлен алгоритм восстановления характеристик-коэффициентов, произвольно меняющихся по глубине, построен итерационный процесс, на каждом шаге которого решаются интегральные уравнения Фредгольма первого рода относительно функций-поправок.

Также распространение получили задачи восстановления коэффициентов вязкоупругих моделей и неоднородных характеристик тела при возбуждении колебаний в нем [16, 17]. В работе [18] исследованы математические аспекты ультразвукового сканирования биологических тканей и реконструкции их свойств, в частности модуля сдвига, при этом в качестве регуляризирующего алгоритма при нахождении градиентов полей использован метод В-сплайнов.

Отметим принципиальную разницу в процедуре идентификации упругих и вязкоупругих моделей. Для вязкоупругих моделей в рамках концепции динамических модулей [1] процесс колебаний описывается комплекснозначными операторами, обладающих свойством диссипативности.

В настоящей работе приведена общая постановка обратной коэффициентной задачи для трехмерного вязкоупругого тела, для которой с помощью процедуры варьирования сформулированы вариационные уравнения, позволяющие строить итерационные процессы. В качестве примера рассмотрена задача о восстановлении свойств изотропного неоднородного по толщине вязкоупругого слоя на основе данных о полях смещений, измеренных на верхней границе слоя. Схема решения основана на предварительном сведении с помощью преобразования Фурье к двум более простым однотипным несвязанным краевым задачам относительно осредненных характеристик, каждая из которых сводится к коэффициентной обратной задаче для диссипативного оператора, что позволяет исполь-

зовать построенные ранее итерационные схемы и регуляризационные алгоритмы для вещественных операторов [11–14, 19]. Представлены некоторые общие свойства решений и результаты вычислительных экспериментов.

### 1. Общая постановка обратной коэффициентной задачи

Общая постановка прямой задачи об определении поля смещений и напряженно-деформированного состояния при анализе установившихся колебаний с частотой  $\omega$  вязкоупругого тела, занимающего область  $V$  и ограниченного кусочно-гладкой границей  $S$ , в рамках концепции динамических модулей имеет вид [4]:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_{mj} = C_{mjkl}(x, i\omega) u_{k,l}, \quad (2)$$

$$u_i |_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j |_{S_\sigma} = p_i. \quad (3)$$

Здесь  $C_{ijkl}(x, i\omega)$  — компоненты тензора динамических модулей, являющиеся кусочно-непрерывными комплексными функциями координат и частоты,  $\rho$  — плотность,  $n_j$  — компоненты единичного вектора внешней нормали к  $S$ .

В обратной задаче, используя дополнительную информацию,

$$u_i |_{S_\sigma} = f_i, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2], \quad (4)$$

характеризующую общие сведения о граничных полях смещений, которые доступны для непосредственного измерения в некотором частотном диапазоне, требуется определить не только поля смещений, но и законы изменения  $C_{ijkl}(x, i\omega)$  и плотности как функций координат.

Введем множество функций пространственных координат  $H_m(V)$ , характеризующих законы изменения динамических модулей и плотности, которые могут иметь конечное число разрывов первого рода на некоторых поверхностях внутри области  $V$ , которые разбивают ее на конечное число подобластей  $V_m$ ; внутри каждой из этих подобластей функции бесконечно дифференцируемы. Эти функции могут быть кусочно-постоянными в случае включения или равны нулю в случае полости на некоторых из этих подобластей.

В работе [4] сформулированы и доказаны некоторые утверждения, необходимые для исследования задачи в упругом случае. Если рассматривать в них  $C_{ijkl}(x, i\omega)$  как функции не только координат, но и частоты, можно установить некоторые аналогичные свойства и для вязкоупругого случая. Введем понятие возможного поля. Под возможным полем понимается любое непрерывное в  $V$  поле смещений, поле компонент тензора динамических модулей и плотности с характеристиками неоднородности из  $H_m(V)$ , которые удовлетворяют уравнениям (1)–(2) и граничным условиям (3). Используя принцип соответствия, легко установим, что имеет место

**Свойство 1.** Для любого возможного поля выполняется равенство

$$\int_V 2L(u_i, v_i, C_{ijkl}(x, i\omega), \rho(x)) dV + \int_{S_\sigma} p_i v_i dS = 0, \quad (5)$$

где  $2L(u_i, v_i, C_{ijkl}(x, i\omega), \rho) = \rho\omega^2 u_i v_i - C_{ijkl}(x, i\omega) u_{k,l} v_{i,j}$ .

Проварьировав соотношение (5) по всем переменным, используя формулу Гаусса — Остроградского, можно установить

**Свойство 2.** Имеет место следующее вариационное уравнение

$$\int_V 2L(u_i, u_i, \delta C_{ijkl}(x, i\omega), \delta\rho(x)) dV - \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) является линейным относительно вариаций и порождает линейный оператор, действующий из  $H_m(V)$  в  $C^\infty([\omega_1, \omega_2])$ ,

$$T(\delta C_{ijkl}, \delta\rho) = \int_V (\delta\rho(x) \omega^2 u_i u_i - \delta C_{ijkl}(x, i\omega) u_{k,l} u_{k,j}) dV.$$

Ядра этого оператора при любых  $\omega$  (в отличие от упругого случая) представляют собой функции, аналитические по  $\omega$  и суммируемые по пространственным координатам, поэтому соответствующий оператор является вполне непрерывным. Использование уравнения (6) позволяет сразу строить итерационную процедуру одновременного определения динамических модулей и плотности, заключающуюся в построении последовательности решений  $u_i^{(n)}$ ,  $C_{ijkl}^{(n)}(x, i\omega)$ ,  $\rho^{(n)}$ . На первом шаге выбирается некоторое начальное распределение модулей и плотности  $C_{ijkl}^{(0)}(x, i\omega)$  и  $\rho^{(0)}$  (например, в простейшем классе функций — линейных или кусочно-постоянных из условия минимума функционала невязки). Далее, если на  $n - 1$  шаге  $u_i^{(n-1)}$  есть решение краевой задачи (1)–(3) с известными  $C_{ijkl}^{(n-1)}(x, i\omega)$  и  $\rho^{(n-1)}$ , то элементы последовательности должны удовлетворять следующему линейному операторному уравнению первого рода

$$\int_V 2L(u_i^{(n-1)}, u_i^{(n-1)}, C_{ijkl}^{(n)}(x, i\omega), \rho^{(n)}) dV - \int_{S_\sigma} p_i (f_i - u_i^{(n-1)}) dS = 0, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2], \quad (7)$$

которое является следствием (6).

