Владикавказский математический журнал
2012, Том 14, Выпуск 3, С. 74–86

УДК **514**

ЗАДАЧА ДЖ. В. ФИКЕ ДЛЯ РАВНОБЕДРЕННЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ[1]

Н. В. Рассказова

На евклидовой плоскости рассматриваются два конгруэнтных пересекающихся равнобедренных треугольника с наименьшим углом, расположенным между боковыми сторонами. Дж. В. Фике предложил двухстороннюю оценку для отношения длины части границы первого треугольника, расположенной во втором треугольнике, к длине части границы второго треугольника, лежащей в первом треугольнике. В данной работе показано, что в целом предположение Дж. В. Фике не верно. Для равнобедренных треугольников с наименьшим углом, расположенным между боковыми сторонами, доказан некоторый аналог оценки Дж. В. Фике.

Ключевые слова: евклидова плоскость, выпуклые многоугольники, задача Дж. В. Фике, неравенства.

1. Постановка задачи Дж. В. Фике

Обозначим через $\partial(A)$ и $\operatorname{int}(A)$ соответственно границу и внутренность множества A на евклидовой плоскости, через $\operatorname{length}(\gamma)$ — длину произвольной спрямляемой кривой γ.

В [5, 6] сформулирована следующая задача, поставленная Дж. В. Фике (J. W. Fickett): Пусть K и K' — произвольные конгруэнтные прямоугольники, имеющие общие внутренние точки. Справедливо ли (для любого такого пересечения) следующее неравенство:

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{\operatorname{length}(\partial(K) \cap K')}{\operatorname{length}(\partial(K') \cap K)} \leqslant 3?$$

Решение задачи для произвольных прямоугольников, отличных от квадратов, было получено Ю. В. Никоноровой в работе [3], где было доказано неравенство

$$\frac{1}{3} < \frac{\operatorname{length}(\partial(K) \cap \operatorname{int}(K'))}{\operatorname{length}(\partial(K') \cap \operatorname{int}(K))} < 3.$$

В [5, с. 25] сформулирована задача Дж. В. Фике в общем виде: *Пусть K и K' произвольные конгруэнтные выпуклые множества, имеющие общие внутренние точки. Какими будут границы отношения*

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\operatorname{length}(\partial(K) \cap K')}{\operatorname{length}(\partial(K') \cap K)}?$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ, проект № НШ-921.2012.1, и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., заявка № 2012-1.1-12-000-1003-014.

Понятно, что в случае конгруэнтных кругов это отношение равно 1.

Для случая треугольников Дж. В. Фике конкретизировал общую задачу следующим образом [5, 6]: *Пусть K и K' произвольные конгруэнтные треугольники с наименьшим углом ψ. Является ли справедливым следующее неравенство*

$$\sin(\psi/2) \leqslant \frac{\operatorname{length}(\partial(K) \cap K')}{\operatorname{length}(\partial(K') \cap K)} \leqslant \frac{1}{\sin(\psi/2)}? \tag{1}$$

Замечание. В общем случае оказалось, что предположение Дж. В. Фике не верно. В частности, для равнобедренных треугольников с наименьшим углом ψ между боковыми сторонами при $2\arcsin(1/4) < \psi < \pi/3$ неравенство (1) не выполняется для некоторых расположений треугольников, дающих в пересечении четырехугольник, причем основание одного из треугольников касается боковой стороны и основания другого треугольника (рис. 1).

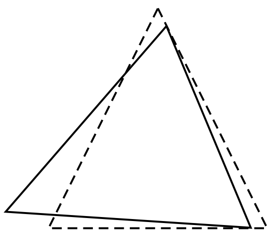

Рис. 1.

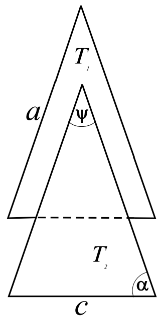

Рис. 2.

Частный случай для правильных треугольников, подтверждающий предположение Фике, рассмотрен в работе [4], в которой доказывается справедливость неравенства $1/2 \leqslant L_1/L_2 \leqslant 2$.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. *Пусть K и K' — два конгруэнтных равнобедренных пересекающихся треугольника на евклидовой плоскости с наименьшим углом $\psi \in (0, \pi/3)$, расположенным между боковыми сторонами. Пусть L_1 — длина части границы треугольника K, которая лежит во внутренности треугольника K', L_2 — длина части границы треугольника K', которая лежит во внутренности треугольника K (рис. 2). Тогда справедливо неравенство*

$$\frac{1}{Q} \leqslant \frac{L_1}{L_2} \leqslant Q,$$

где

$$Q = \begin{cases} 1/\sin(\psi/2), & 0 < \psi \leqslant 2\arcsin(1/4), \\ 3 + 4\sin(\psi/2), & 2\arcsin(1/4) \leqslant \psi < \pi/3. \end{cases}$$

Прежде, чем перейти к доказательству теоремы 1, воспользуемся обозначениями, приведенными в [1] и полученными там результатами.

На евклидовой плоскости рассматривается два произвольных выпуклых многоугольника K и K' такие, что никакая из сторон многоугольника K не параллельна ни одной из сторон многоугольника K'. Пусть теперь ψ — радианная мера наименьшего из углов многоугольника K и $\Delta = \Delta(K) = 1/\sin(\psi/2)$.

Пусть L_1 — длина части границы многоугольника K, которая лежит во внутренности многоугольника K', аналогично, L_2 — длина части границы многоугольника K', лежащая во внутренности многоугольника K. Рассмотрим вспомогательную задачу, заключающуюся *в нахождении экстремальных значений отношения* $Q = L_1/L_2$, *если многоугольник* K *остается неподвижным, а многоугольник* K' *подвергается всевозможным параллельным переносам.*

На евклидовой плоскости вводится декартова система координат так, чтобы центр масс многоугольника K имел координаты $(0,0)$. Положение многоугольника K' при этом полностью определяется координатами (x, y) его центра масс. Пусть $\Omega = \big\{(x,y) : \operatorname{int}(K \cap K') \neq \varnothing\big\}$. Граница введенного множества $\partial(\Omega)$ описывает те случаи, когда $K \cap K' = \partial(K) \cap \partial(K')$.

В [1] показано, что функция Q корректно определена и непрерывна на множестве $\Omega \cup \partial(\Omega)$ за исключением тех точек, которые соответствуют пересечениям $K \cap K'$, состоящим из общей вершины двух многоугольников. Но в окрестности таких точек величина Q ограничена сверху числом Δ.

Воспользуемся результатами, полученными Ю. В. Никоноровой и Ю. Г. Никоноровым.

Теорема A [1]. *Допустим, что в некоторой точке* $y \in \operatorname{int}(\Omega)$ *функция* Q *принимает значение, большее* Δ. *Тогда* Q *достигает своего наибольшего значения; причем среди расположений* K' *относительно* K, *на которых* Q *принимает свое максимальное значение, есть расположение со следующим свойством: граница пересечения* $\partial(K \cap K')$ *содержит по крайней мере две геометрически различные вершины многоугольников* K *и* K', *причем вершина одного из многоугольников лежит на границе другого.*

В [1] **общая задача Дж. В. Фике** переформулирована в следующем виде: *Для заданной выпуклой фигуры* K *на евклидовой плоскости определить наименьшее число* α *такое, что для любой фигуры* K', *конгруэнтной* K, *выполняется неравенство*

$$\operatorname{length}(\partial(K) \cap K') \leqslant \alpha \cdot \operatorname{length}(\partial(K') \cap K).$$

Также в работе [1] приведен алгоритм решения общей задачи Фике для выпуклого многоугольника K, обладающего осью симметрии. Приведем его краткое изложение.

Пусть угол $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $K(\varphi)$ — результат поворота многоугольника K на угол φ. Для нахождения максимального значения величины Q используется результат теоремы 1 из [1] (здесь теорема A), для применимости которой необходимо исключить рассмотрение тех углов φ, для которых у многоугольника $K(\varphi)$ есть сторона, параллельная некоторой стороне многоугольника K. Множество таких особых значений φ обозначается через Φ_0 (очевидно, что это множество конечно). Пусть теперь $\Phi_r = [0, 2\pi) \setminus \Phi_0$.

Фиксируется некоторый угол $\varphi \in \Phi_r$ и рассматривается такой параллельный перенос L, для которого граница пересечения $\partial(L(K(\varphi)) \cap K)$ содержит по крайней мере две геометрически различные вершины многоугольников $L(K(\varphi))$ и K (см. формулировку теоремы A). Далее по всем этим переносам (их конечное число) вычисляется максимум величины

$$Q_{\max}(\varphi) = \frac{\operatorname{length}\Big(\partial(K) \cap \operatorname{int}(L(K(\varphi)))\Big)}{\operatorname{length}\Big(\partial(L(K(\varphi))) \cap \operatorname{int}(K)\Big)} = \frac{\operatorname{length}\Big(\partial(K) \cap L(K(\varphi))\Big)}{\operatorname{length}\Big(\partial(L(K(\varphi))) \cap K\Big)}.$$

Пусть α_0 — верхняя грань всех значений $Q_{\max}(\varphi)$, где $\varphi \in \Phi_r$.

Теорема B [1]**.** *Число* $\alpha' = \max\{\alpha_0, \Delta\}$ *является решением задачи Дж. В. Фике для исследуемого выпуклого многоугольника* K.

Воспользуемся данным алгоритмом для решения задачи Фике для равнобедренных треугольников.

2. Решение задачи Дж. В. Фике для равнобедренных треугольников с наименьшим углом между боковыми сторонами

Обозначим длины боковых сторон равнобедренного треугольника через a, длину основания — c, ψ и α — радианную меру наименьшего из углов и углов при основании соответственно, при этом $0 < \psi < \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (случай $\psi = \alpha = \pi/3$ был рассмотрен в [4]).

Применим теорему A к случаю треугольников. Среди расположений K' относительно K, на которых Q принимает свое максимальное значение, есть расположение со следующим свойством: *граница пересечения* $\partial(K \cap K')$ *содержит по крайней мере две геометрически различные вершины треугольников* K *и* K'*, причем вершина одного из треугольников лежит на границе другого.*

Учитывая различные значения углов, под которыми пересекаются стороны треугольников, можно рассмотреть только варианты, показанные на рис. 3–6.

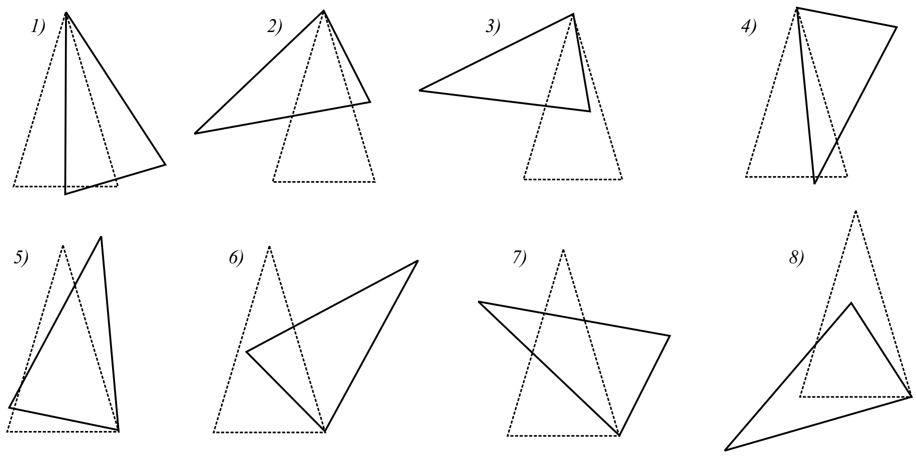

Рис. 3.