Отметим, что одного уравнения (7) недостаточно для однозначного определения всего набора искомых функций  $C_{ijkl}^{(n)}(x, i\omega)$ ,  $\rho^{(n)}$ , в общем случае требуется использовать различные способы нагружения, но в ряде ситуаций этого уравнения вполне достаточно.

Далее рассматривается задача о реконструкции вязкоупругих характеристик в неоднородном по толщине слое, для которой можно значительно упростить процедуру построения решения.

## 2. Постановка двумерной задачи об идентификации параметров вязкоупругого слоя

Рассмотрим установившиеся колебания с частотой  $\omega$  вязкоупругого изотропного неоднородного по толщине слоя, занимающего область  $V = \{x_1 \in (-\infty, \infty), x_2 \in (-\infty, \infty), x_3 \in [0, h]\}$  в условиях плоской деформации. Нижняя грань слоя  $S_1$  жестко закреплена, на верхней границе приложены нагрузки, определяемые вектором  $p$ , где  $p = (p_1, 0, p_3)$ .

Считая, что у вектора смещений ненулевыми являются компоненты  $u_1 = u_1(x_1, x_3)$ ,  $u_3 = u_3(x_1, x_3)$ , получим краевую задачу:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)u_{1,11} + \lambda u_{3,31} + (\mu(u_{1,3} + u_{3,1}))_{,3} + \rho\omega^2 u_1 &= 0, \\ ((\lambda + 2\mu)u_{3,3})_{,3} + (\lambda u_{1,1})_{,3} + (\mu(u_{1,3} + u_{3,1}))_{,1} + \rho\omega^2 u_3 &= 0, \\ u_i|_{S_1} &= 0, \quad i = 1, 3, \\ \lambda u_{1,1} + (\lambda + 2\mu)u_{3,3}|_{S_2} &= p_3, \\ \mu(u_{1,3} + u_{1,3})|_{S_2} &= p_1, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\mu(x_3, i\omega) = \frac{i n \omega \mu_2(x_3) + \mu_1(x_3)}{1 + i n \omega}$ ,  $\lambda(x_3, i\omega) = \frac{i n \omega \lambda_2(x_3) + \lambda_1(x_3)}{1 + i n \omega}$  и  $\rho(x_3)$  — неизвестные комплекснозначные функции (аналоги характеристик Ляме) и плотность неоднородного слоя соответственно. Функции  $\mu_1(x_3)$ ,  $\lambda_1(x_3)$  и  $\mu_2(x_3)$ ,  $\lambda_2(x_3)$  характеризуют мгновенные и длительные модули упругости соответственно,  $n > 0$  — время релаксации. При этом из общих свойств операторов вязкоупругости [1] следуют ограничения  $0 < \lambda_1(x_3) < \lambda_2(x_3)$  и  $0 < \mu_1(x_3) < \mu_2(x_3)$ .

Обратная коэффициентная задача в рассматриваемом случае сводится к определению четырех функций  $\mu_1(x_3)$ ,  $\lambda_1(x_3)$ ,  $\mu_2(x_3)$ ,  $\lambda_2(x_3)$  по известной информации о полях смещений, заданных на верхней границе слоя при известном законе изменения плотности в некотором частотном диапазоне  $[\omega_1, \omega_2]$ .

### 3. Формулировка операторных соотношений

Основной проблемой, возникающей при исследовании коэффициентных обратных задач, является построение операторных соотношений, связывающих искомые и заданные функции. На основе свойств 1, 2, сформулированных в общем случае, можно построить итерационные процессы. Для рассматриваемой постановки возможно значительное упрощение ситуации и разделение общей задачи на две подзадачи. Применяя интегральное преобразование Фурье по переменной  $x_1$  к задаче (8) и проводя несложные преобразования, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно трансформант компонент поля смещений  $U_1(\alpha_1, x_3, \omega)$ ,  $U_3(\alpha_1, x_3, \omega)$ :

$$\begin{aligned} -\alpha_1^2(\lambda + 2\mu)U_1 - i\alpha_1\lambda U_{3,3} + (\mu(U_{1,3} - i\alpha_1 U_3))_{,3} + \rho\omega^2 U_1 &= 0, \\ ((\lambda + 2\mu)U_{3,3})_{,3} - i\alpha_1((\lambda U_1)_{,3} + \mu U_{1,3}) - \alpha_1^2 \mu U_3 + \rho\omega^2 U_3 &= 0, \\ U_i|_{x_3=0} = 0, \quad (\lambda + 2\mu)U_{3,3} - i\alpha_1\lambda U_1|_{x_3=h} = \tilde{p}_3, \\ \mu(U_{1,3} - i\alpha_1 U_3)|_{x_3=h} = \tilde{p}_1, \quad i = 1, 3. \end{aligned} \quad (9)$$

Полагая в задаче (9)  $\alpha_1 = 0$ , получаем две однотипные несвязанные краевые задачи относительно усредненных характеристик смещений, в одну из которых входит неизвестная комплекснозначная функция  $\mu = \mu(x_3, i\omega)$ , а во вторую —  $\lambda(x_3, i\omega) + 2\mu(x_3, i\omega)$ .

**Задача 1.** Первая краевая задача имеет вид:

$$\begin{aligned} (\mu U_{1,3})_{,3} + \rho\omega^2 U_1 &= 0, \\ U_1|_{x_3=0} = 0, \quad \mu U_{1,3}|_{x_3=h} &= \tilde{p}_1. \end{aligned} \quad (10)$$

**Задача 2.** Вторая краевая задача имеет вид:

$$\begin{aligned} ((\lambda + 2\mu)U_{3,3})_{,3} + \rho\omega^2 U_3 &= 0, \\ U_3|_{x_3=0} = 0, \quad (\lambda + 2\mu)U_{3,3}|_{x_3=h} &= \tilde{p}_3, \end{aligned} \quad (11)$$

где для простоты записи обозначим  $U_i(x_3, \omega) = U_i(0, x_3, \omega)$ ,  $i = 1, 3$ .