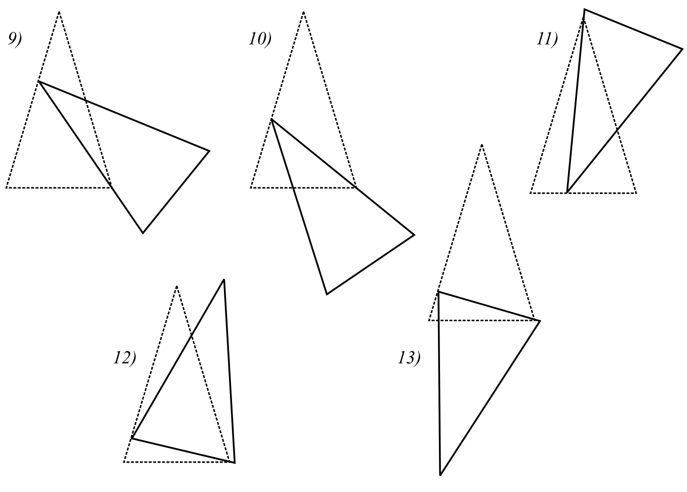

Рис. 4.

Возможны следующие варианты пересечений:

1) Одна из вершин треугольника K совпадает с одной из вершин треугольника K' (рис. 3, случаи 1–8). При этом мы предполагаем, что треугольник K отличен от треугольника K'.

2) Одна из вершин треугольника K лежит на одной из сторон треугольника K', одна из прилежащих сторон к указанной вершине треугольника K проходит через вершину треугольника K', противоположную вышеупомянутой стороне треугольника K' (рис. 4, случаи 9–13).

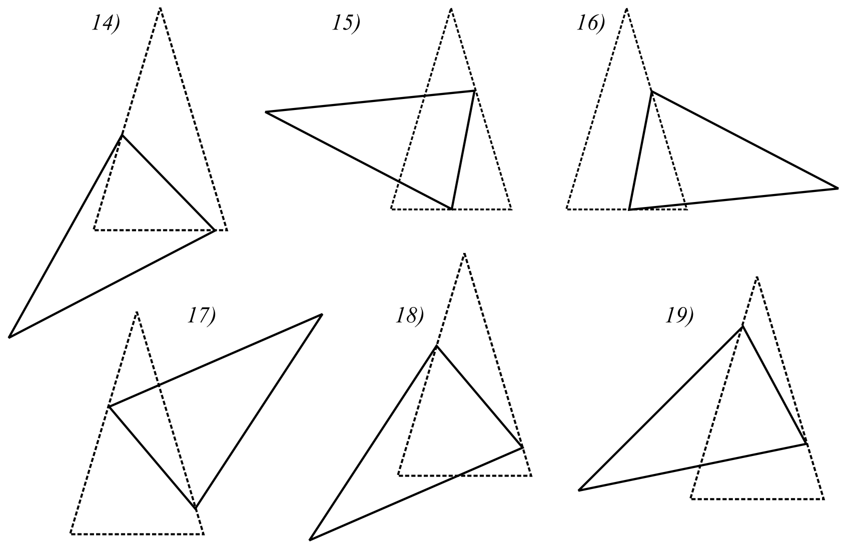

Рис. 5.

3) Вершины при основании треугольника K лежат на двух сторонах треугольника K' (рис. 5, случаи 14–19).

Понятно, что аналогичных случаев для боковых сторон нет.

4) Одна из вершин треугольника K лежит на стороне, противоположной аналогичной вершине треугольника K' и наоборот (рис. 6, случаи 20–22).

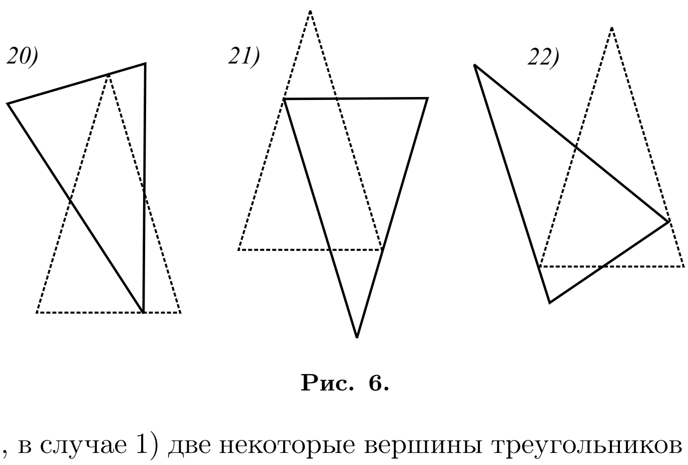

Рис. 6.

Действительно, в случае 1) две некоторые вершины треугольников K и K' совпадают (рис. 3). В случае 3) $\partial(K \cap K')$ содержит две вершины одного из треугольников K или K' (рис. 5). Остается случай, когда, например, вершина A треугольника K и вершина A' треугольника K' лежат на некоторых сторонах треугольников K' и K. Возникают следующие варианты. Пусть A, A' и т. д. и a, a' и т. д. — вершины и стороны треугольников

K и K' соответственно (одноименная вершина противоположна одноименной стороне). Возможно $A \in a'$, и $A' \in a$ — это случай 4) (рис. 6). Возможно $A \in a'$, и, например, $A' \in b$. Это варианты пересечений случая 2) (рис. 4). Возможно, например, $A \in b'$ и $A' \in b$. Но тогда также $A' \in b'$ и $A \in b$, и получим, что обе стороны b и b' лежат на прямой AA'. Данное предположение противоречит гипотезе о том, что у двух треугольников нет параллельных сторон. Если принять во внимание, что вершины лежат на основании или противоположны основаниям, а стороны являются основаниями или боковыми сторонами, то мы получим несколько подслучаев, которые далее подразделяются по тому, как рисунки геометрически выглядят. Это видно на рис. 3–6. Очевидно, нам понадобятся только случаи, где $(\operatorname{int} K) \cap (\operatorname{int} K') \neq \varnothing$.