Обратную коэффициентную задачу будем решать на основе информации об интегральных характеристиках полей смещений в случаях задач 1, 2, измеренных на верхней границе слоя.

Восстановление законов изменения комплексных функций по данным о спектральных свойствах решений сводится к последовательному решению двух обратных коэффициентных задач.

**Обратная задача 1 (ОЗ 1).** Определить пару функций  $\mu_1(x_3)$ ,  $\mu_2(x_3)$  из (10) по информации

$$U_1(h, \omega) = f_1(\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \quad (12)$$

Далее, если  $\mu_1(x_3)$  и  $\mu_2(x_3)$  определены из задачи 1, то формулируется

**Обратная задача 2 (ОЗ 2).** Определить пару функций  $\lambda_1(x_3)$ ,  $\lambda_2(x_3)$  из (11) по информации

$$U_3(h, \omega) = f_3(\omega), \quad \omega \in [\omega_3, \omega_4]. \quad (13)$$

Отметим, что (10) и (11) представляют собой однотипные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными комплексными коэффициентами относительно усредненных характеристик полей смещений. Для произвольных законов изменения  $\mu_1(x_3)$ ,  $\mu_2(x_3)$ ,  $\lambda_1(x_3)$ ,  $\lambda_2(x_3)$  решение возможно лишь численно с привлечением аппарата численного исследования интегральных уравнений Фредгольма 1-го и 2-го родов. Подобная обратная задача возникает при описании продольных колебаний неоднородного по длине упругого стержня, которая была исследована ранее в работе [14].

Решение обратной задачи о реконструкции вязкоупругих характеристик приводит к нелинейной системе интегральных уравнений, которая может быть исследована на основе построения итерационного процесса. В то же время необходимо изучить некоторые общие свойства решений, важные при анализе обратных задач при произвольных законах изменения искоемых характеристик.

В силу однотипности задач (10), (12) и (11), (13) построим операторные соотношения для вспомогательной задачи, которая получается после введения безразмерных переменных  $x = x_3/h$ ,  $u = U_i/h$ ,  $\kappa^2 = \frac{\rho_0 \omega^2 h^2}{\mu_0}$  и безразмерных характеристик

$$\begin{aligned} (G(x, i\kappa)u'(x, \kappa))' + \kappa^2 r(x)u(x, \kappa) &= 0, \\ u(0, \kappa) &= 0, \quad G(1, i\kappa)u'(1, \kappa) = 1, \end{aligned} \quad (14)$$

при наличии дополнительного условия

$$u(1, \kappa) = f(\kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2], \quad (15)$$

причем диапазон изменения спектрального параметра  $\kappa$  выбирается в окрестности одного из максимумов амплитудно-частотной характеристики.

Здесь  $r(x) = \rho_0 \rho(x)$ ,  $G(x, i\kappa) = \frac{i\tau \kappa g(x) + h(x)}{1 + i\tau \kappa}$ , где  $g(x) = \frac{\mu_2(x)}{\mu_1(0)}$ ,  $h(x) = \frac{\mu_1(x)}{\mu_1(0)}$  для задачи 1 и  $g(x) = \frac{\lambda_2(x) + 2\mu_2(x)}{\mu_1(0)}$ ,  $h(x) = \frac{\lambda_1(x) + 2\mu_1(x)}{\mu_1(0)}$  для задачи 2,  $\tau = n \sqrt{\frac{\mu_1(0)}{\rho_0 h^2}}$ .

Обратная задача сводится к определению пары функций  $h(x)$ ,  $g(x)$ ,  $0 < h(x) < g(x)$ , ( $r(x)$  — известная положительная функция) из краевой задачи (14)–(15).

Проведем исследование рассматриваемой задачи. Отметим некоторые свойства функции  $G(x, i\kappa)$  и решения  $u(x, \kappa)$ .

Отделим вещественную и мнимую части в выражении для функции комплексного модуля

$$G(x, i\kappa) = \operatorname{Re}(G(x, i\kappa)) + i \operatorname{Im}(G(x, i\kappa)) = (g(x)z_2(\kappa) + h(x)z_1(\kappa)) + i(g(x) - h(x))z_3(\kappa),$$

где  $z_1(\kappa) = \frac{1}{1 + \tau^2 \kappa^2}$ ,  $z_2(\kappa) = \frac{\tau^2 \kappa^2}{1 + \tau^2 \kappa^2}$ ,  $z_3(\kappa) = \frac{\tau \kappa}{1 + \tau^2 \kappa^2}$ .

**Свойство 3.** Имеет место  $\operatorname{Re}(G(x, i\kappa)) > 0$ ,  $\operatorname{Im}(G(x, i\kappa)) \geq 0$ .

Введем в рассмотрение следующий оператор

$$Au = -(Gu)u', \quad u(0, \kappa) = 0, \quad u'(1, \kappa) = 0.$$

Отметим, что введенный оператор обладает свойством диссипативности.

**Свойство 4.** Оператор  $A$  — диссипативен.

Поскольку согласно определению, свойством диссипативности обладает линейный оператор  $A$  с областью определения  $D_A$ , плотной в гильбертовом пространстве  $H$ , такой, что  $\text{Im}(Ax, x) \geq 0$  при  $x \in D_A$ , проверим его выполнение. Действительно, находим

$$\begin{aligned} \text{Im}((Au, u)) &= \text{Im}((-Gu')', u) = -\text{Im}\left(\int_0^1 (Gu')' \bar{u} dx\right) \\ &= \text{Im}\left(\int_0^1 Gu' \bar{u}' dx\right) = \text{Im}\left(\int_0^1 \frac{i\tau\kappa g + h}{1 + i\tau\kappa} u' \bar{u}' dx\right) = \int_0^1 \frac{(g-h)\tau\kappa}{1 + \tau^2\kappa^2} u' \bar{u}' dx \geq 0. \end{aligned}$$

Построим решение краевой задачи (14) в виде разложения в ряд по степеням  $\kappa$

$$u(x, \kappa) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x) \kappa^j. \quad (16)$$

Учитывая вид комплексного модуля  $G(x, i\kappa)$ , перепишем уравнение задачи (14) в виде

$$((i\tau\kappa g(x) + h(x))u'(x, \kappa))' + \kappa^2 r(x) u(x, \kappa) + i\tau\kappa^3 r(x) u(x, \kappa) = 0. \quad (17)$$

**Свойство 5.** Имеют место следующие рекуррентные соотношения

$$u_{n+1} = \int_0^x \left[ \frac{-i\tau g(\eta)}{h(\eta)} u'_n(\eta) + \frac{1}{h(\eta)} \int_{\eta}^1 (r(\xi) u_{n-1}(\xi) + i\tau r(\xi) u_{n-2}(\xi)) d\xi \right] d\eta, \quad n = 2, 3, \dots,$$

причем

$$\begin{aligned} u_0 &= \int_0^x \frac{d\eta}{h(\eta)}, \quad u_1 = -i \int_0^x \frac{\tau g(\eta)}{h(\eta)} u'_0(\eta) d\eta, \\ u_2 &= \int_0^x \left[ \frac{-i\tau g(\eta)}{h(\eta)} u'_1(\eta) + \frac{1}{h(\eta)} \int_{\eta}^1 r(\xi) u_0(\xi) d\xi \right] d\eta. \end{aligned}$$

Эти соотношения легко устанавливаются при подстановке (16) в (14), формулировке краевых задач, получающихся при одинаковых степенях  $\kappa$ , и нахождении их решений.

#### 4. Формулировка итерационного процесса

Итерационный процесс, подобный описанному в [11–14, 19], может быть построен путем последовательного решения систем интегральных уравнений Фредгольма 1-го и 2-го рода, полученных с использованием метода линеаризации.

Итерационный процесс можно построить следующим образом:

1. Из интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода (18) по известным  $n-1$  приближениям неизвестных функций  $h_{n-1}(x)$  и  $g_{n-1}(x)$  (из которых можно найти  $G_{n-1}(x, i\kappa)$ ) определим соответствующую функцию  $u_{n-1}(x, \kappa)$

$$u_{n-1}(x) = \int_0^1 K_{n-1}(\xi, x) u_{n-1}(\xi) d\xi + \int_0^x \frac{d\eta}{G_{n-1}(\eta, i\kappa)}, \quad (18)$$

где  $K_{n-1}(\xi, x) = \kappa^2 \int_0^{\min\{\xi, x\}} r(\eta) \frac{d\eta}{G_{n-1}(\eta, i\kappa)}$ ,  $\xi \in [0, 1]$ .

Для решения интегрального уравнения (18) использован метод коллокаций, при этом интегральный оператор аппроксимируется конечномерным и задача сводится к решению алгебраической системы относительно узловых неизвестных.

2. Построим следующие приближения неизвестных функций  $h_n(x) = h_{n-1}(x) + \delta h(x)$  и  $g_n(x) = g_{n-1}(x) + \delta g(x)$ , где  $\delta h(x)$  и  $\delta g(x)$  — поправки для длительного и мгновенного модуля, входящие в функцию  $\delta G(x, i\kappa)$ , поправки комплексного модуля, должны удовлетворять интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода (см. свойство 2)

$$\int_0^1 \delta G(x, i\kappa) u'_{n-1}{}^2(x, \kappa) dx = u_{n-1}(1, \kappa) - f(\kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]. \quad (19)$$

Тогда из интегрального уравнения (19) получим систему:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\delta g(x) z_2(\kappa) + \delta h(x) z_1(\kappa)) u'_{n-1}(x, \kappa) \overline{u'_{n-1}(x, \kappa)} dx &= \operatorname{Re}(u_{n-1}(1, \kappa) - f(\kappa)), \\ \int_0^1 (\delta g(x) - \delta h(x)) z_3(\kappa) u'_{n-1}(x, \kappa) \overline{u'_{n-1}(x, \kappa)} dx &= \operatorname{Im}(u_{n-1}(1, \kappa) - f(\kappa)). \end{aligned} \quad (20)$$

Система (20) представляет собой систему интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода с суммируемыми ядрами (при любых законах изменения неоднородности), решение которой является некорректной задачей и требует использования регуляризационных методов, например, метода регуляризации А. Н. Тихонова [10].

3. В результате реализации итерационного процесса получим функции  $h_n(x)$  и  $g_n(x)$ , которые дают приближенное решение обратной коэффициентной задачи (14) при удовлетворении условию выхода, в противном случае позволяют скорректировать ядра интегральных операторов (20) для построения решения на следующей итерации. В качестве условия выхода могут быть использованы следующие:

$$\|\delta h\|_{C[0,1]} < \varepsilon, \quad \|\delta g\|_{C[0,1]} < \varepsilon, \quad (21)$$

$$\|u_{n-1}(1, \kappa) - f(\kappa)\|_{C[0,1]} < \varepsilon, \quad (22)$$

$$n > N, \quad (23)$$

где  $C[0, 1]$  — пространство непрерывных на  $[0, 1]$  функций;  $N$  — предельное значение максимально допустимого количества итераций.

## 5. Численная реализация

Следуя изложенной выше схеме, был проведен вычислительный эксперимент по восстановлению неизвестных безразмерных функций  $\lambda_1 = \lambda_1(x_3)$ ,  $\lambda_2 = \lambda_2(x_3)$ ,  $\mu_1 = \mu_1(x_3)$ ,  $\mu_2 = \mu_2(x_3)$  для слоя толщины  $h = 1$ . В серии расчетов плотность выбиралась постоянной  $\rho = 1$ , параметр, характеризующий время релаксации, полагался  $\tau = 0.1$ .

Итерационный процесс (19)–(23) был применен сначала к задаче (10), (12) для восстановления функций  $\mu_1 = \mu_1(x_3)$ ,  $\mu_2 = \mu_2(x_3)$  в наборе точек, затем к задаче (11), (13) для определения функций  $\lambda_1 = \lambda_1(x_3)$ ,  $\lambda_2 = \lambda_2(x_3)$ .