Лемма 1. *Для пересекающихся конгруэнтных равнобедренных треугольников на евклидовой плоскости в обозначениях, приведенных выше, выполняется неравенство*

$$\sin(\psi/2) \leqslant L_1/L_2 \leqslant 1/\sin(\psi/2), \tag{2}$$

кроме вариантов расположений треугольников, для которых в пересечении получается четырехугольник, и основание одного из треугольников касается боковой стороны и основания другого треугольника (*вариант* 15, *рис.* 5).

$\lhd$ В силу равноправности треугольников достаточно доказать правую часть неравенства (2).

Очевидно, что в случаях 1, 7, 8 (рис. 3), 20 (рис. 6), фигура, полученная в пересечении, имеет ось симметрии, и $L_1 = L_2$, т. е. неравенство (2) справедливо.

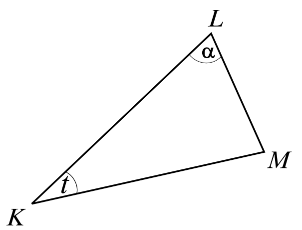

Рис. 7.

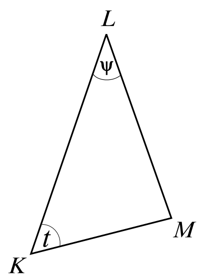

Рис. 8.

Рассмотрим варианты пересечения 3, 6 (рис. 3), 12, 13 (рис. 4), 14, 16, 17, 19 (рис. 5). Во всех вариантах в пересечении получается треугольник KLM (рис. 7). Пусть $\angle LKM = t$. Так как $\angle KLM = \alpha$, то получим следующие соотношения:

$$\frac{|KM|}{\sin\alpha} = \frac{|LM|}{\sin t} = \frac{|KL|}{\sin(\pi - (t+\alpha))}.$$

Далее, вычисляем

$$Q = \frac{|KL| + |LM|}{|KM|} = \frac{\sin(\pi - (t+\alpha)) + \sin t}{\sin\alpha} = \frac{\cos\frac{\pi - 2t - \alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} < \frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}}.$$

Последнее неравенство справедливо в силу того, что $\frac{\psi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$.

Рассмотрим варианты пересечения 2 (рис. 3), 9, 10, 11 (рис. 4). Во всех вариантах в пересечении получается треугольник KLM, у которого $\angle KLM = \psi$ (рис. 8). Пусть $\angle LKM = t$. Применяя рассуждения, аналогичные предыдущему случаю, с учетом того, что $\angle KLM = \psi$, можно показать справедливость неравенства (2).

Рассмотрим варианты пересечения 4 и 5 (рис. 3). В обоих случаях в результате пересечения получается четырехугольник $CDEF$ (рис. 9).

Из треугольника BCD получим следующие соотношения:

$$\frac{|CD|}{\sin\psi} = \frac{|BE|+|DE|}{\sin t} = \frac{|BC|}{\sin\left(\pi-(t+\psi)\right)}.$$

Учитывая, что $|BC| = a$, получим

$$|CD| = \frac{a\sin\psi}{\sin\left(\pi-(t+\psi)\right)}, \quad |BE|+|DE| = \frac{a\sin t}{\sin\left(\pi-(t+\psi)\right)}.$$

Подставляя полученные выражения, получаем неравенство (2)

$$Q = \frac{|FC|+|DE|}{|EF|+|CD|} \leqslant \frac{|BC|+|BE|+|DE|}{|CD|}$$
$$= \left(a + \frac{a\sin t}{\sin\left(\pi-(t+\psi)\right)}\right)\left(\frac{a\sin\psi}{\sin\left(\pi-(t+\psi)\right)}\right)^{-1} = \frac{\cos\frac{\pi-2t-\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}}.$$

Рассмотрим варианты пересечения 18 (рис. 5), 21, 22 (рис. 6). В этих случаях в результате пересечения рассматриваемых треугольников получается четырехугольник $KLMN$ (рис. 10).

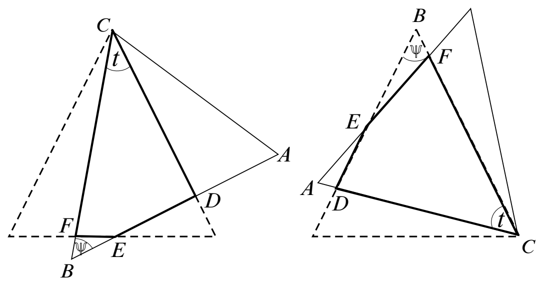

Рис. 9.

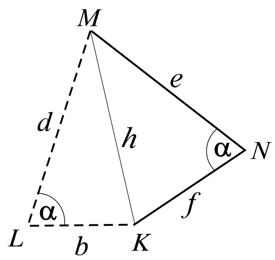

Рис. 10.

Пусть $|KL| = b$, $|LM| = d$, $|MN| = e$, $|KN| = f$, $|MK| = h$. Применяя неравенство треугольника и теорему косинусов, а также учитывая неравенства $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $-\cos\alpha > -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, получаем

$$Q = \frac{b+d}{e+f} \leqslant \frac{b+d}{h} = \frac{b+d}{\sqrt{b^2+d^2-2bd\cos\alpha}} \leqslant \frac{b+d}{\sqrt{b^2+d^2-bd}}.$$

Так как $3(b-d)^2 \geqslant 0$, то справедливо $b^2+2bd+d^2 \leqslant 4(b^2+d^2-bd)$. Тогда

$$Q \leqslant \frac{b+d}{\sqrt{b^2+d^2-bd}} \leqslant 2 < 1/\sin\left(\psi/2\right),$$

поскольку $\psi < \frac{\pi}{3}$. Таким образом, неравенство (2) справедливо. $\rhd$

Лемма 2. *Для пересекающихся конгруэнтных равнобедренных треугольников на евклидовой плоскости в обозначениях, приведенных выше, для вариантов расположений треугольников, в которых в пересечении получается четырехугольник, и основание* *одного из треугольников касается боковой стороны и основания другого треугольника (рис.* 11), *при* $0 < \psi \leqslant 2 \arcsin(1/4)$ *справедливо неравенство*

$$\sin(\psi/2) \leqslant L_1/L_2 \leqslant 1/\sin(\psi/2),$$

а при $2 \arcsin(1/4) \leqslant \psi < \pi/3$ *справедливо неравенство*

$$\frac{1}{3 + 4\sin(\psi/2)} \leqslant \frac{L_1}{L_2} \leqslant 3 + 4\sin(\psi/2). \tag{3}$$

Прежде чем перейти к доказательству леммы 2, определим выражение $Q = L_1/L_2$ для указанного варианта пересечения треугольников (рис. 11). Введем следующие обозначения: $|HF| = d$, $|DG| = e$, $|GH| = f$, $|CD| = g$, $|CF| = h$, $\angle EHG = \gamma$.