Необходимо отметить, что первый этап итерационного процесса требует знания начального приближения. В настоящей работе начальное приближение  $G_0(x, i\kappa)$  строилось в классе линейных комплексных ограниченных функций, коэффициенты которых находились из условия минимума функционала невязки на построенном из априорной информации компактном множестве:

$$\Phi = \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} |u(1, \kappa) - f(\kappa)|^2 d\kappa, \quad (24)$$

где  $u(1, \kappa)$  — трансформанта функции смещения на поверхности слоя при некотором законе изменения комплексного модуля. Минимизация функционала осуществлялась на равномерной сетке области  $[0, 1] \times [\kappa_1, \kappa_2]$ .

Далее приведены примеры восстановления функций различного характера.

**ПРИМЕР 1.** Случай монотонных законов изменения неоднородных характеристик слоя

$$\mu_1(x_3) = 1 + 0.4x_3^2, \quad \mu_2(x_3) = 3 - 1.5x_3^2, \quad \lambda_1(x_3) = 2 - x_3^2, \quad \lambda_2(x_3) = 2.1 + x_3^2.$$

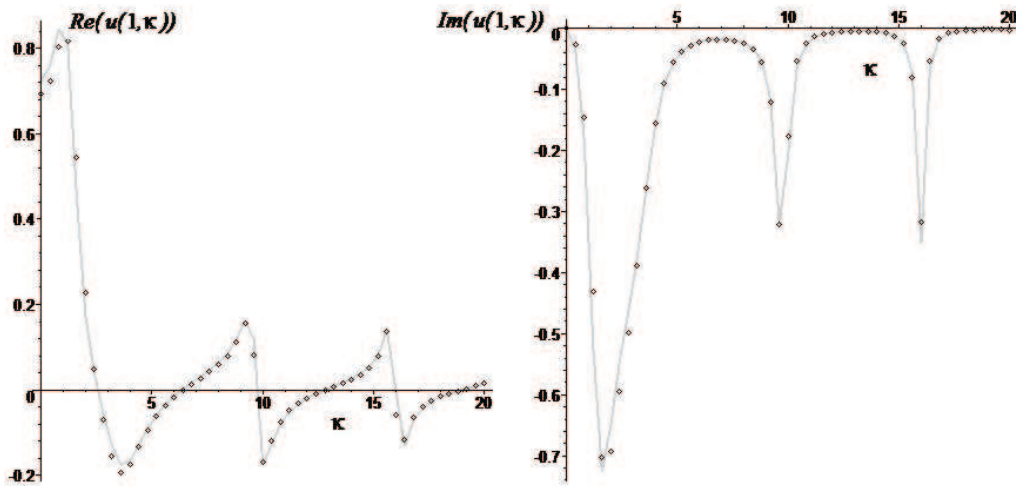


Рис. 1.

Для первого этапа начальные приближения найдены в виде  $\mu_1^0(x_3) = 0.45 + 0.85x_3$  и  $\mu_2^0(x_3) = -1.6x_3 + 3.2$ . В ходе анализа амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) вещественной и мнимой частей трансформанты смещения при  $x_3 = h$  (рис. 1 (линией обозначена АЧХ, соответствующая точным функциям, точками — начальному приближению)), позволяющего выявить наиболее эффективные с точки зрения идентификации диапазоны изменения волновых чисел (между резонансными числами), для восстановления был выбран отрезок  $\kappa \in [9.3, 10.5]$ . Выход из итерационного процесса во всех экспериментах производился либо по числу итераций ( $N = 20$ ), либо по условию (22) при  $\varepsilon = 10^{-3}$ . В приведенном случае выход осуществлен в соответствии со вторым условием, для выполнения которого потребовалось 11 итераций (рис. 2). Относительная погрешность для первого этапа была меньше 8%.

На рис. 2 представлены графики точного решения — сплошная линия, начального приближения — пунктир, восстановленной функции — квадратиками.

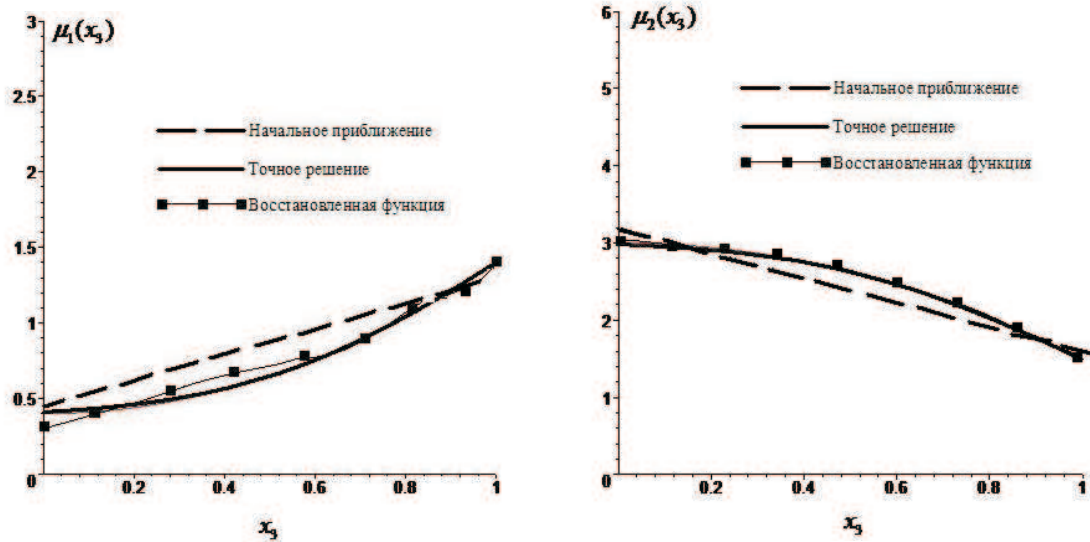


Рис. 2.

Для 2-го этапа были определены начальные приближения в виде

$$\lambda_1^0(x_3) + 2\mu_1^0(x_3) = 2.9 + 0.6x_3, \quad \lambda_2^0(x_3) + 2\mu_2^0(x_3) = -1.7x_3 + 8.2.$$

Идентификация производилась на отрезке  $\kappa \in [7.5, 11.5]$ , потребовалось 20 итераций, на рис. 3 представлены результаты восстановления исходных функции  $\lambda_1(x_3)$ ,  $\lambda_2(x_3)$ . При этом относительная погрешность восстановления второй функции не превышает 10%.

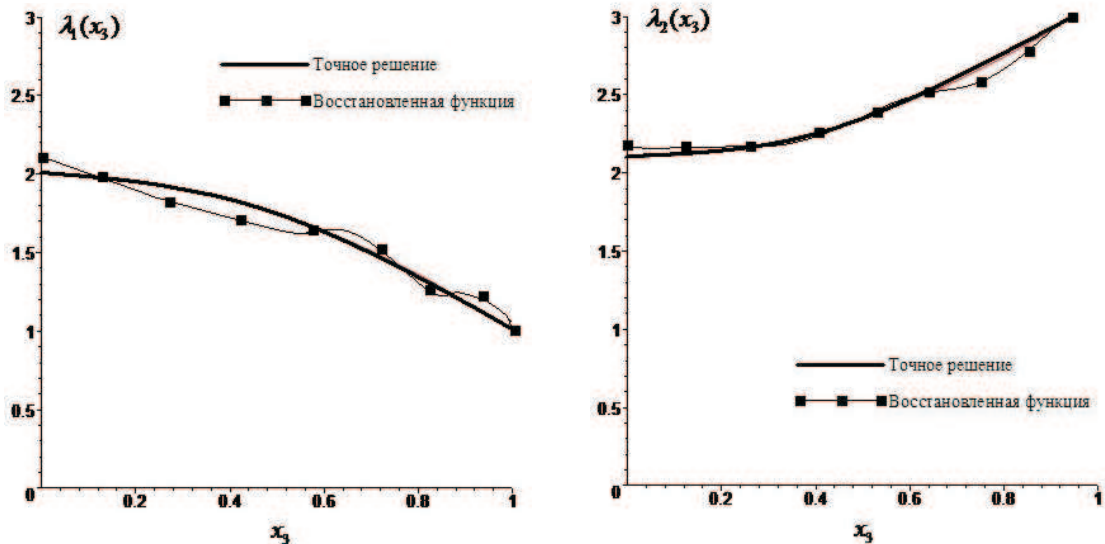


Рис. 3.

ПРИМЕР 2. В случае немонотонных законов изменения  $\mu_1(x_3) = 2 - \cos(5x_3)$ ,  $\mu_2(x_3) = 3 + \sin(3x_3)$ ,  $\lambda_1(x_3) = 2.5 - \sin(5x_3)$ ,  $\lambda_2(x_3) = 5 - 2\sin(5x_3 - 1)$  определялись начальные приближения, частотные диапазоны,  $\mu_1^0(x_3) = 2$ ,  $\mu_2^0(x_3) = 3.5$ ,  $\kappa \in [5, 8.5]$  и  $\lambda_1^0(x_3) + 2\mu_1^0(x_3) = 6$ ,  $\lambda_2^0(x_3) + 2\mu_2^0(x_3) = 12$ ,  $\kappa \in [6.1, 15.74]$ . Выход из итерационного процесса был произведен, соответственно через 15 и 30 итераций. Погрешность составила не более 12%. Результаты реконструкции приведены на рис. 4-5.

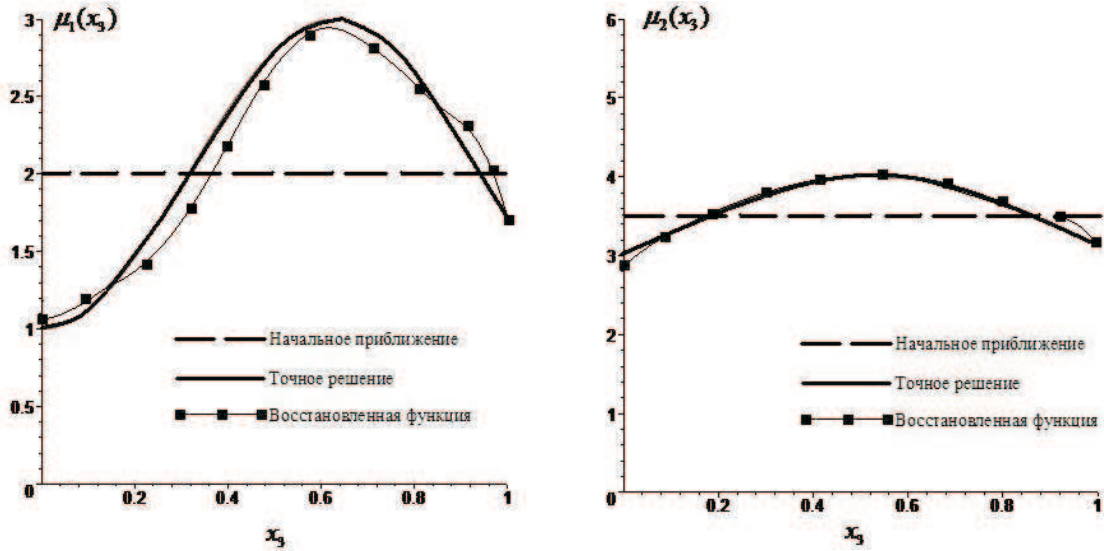


Рис. 4.