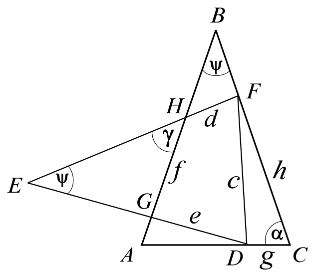

Рис. 11.

Учитывая, что $|FD| = c$, длина боковых сторон равна a, для треугольника GEH можно составить следующие соотношения:

$$\frac{f}{\sin\psi} = \frac{a-e}{\sin\gamma} = \frac{a-d}{\sin(\pi - (\psi+\gamma))}.$$

Отсюда

$$e = a - \frac{f\sin\gamma}{\sin\psi}, \quad d = a - \frac{f\sin(\pi - (\psi+\gamma))}{\sin\psi}.$$

Тогда для Q получим выражение:

$$Q = \frac{d+e+c}{f} = \frac{2a+c}{f} - \frac{\sin\left(\frac{\psi}{2}+\gamma\right)}{\sin\frac{\psi}{2}}.$$

Выразим f через c. Из треугольника DFC получим выражение

$$h = g\cos\alpha + c\cos(\psi+\gamma-\alpha), \quad g = \frac{c\sin(\psi+\gamma-\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Из подобия треугольников ADG, DFC и из треугольника BFH можно получить выражения

$$e = \frac{c(c-g)}{h}, \quad d = \frac{(a-h)\sin\psi}{\sin\gamma}.$$

Из подобия треугольников EHG, BFH и из треугольника ABC следуют равенства

$$f = \frac{d(a-e)}{a-h}, \quad a = \frac{c}{2\sin\frac{\psi}{2}}.$$

Подставляя полученные выражения в Q, получим

$$Q(\psi,\gamma)=\frac{\sin\gamma\sin\frac{\psi+\gamma}{2}(1+\sin\frac{\psi}{2})}{\sin\frac{\psi}{2}\left(\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\psi+\gamma}{2}-\cos\left(\frac{\gamma}{2}+\psi\right)\sin\psi\right)}-\frac{\sin\left(\frac{\psi}{2}+\gamma\right)}{\sin\frac{\psi}{2}}. \tag{4}$$

С учетом того, что γ изменяется в пределах $\alpha-\psi\leqslant\gamma\leqslant 2\alpha-\psi$ (рис. 12, 13) или $\frac{\pi}{2}-\frac{3\psi}{2}\leqslant\gamma\leqslant\pi-2\psi$, область определения функции $Q(\psi,\gamma)$ представлена следующим образом:

$$Q(\psi,\gamma):P\to\mathbb{R},\quad \text{где } P=\left(0;\frac{\pi}{3}\right)\times\left[\frac{\pi}{2}-\frac{3\psi}{2};\pi-2\psi\right]. \tag{5}$$

Нетрудно убедиться, что

$$Q(\psi,\pi-2\psi)=2\sin\frac{3\psi}{2}-2\sin\frac{\psi}{2}+2\cos\psi-1.$$

Найдем выражение $\Delta Q=Q(\psi,\gamma)-Q(\psi,\pi-2\psi)$, выполнив замену

$$\sin\frac{\psi}{2}=\frac{2\widetilde{\psi}}{1+\widetilde{\psi}^2},\quad \cos\frac{\psi}{2}=\frac{1-\widetilde{\psi}^2}{1+\widetilde{\psi}^2},\quad \sin\frac{\gamma}{2}=\frac{2\widetilde{\gamma}}{1+\widetilde{\gamma}^2},\quad \cos\frac{\gamma}{2}=\frac{1-\widetilde{\gamma}^2}{1+\widetilde{\gamma}^2}.$$

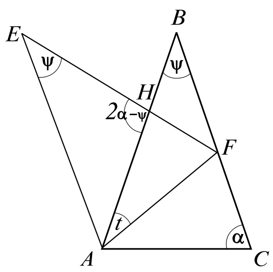

Рис. 12.

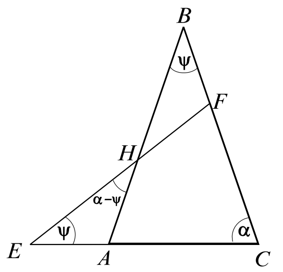

Рис. 13.

Получим следующее выражение

$$\Delta Q=\frac{2(\widetilde{\psi}^2-4\widetilde{\psi}+1)\left[(1-\widetilde{\psi}^2-2\widetilde{\psi})\widetilde{\gamma}+(1-\widetilde{\psi}^2+2\widetilde{\psi})\right]}{\left[(-\widetilde{\psi}^5+14\widetilde{\psi}^3-\widetilde{\psi})(\widetilde{\gamma}^2-1)+(\widetilde{\psi}^6+17\widetilde{\psi}^4-17\widetilde{\psi}^2-1)\widetilde{\gamma}\right]}$$
$$\times\frac{(\widetilde{\psi}^2-2\widetilde{\psi}-1)\widetilde{\gamma}+(1-\widetilde{\psi}^2-2\widetilde{\psi})}{(1-\widetilde{\psi})(1+\widetilde{\psi}^2)^3(1+\widetilde{\gamma}^2)^2}\Big[\big(\widetilde{\psi}^6+7\widetilde{\psi}^5+10\widetilde{\psi}^4-10\widetilde{\psi}^3-7\widetilde{\psi}^2-\widetilde{\psi}\big)(\widetilde{\gamma}^4+1)$$
$$+\big(\widetilde{\psi}^7+\widetilde{\psi}^6+3\widetilde{\psi}^5+3\widetilde{\psi}^4+3\widetilde{\psi}^3+3\widetilde{\psi}^2+\widetilde{\psi}+1\big)(\widetilde{\gamma}^3-\widetilde{\gamma})$$
$$+\big(2\widetilde{\psi}^7+20\widetilde{\psi}^5+14\widetilde{\psi}^4-14\widetilde{\psi}^3-20\widetilde{\psi}^2-2\big)\widetilde{\gamma}^2\Big].$$