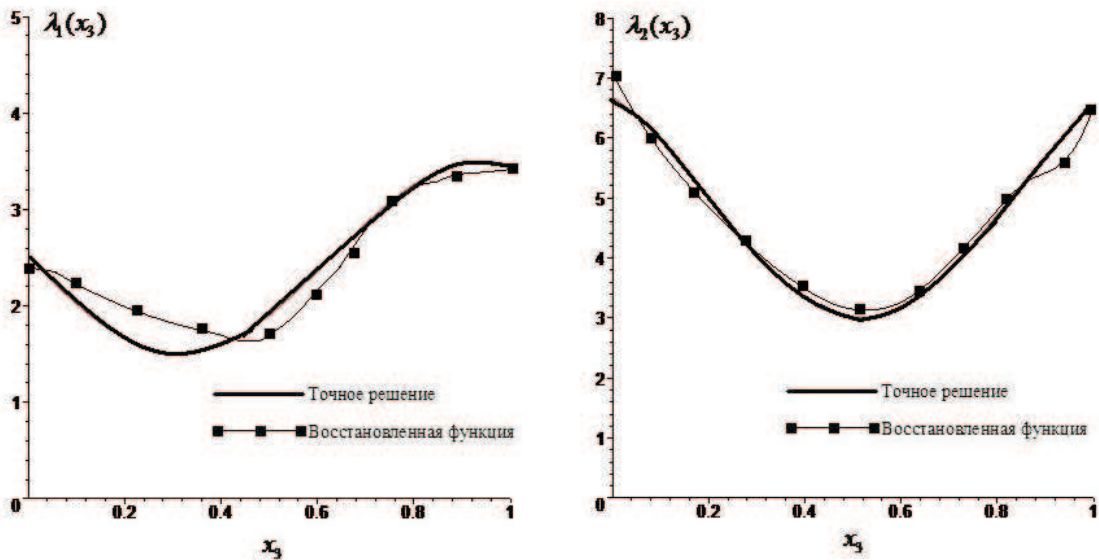


Рис. 5.

Рассмотрим влияние зашумления дополнительной информации на погрешность восстановления, что моделирует реальный эксперимент с установкой датчиков, измеряющих смещение. Каждый из таких датчиков снимает информацию с некоторой погрешностью, которая моделируется аддитивным зашумлением. Реальное зашумление будем моделировать с помощью соотношения  $f_\delta(\kappa) = f(\kappa)(1 + \delta\gamma)$ , где  $\delta$  — величина зашумления,  $\gamma$  — случайная величина с равномерным законом распределения.

Далее рассмотрен эксперимент на зашумление дополнительной информации в 1% ( $\delta = 0.01$ ) в примере 1 (рис. 6–9).

*Первый этап.* Относительная погрешность для первого этапа составила менее 10%.

*Второй этап.* Относительная погрешность для второго этапа составила менее 12%.

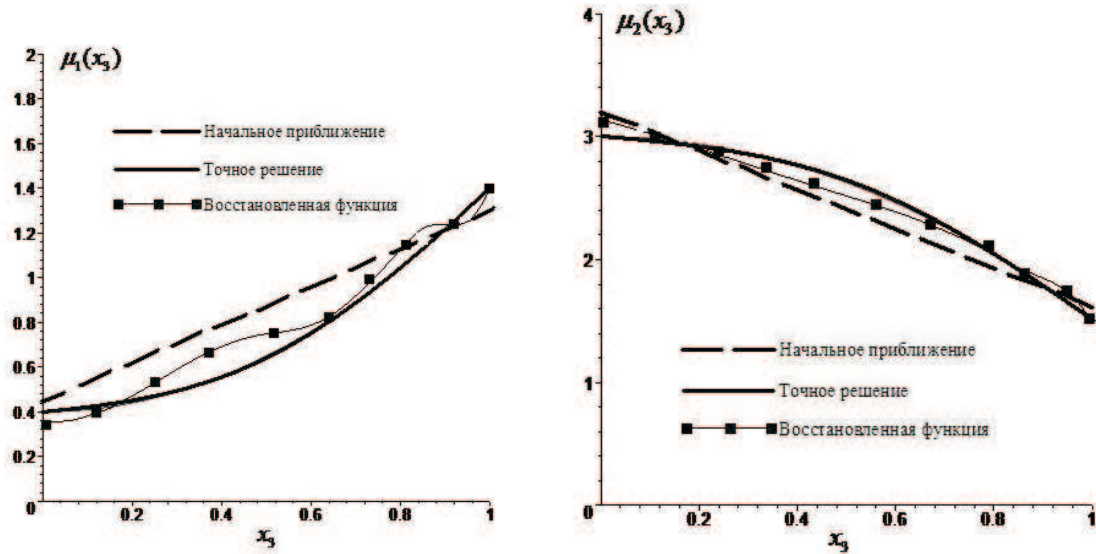


Рис. 6.

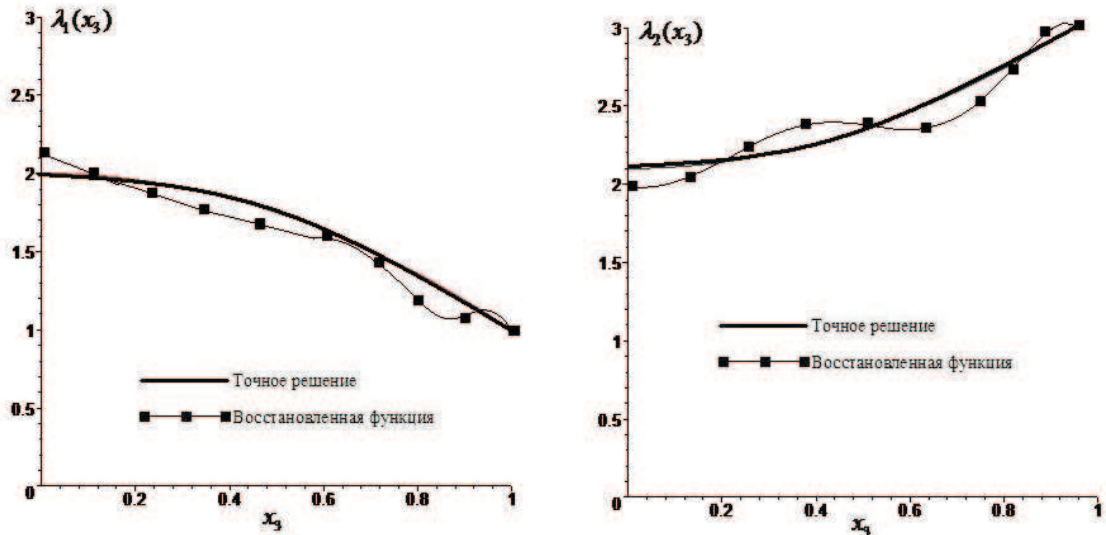


Рис. 7.

Из приведенных результатов можно делать вывод о работоспособности предлагаемого подхода в условиях реального зашумления входной информации.