Далее нам понадобится несколько вспомогательных утверждений. Для удобства расчетов для ψ будем рассматривать интервал $0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{3}$, тогда для $\widetilde{\psi}$ справедливо $0\leqslant\widetilde{\psi}\leqslant 2-\sqrt{3}$. Далее, в силу того, что $\frac{\pi}{2}-\frac{3\psi}{2}\leqslant\gamma\leqslant\pi-2\psi$, можно записать следующее ограничение

$$\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\psi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\psi}{4}\right)}\leqslant\widetilde{\gamma}\leqslant\frac{1-\sin\psi}{\cos\psi}.$$

Введем обозначение

$$P_1 = \left[0; 2-\sqrt{3}\right] \times \left[\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\psi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\psi}{4}\right)}; \frac{1-\sin\psi}{\cos\psi}\right]. \qquad (6)$$

Лемма 3. *Пусть $F : P_1 \to \mathbb{R}$ задается формулой $F(\widetilde{\psi},\widetilde{\gamma}) = (\widetilde{\psi}^2-2\widetilde{\psi}-1)\,\widetilde{\gamma}+(1-\widetilde{\psi}^2-2\widetilde{\psi})$. Тогда функция F неотрицательна.*

$\lhd$ Для определения знака функции F найдем знаки наибольшего и наименьшего значений в указанной области.

Найдем стационарные точки данной функции. Приравнивая частные производные $\frac{\partial F}{\partial \widetilde{\psi}}$ и $\frac{\partial F}{\partial \widetilde{\gamma}}$ к нулю, получим решение системы уравнений $(-0.41421\ldots, -0.41421\ldots)$, которое не входит в область определения функции. Таким образом, наибольшее и наименьшее значения функции достигаются на границах указанной области.

Найдем граничные значения функции F.

При $\widetilde{\psi} = 0$ имеем $F = 1-\widetilde{\gamma}$, и задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений функции при $\sqrt{2}-1 \leqslant \widetilde{\gamma} \leqslant 1$. Очевидно, что на рассматриваемом интервале экстремумов нет. Находим значения функции на границах:

$$F_{\max}(\widetilde{\gamma})|_{\widetilde{\psi}=0} = 2-\sqrt{2}, \quad F_{\min}(\widetilde{\gamma})|_{\widetilde{\psi}=0} = 0.$$

Аналогично находим при $\widetilde{\psi} = 2-\sqrt{3}$ наибольшее и наименьшее значения функции $F = 2\widetilde{\gamma}(1-\sqrt{3}) + 6\sqrt{3} - 10$ на интервале $0 \leqslant \widetilde{\gamma} \leqslant 2-\sqrt{3}$:

$$F_{\max}(\widetilde{\gamma})|_{\widetilde{\psi}=2-\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}-10 \approx 0.39230\ldots, \quad F_{\min}(\widetilde{\gamma})|_{\widetilde{\psi}=2-\sqrt{3}} = 0.$$

Поскольку все найденные значения функции F неотрицательны, то $F \geqslant 0$. $\rhd$

Лемма 4. *Пусть $G : P_1 \to \mathbb{R}$ (см. 6) задается формулой*

$$G(\widetilde{\psi},\widetilde{\gamma}) = (-\widetilde{\psi}^5 + 14\widetilde{\psi}^3 - \widetilde{\psi})(\widetilde{\gamma}^2-1) + (\widetilde{\psi}^6 + 17\widetilde{\psi}^4 - 17\widetilde{\psi}^2 - 1)\,\widetilde{\gamma}.$$

Тогда функция G неположительна.

$\lhd$ Для определения знака функции G найдем знаки наибольшего и наименьшего значений в указанной области.

Найдем стационарные точки данной функции. Приравнивая частные производные $\frac{\partial G}{\partial \widetilde{\psi}}$ и $\frac{\partial G}{\partial \widetilde{\gamma}}$ к нулю, получим решение данной системы уравнений

$$(-i, i), \quad (-4.37836\ldots, -14.79100\ldots).$$

Первое решение представляет собой комплексные значения, а вторая пара значений не входит в область определения. Таким образом, наибольшее и наименьшее значение функции достигается на границах указанной области.

Найдем граничные значения функции G.

При $\widetilde{\psi} = 0$ функция $G = -\widetilde{\gamma}$, и задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений функции G при $\sqrt{2}-1 \leqslant \widetilde{\gamma} \leqslant 1$. Очевидно, что экстремумов нет, поэтому находим значения функции на границах:

$$G_{\max}(\widetilde{\gamma})|_{\widetilde{\psi}=0} = 1-\sqrt{2}, \quad G_{\min}(\widetilde{\gamma})|_{\widetilde{\psi}=0} = -1.$$

Аналогично находим при $\widetilde{\psi} = 2-\sqrt{3}$ наибольшее и наименьшее значения функции $G = 64\widetilde{\gamma}(45-26\sqrt{3})$ при $0 \leqslant \widetilde{\gamma} \leqslant 2-\sqrt{3}$.

$$G_{\max}(\widetilde{\gamma})|_{\widetilde{\psi}=2-\sqrt{3}} = 0, \quad G_{\min}(\widetilde{\gamma})|_{\widetilde{\psi}=2-\sqrt{3}} = 64\cdot(168-97\sqrt{3}) \approx -0.57141\ldots$$

Поскольку все найденные значения функции G неположительны, то $G \leqslant 0$. $\rhd$

Лемма 5. *Пусть* $H : P_1 \to \mathbb{R}$ *(см. (6)) задается формулой*

$$\begin{aligned} H = (\widetilde{\psi}^6 + 7\widetilde{\psi}^5 + 10\widetilde{\psi}^4 - 10\widetilde{\psi}^3 - 7\widetilde{\psi}^2 - \widetilde{\psi})(\widetilde{\gamma}^4+1) \\ +(\widetilde{\psi}^7 + \widetilde{\psi}^6 + 3\widetilde{\psi}^5 + 3\widetilde{\psi}^4 + 3\widetilde{\psi}^3 + 3\widetilde{\psi}^2 + \widetilde{\psi} + 1)(\widetilde{\gamma}^3 - \widetilde{\gamma}) \\ +(2\widetilde{\psi}^7 + 20\widetilde{\psi}^5 + 14\widetilde{\psi}^4 - 14\widetilde{\psi}^3 - 20\widetilde{\psi}^2 - 2)\widetilde{\gamma}^2. \end{aligned}$$

Тогда функция H *неположительна.*

$\lhd$ Для определения знака функции H найдем знаки наибольшего и наименьшего значений в указанной области.

Найдем стационарные точки данной функции. Приравнивая частные производные $\frac{\partial H}{\partial \widetilde{\psi}}$ и $\frac{\partial H}{\partial \widetilde{\gamma}}$ к нулю, получим решения данной системы уравнений:

$$(-i, i),\ (-5.78105\ldots,\ 30.92276\ldots),\ (-1,1),\ (-1,-1).$$

Первое решение представляет собой комплексные значения, а остальные точки не входят в область определения. Таким образом, наибольшее и наименьшее значение функции достигается на границах указанной области. Найдем граничные значения функции H.

При $\widetilde{\psi} = 0$ функция примет вид $H = \widetilde{\gamma}^3 - 2\widetilde{\gamma}^2 - \widetilde{\gamma}$, и задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений функции H при $\sqrt{2}-1 \leqslant \widetilde{\gamma} \leqslant 1$. Нетрудно проверить, что экстремумов нет на рассматриваемом интервале, поэтому находим значения функции на границах:

$$H_{\max}(\widetilde{\gamma})|_{\widetilde{\psi}=0} = 8\sqrt{2} - 12 \approx -0.68629\ldots, \quad H_{\min}(\widetilde{\gamma})|_{\widetilde{\psi}=0} = -2.$$

При $\widetilde{\psi} = 2-\sqrt{3}$ функция примет вид

$$H = 64\cdot(71-41\sqrt{3})(\widetilde{\gamma}^4 + 4\widetilde{\gamma}^2 + 1) + 64\cdot(123-71\sqrt{3})\,\widetilde{\gamma}\,(\widetilde{\gamma}^2 - 1),$$

и задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений функции H при $0 \leqslant \widetilde{\gamma} \leqslant 2-\sqrt{3}$:

$$H_{\max}(\widetilde{\gamma})|_{\widetilde{\psi}=2-\sqrt{3}} = 64\cdot(71-41\sqrt{3}) \approx -0.90132\ldots,$$

$$H_{\min}(\widetilde{\gamma})|_{\widetilde{\psi}=2-\sqrt{3}} = 1536\cdot(989-571\sqrt{3}) \approx -1.55300\ldots$$

Поскольку все найденные значения функции H неположительны, то $H \leqslant 0$. $\rhd$

Лемма 6. *Функция* $Q(\psi,\gamma) : P \to \mathbb{R}$ *(см. (4), (5)) для произвольного значения угла* $\psi \in (0, \pi/3)$ *наибольшее значение достигает при* $\gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{3\psi}{2}$*, а наименьшее при* $\gamma = \pi - 2\psi$*.*

$\lhd$ Запишем выражение $\Delta Q = Q(\psi,\gamma) - Q(\psi, \pi-2\psi)$, используя обозначения, приведенные в леммах 3, 4 и 5,

$$\Delta Q = \frac{2\,FH(\widetilde{\psi}^2 - 4\widetilde{\psi} + 1)\left[(1-\widetilde{\psi}^2 - 2\widetilde{\psi})\widetilde{\gamma} + (1-\widetilde{\psi}^2 + 2\widetilde{\psi})\right]}{G(1-\widetilde{\psi})(1+\widetilde{\psi}^2)^3(1+\widetilde{\gamma}^2)^2}.$$

Нетрудно проверить, что $\widetilde{\psi}^2 - 4\widetilde{\psi} + 1$ неотрицательно при $0 \leqslant \widetilde{\psi} \leqslant 2 - \sqrt{3}$.

Выражение $(1 - \widetilde{\psi}^2 - 2\widetilde{\psi})\widetilde{\gamma} + (1 - \widetilde{\psi}^2 + 2\widetilde{\psi})$ неотрицательно при $0 \leqslant \widetilde{\psi} \leqslant 2 - \sqrt{3}$, поскольку значения в обеих скобках неотрицательны и $\widetilde{\gamma} \geqslant 0$.

В леммах 3, 4 и 5 получены неравенства $F \geqslant 0$, $G \leqslant 0$, $H \leqslant 0$ соответственно.

Очевидно, что для остальных множителей, входящих в знаменатель выражения ΔQ, при $0 \leqslant \widetilde{\psi} \leqslant 2 - \sqrt{3}$ справедливы неравенства

$$1 - \widetilde{\psi} \geqslant 0, \quad (1 + \widetilde{\psi}^2)^3 \geqslant 0, \quad (1 + \widetilde{\gamma}^2)^2 \geqslant 0.$$

Таким образом, учитывая, что в выражение для ΔQ входят два неположительных множителя (остальные неотрицательные), имеем

$$\Delta Q = Q(\psi, \gamma) - Q(\psi, \pi - 2\psi) \geqslant 0.$$

Данное неравенство подтверждает, что функция $Q(\psi, \gamma)$ убывает по второй переменной в рассматриваемой области P. Следовательно, наименьшее значение достигается при $\gamma = \pi - 2\psi$ (рис. 12) и равно

$$Q_{\min} = Q(\psi, \pi - 2\psi) = 2\sin\frac{3\psi}{2} - 2\sin\frac{\psi}{2} + 2\cos\psi - 1.$$

Это значение также можно получить из случая 6 (рис. 3), для которого при $t = \alpha - \psi$

$$Q = \frac{\cos\frac{\pi - 2t - \alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Для данного случая пересечения треугольников была доказана справедливость неравенства (2).