## 6. Заключение

Представлен способ исследования обратной коэффициентной задачи о восстановлении функций, характеризующих неоднородные свойства вязкоупругого слоя при анализе плоской деформации. С помощью интегрального преобразования Фурье задача сведена к двум более простым задачам относительно усредненных характеристик слоя. Решение построено с помощью итерационного процесса, сочетающего на каждом шаге решение прямой задачи (сведенной к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода) и определение поправок на основе решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода с суммируемым (гладким) ядром. Рассмотрены примеры идентификации вязкоупругих

характеристик неоднородных материалов для различных законов изменения комплексного модуля по толщине слоя. В результате вычислительных экспериментов установлено, что восстановление неизвестных законов изменения параметров слоя происходит с погрешностью менее 8% при условно точной входной информации, а при зашумлении порядка 1% точность реконструкции составляет 12%, что позволяет заключить, что предложенный в работе [14] подход, примененный к одномерным обратным задачам для упругих стержней, может быть успешно применен и для областей типа слоя, свойства которого меняются по толщине при наличии диссипации. Проведенные вычислительные эксперименты реконструкции неизвестных функций по амплитудно-частотным характеристикам свидетельствуют об эффективности предложенного подхода для монотонных функций.

ЗАМЕЧАНИЕ. Следует отметить, что предложенный алгоритм восстановления свойств материала существенно опирается на возбуждение колебаний двухкомпонентной нагрузкой. В случае действия лишь нормальной нагрузки при сведении к более простым задачам одна из задач получается однородной и имеет лишь тривиальное решение, из нее восстановить вторую неизвестную функцию не удастся.

### Литература

1. Кристенсен Р. Введение в механику композитов.—М.: Мир, 1974.—338 с.
2. Gladwell G. M. L. Inverse problems in vibration.—Waterloo: Kluwer Academic Publishers, 2004.—471 с.
3. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела.—М.: Физматлит, 2007.—223 с.
4. Ватульян А. О. О вариационном подходе при исследовании обратных коэффициентных задач в теории упругости // Владикавк. мат. журн.—2009.—Т. 11, вып. 1.—С. 3–8.
5. Kim S., Kreider K. L. Parameter identification for nonlinear elastic and viscoelastic plates // Applied Numerical Math.—2006.—Vol. 56.—P. 1538–1554.
6. Ватульян А. О. К теории обратных коэффициентных задач в линейной механике деформируемого тела // Прикладная математика и механика.—2010.—№ 6.—С. 911–918.
7. Jadamba B., Khan A. A., Raciti F. On the inverse problem of identifying Lamé coefficients in linear elasticity // J. Computers and Math. with Appl.—2008.—Vol. 56.—P. 431–443.
8. McLaughlin J., Yoon J.-R. Unique identifiability of elastic parameters from time-dependent interior displacement measurement // Inverse Problems.—2004.—Vol. 20.—P. 25–45.
9. Zhiming Chen, Zou J. An augmented Lagrangian method for identifying discontinuous parameters in elliptic systems // J. Control and Optimization.—1999.—Vol. 37.—P. 892–910.
10. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.—М.: Наука, 1979.—288 с.
11. Ватульян А. О., Шевцова М. С. Об идентификации свойств неоднородных вязкоупругих материалов // Механика композиционных материалов и конструкций.—2009.—Т. 15, № 4.—С. 475–485.
12. Ватульян А. О. Об итерационных процессах в коэффициентных обратных задачах // Исслед. по мат. анализу, дифференц. уравнениям и их приложениям.—Владикавказ: ВНИЦ РАН и РСО-А, 2010.—С. 20–32.—(Итоги науки. Юг России. Мат. форум. Т. 4).
13. Баранов И. В., Ватульян А. О., Соловьев А. И. Об одном численном алгоритме и его применении в обратных задачах идентификации упругих сред // Вычислительные технологии.—2008.—№ 3.—С. 14–26.
14. Бочарова О. В., Ватульян А. О. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акустический журнал.—2009.—Т. 55, № 3.—С. 281–288.
15. Ватульян А. О., Сатуновский П. С. Об определении упругих модулей при анализе колебаний неоднородного слоя // Докл. РАН.—2007.—Т. 414, № 1.—С. 36–38.
16. Ara'ujo A. L., Mota Soares C. M., Mota Soares C. A., Herskovits J. Inverse estimation of elastic, viscoelastic and piezoelectric properties of anisotropic sandwich adaptive structures // 7th Euromech Solid Mechanics Conference.—2009.—Vol. 20.—P. 25–45.
17. Polansky J., Boiron O., Novacek V. Identification of viscoelastic properties of artificial materials simulating vascular wall // J. Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering.—2005.—Vol. 8.—P. 10–41.

18. McLaughlin J., Ji L. Recovery of the Lam'e parameter  $\mu$  in biological tissues // Inverse Problems.—2004.—Vol. 20.—P. 1–24.
19. Аникина Т. А., Богачев И. В., Ватульян А. О. Об определении неоднородных реологических свойств балок // Вестн. ДГТУ.—2011.—Т. 10, № 7.—С. 1016–1023.
20. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.—М.: Наука, 1976.—543 с.

*Статья поступила 26 апреля 2011 г.*

БОГАЧЕВ ИВАН ВИКТОРОВИЧ  
Южный федеральный университет,  
аспирант кафедры теории упругости  
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а  
E-mail: bogachev89@yandex.ru

ВАТУЛЬЯН АЛЕКСАНДР ОВАНЕСОВИЧ  
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,  
заведующий отделом дифференциальных уравнений  
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;  
Южный федеральный университет,  
заведующий кафедрой теории упругости  
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а  
E-mail: vatulyan@math.rsu.ru

THE INVERSE COEFFICIENT PROBLEM  
FOR DISSIPATIVE OPERATORS AND IDENTIFICATION  
OF THE PROPERTIES OF VISCOELASTIC MATERIALS

Bogachev I. V. and Vatulyan A. O.

We give some general formulation and the variational equation of the inverse problem of identifying the inhomogeneous characteristics of three-dimensional viscoelastic body. Under consideration is the problem of reconstruction of the functional coefficients of dissipative operators arising in solving several problems of identification of the properties of layered inhomogeneous viscoelastic structures in the analysis of spectral characteristics. We suggest a method for constructing an iterative process and present the results of recovering functions of different types.

**Key words:** inverse problems, dissipative operators, viscoelasticity, identification, iterative process.