Наибольшее значение достигается при $\gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{3\psi}{2}$ (рис. 13) и равно

$$Q_{\max} = Q\left(\psi, \frac{\pi}{2} - \frac{3\psi}{2}\right) = 3 + 4\sin\frac{\psi}{2}. \ \triangleright$$

Доказательство леммы 2. В силу равноправности треугольников достаточно доказать правые части неравенств (2) и (3).

По лемме 6 наибольшее значение для $Q = L_1/L_2$ для вариантов пересечений треугольников, приведенных на рис. 11, равно $Q_1 = 3 + 4\sin(\psi/2)$.

Для остальных возможных вариантов пересечений треугольников по лемме 1 найдено значение $Q_2 = 1/\sin(\psi/2)$. Приравнивая полученные выражения Q_1 и Q_2, получим значение угла $\psi = 2\arcsin\frac{1}{4}$.

Возьмем $\psi = 2\arcsin\frac{1}{4} - \tau$, где $0 < \tau \leqslant 2\arcsin\frac{1}{4}$. Тогда

$$\begin{aligned} Q_1 &= 3 + 4\sin\frac{2\arcsin\frac{1}{4} - \tau}{2} = 3 + \cos\frac{\tau}{2} - \sqrt{15}\sin\frac{\tau}{2} \\ &= \frac{(3 + \cos\frac{\tau}{2} - \sqrt{15}\sin\frac{\tau}{2})(\cos\frac{\tau}{2} - \sqrt{15}\sin\frac{\tau}{2})}{\cos\frac{\tau}{2} - \sqrt{15}\sin\frac{\tau}{2}} \leqslant \frac{(3 + \cos\frac{\tau}{2})\cos\frac{\tau}{2}}{\cos\frac{\tau}{2} - \sqrt{15}\sin\frac{\tau}{2}} \\ &\leqslant \frac{4}{\cos\frac{\tau}{2} - \sqrt{15}\sin\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{\sin\left(\arcsin\frac{1}{4} - \frac{\tau}{2}\right)} = Q_2. \end{aligned}$$

Таким образом, при $0 < \psi \leqslant 2\arcsin\frac{1}{4}$ выполняется $Q_1 \leqslant Q_2$, т. е. справедливо неравенство (2).

Поскольку при $2\arcsin\frac{1}{4}\leqslant\psi<\frac{\pi}{3}$ величина $Q_2=\frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}}$ находится в пределах $2<Q_2\leqslant 4$, а для $Q_1=3+4\sin\frac{\psi}{2}$ границы равны $4\leqslant Q_1<5$, то для данного диапазона значений угла ψ справедливо $Q_2\leqslant Q_1$, т. е. справедливо неравенство (3). $\rhd$

Доказательство теоремы 1 следует из лемм 1, 2. $\rhd$

Таким образом, по теореме B решением задачи Дж. В. Фике для равнобедренных треугольников с наименьшим углом ψ между боковыми сторонами является число $\alpha'=\max\{3+4\sin{(\psi/2)}, 1/\sin(\psi/2)\}$.

Автор признателен профессору Ю. Г. Никонорову и профессору Эндре Макаи, мл. (Endre Makai, Jr.) за полезные советы и обсуждения задачи Дж. В. Фике.

Литература

1. *Никоноров Ю. Г., Никонорова Ю. В.* Об одном подходе к решению задачи Дж. В. Фике о пересекающихся конгруэнтных многоугольниках // Владикавк. мат. журн.—Т. 13, вып. 4.—С. 52–59.
2. *Никоноров Ю. Г., Никонорова Ю. В.* Применение системы Maple к решению геометрических задач: Учебное пособие, 2-е изд. доп.—Рубцовск: Изд-во Алтайского гос. ун-та, 2005.—80 с.
3. *Никонорова Ю. В.* Об одной экстремальной задаче на евклидовой плоскости // Мат. труды.—2001.—Т. 4, № 1.—С. 111–121.
4. *Рассказова Н. В.* Задача Дж. В. Фике для треугольников // Изв. АГУ. Спец. вып., посвященный пятилетию краевой конф. по математике.—Барнаул: Изд-во Алтайского гос. ун-та, 2002.—С. 26–28.
5. *Croft H. T., Falconer K. J., Guy R. K.* Unsolved problems in geometry. Corrected reprint.—Berlin: Springer-Verlag, 1994.—xvi+198 p.
6. *Fickett J. W.* Overlapping congruent convex bodies // Amer. Math. Monthly.—1980.—Vol. 87.—P. 814–815.

Статья поступила 18 мая 2011 г.

Рассказова Наталья Владимировна
Рубцовский индустриальный институт
(филиал) ФГБОУ ВПО Алтайский государственный
технический университет им. И. И. Ползунова,
старший преподаватель кафедры прикладной математики
РОССИЯ, 658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6
E-mail: `ras_na@mail.ru`

J. W. FICKETT'S PROBLEM FOR ISOSCELES TRIANGLES

Rasskazova N. V.

Two congruent overlapping isosceles triangles with the least angle between lateral sides are considered in the Euclidean plane. J. W. Fickett offered a bilateral estimation for the relation of the length of the part of the first triangle's boundary in the second triangle to the length of the part of the second triangle's the boundary in the first triangle. The paper shows that J. W. Fickett's supposition is not true in general. An analog of J. W. Fickett's estimation is proved for the isosceles triangles with the least angle between lateral sides.

Key words: Euclidean plane, convex polygons, J. W. Fickett's problem, inequalities.