Владикавказский математический журнал
2012, Том 14, Выпуск 4, С. 83–94

УДК **517.928**

СИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ[1]

А. Б. Шабат

Рассматриваются векторные поля, первыми интегралами для которых являются симметрические многочлены. Установлена связь полученных динамических систем с теорией многофазных решений солитонных моделей математической физики.

Ключевые слова: теорема Лиувилля, симметрические многочлены, инварианты Римана, солитонные уравнения.

1. Введение

Матрицей Якоби в $\mathbb{R}^n$ мы называем невырожденную $n \times n$ матрицу $A(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, с элементами a_{ij}, удовлетворяющими условиям

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} \quad (\forall\, i,\ j,\ k). \tag{1.1}$$

Нам понадобится следующий упрощенный вариант теоремы Лиувилля, связывающей в теории динамических систем первые интегралы с инфинитезимальными симметриями.

Теорема 1. *Пусть $B = (A^\intercal)^{-1}$, где $A = A(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, — матрица Якоби в $\mathbb{R}^n$. Тогда формула $\hat{D} = B\nabla$, где $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)^\intercal$ — вектор-столбец, составленный из дифференцирований $\partial_j = \partial/\partial x_j$, определяет n коммутирующих векторных полей в $\mathbb{R}^n$:*

$$\hat{D}_i = b_{i1}\partial_1 + \ldots + b_{in}\partial_n, \quad [\hat{D}_i, \hat{D}_j] = 0. \tag{1.2}$$

$\lhd$ Условия (1.1) обеспечивают замкнутость дифференциальных форм $\sum_j a_{ij}\, dx_j$ и существование локальной системы координат $\hat{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x})$:

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \hat{x}_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \tag{1.3}$$

в которой $d\hat{x} = A(x)\, dx$ и

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \hat{x}_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} = \sum_{j=1}^n a_{ji} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} \ \Leftrightarrow\ \nabla = A^\intercal \hat{D}. \tag{1.4}$$

[1] Работа выполнена в рамках Программы Российской академии наук «Нелинейная динамика» при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 10-01-00088, № 11-01-12018-0ФИ-М-2011, № 2012-1.5-12-000-1003-011, и Программы поддержки ведущих научных школ России, проект № НШ-5377.2012.2.

Другими словами,

$$d\hat{x} = A(x)\,dx \;\Leftrightarrow\; \hat{D} = B(x)\cdot\nabla$$

и дифференциальные операторы (1.2) совпадают с дифференцированиями $\hat{\partial}_j = \partial/\partial\hat{x}_j$ в новой системе координат (1.3). ▷

Замечание 1. Координатные функции φ_j, $j = 1,\dots,n$, из формулы (1.3) задают *максимальный набор* из n первых интегралов любой из динамических систем, связанных с векторными полями (1.2), т. е.

$$\hat{D}_i(\varphi_j) = \sum_1^n b_{ik}\partial_k(\varphi_j) = \sum_1^n b_{ik}a_{kj} = \delta_i^j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{1.5}$$

Из приведенного выше доказательства теоремы 1 видно, что условия (1.1) являются не только достаточными, но и необходимыми для коммутирования дифференциальных операторов (1.2), построенных по невырожденной матрице $B(x)$. Так как

$$B = (A^{\mathsf{T}})^{-1} \;\Leftrightarrow\; A = (B^{\mathsf{T}})^{-1}\,, \tag{1.6}$$

то матрица первых интегралов A восстанавливается по матрице коммутирующих векторных полей B по *одной и той же формуле.*

2. Конечномерная формулировка модели

Выбрав в формуле (1.3) в качестве функций φ_j, $j = 1,\dots,n$, подходящие симметрические многочлены, и вычислив матрицу Якоби A, мы рассмотрим здесь свойства динамических систем, соответствующих векторным полям (1.5).

Рассмотрим сначала один из примеров такого векторного поля, соответствующий выбору в качестве первых интегралов элементарных симметрических многочленов.

Пример 1. Пусть

$$D_0 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{P'(x_j)}\frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{2.1}$$

где

$$P(\lambda) = \prod_{k=1}^n (\lambda - x_k) = \lambda^n + g_1\lambda^{n-1} + \ldots + g_n \tag{2.2}$$

— многочлен степени n с единичным старшим коэффициентом. Тогда

$$D_0P(\lambda) = D_0\prod_{k=1}^n(\lambda - x_k) = -\sum_{j=1}^n D_0(x_j)\prod_{k\neq j}^n(\lambda - x_k)$$

и, следовательно,

$$D_0P(\lambda)\big|_{\lambda=x_j} = -D_0(x_j)P'(x_j) = -1, \quad j = 1,\dots,n, \;\Leftrightarrow\; D_0(P) \equiv -1,$$

так как степень многочлена $D_0(P)$ равна $n-1$. Другими словами,

$$D_0(g_1) = \ldots = D_0(g_{n-1}) = 0, \quad D_0(g_n) = -1,$$

и, сравнив с (1.2), мы убеждаемся, что векторное поле D_0 соответствует выбору в качестве φ_j, элементарных симметрических многочленов

$$g_1 = -\sum x_i, \quad g_2 = \sum_{i<j} x_i x_j, \quad g_3 = -\sum_{i<j<k} x_i x_j x_k, \ldots \tag{2.3}$$

В частности, при $n = 3$, соответствующая векторному полю D_0 динамическая система, имеет вид

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)}, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)}, \quad \dot{x}_3 = \frac{1}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}. \tag{2.4}$$

Именно так эволюционируют корни многочлена третьей степени при $\dot{P}(x) = -1$.

3. Уравнения для корней

Векторные поля, коммутирующие с векторным полем (2.1), зависят, очевидно, от выбранного семейства симметрических многочленов. Оказывается удобным, для построения этого коммутирующего семейства, заменить элементарные симметрические многочлены (2.3) на суммы степеней, играющих роль координатных функций в формуле (1.3). Очевидно, что при

$$\hat{x}_m = \frac{1}{m} \sum x_j^m, \quad m = 1, \ldots, n,$$

матрица Якоби A совпадает с матрицей Вандермонда и

$$A^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ & & \ldots & \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Можно проверить, что в этом случае матрица $B = (A^{\mathsf{T}})^{-1}$ имеет следующий вид:

$$B = \begin{bmatrix} g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & \cdots & g_{n-1}^n \\ g_{n-2}^1 & g_{n-2}^2 & \cdots & g_{n-2}^n \\ & & \cdots & \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'(x_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P'(x_2) & \ldots & 0 \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & P'(x_n) \end{bmatrix}^{-1}, \tag{3.1}$$

где

$$g_i^j \stackrel{\text{def}}{=} g_i(x_1, \ldots, x_n)\big|_{x_j=0}. \tag{3.2}$$

Следовательно, последняя строка обратной матрицы B дает по-прежнему векторное поле (2.1), а следующим строкам соответствуют

$$D_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{g_i^j}{P'(x_j)} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i = 1,\ 2, \ldots, n-1. \tag{3.3}$$

Например, предпоследней строке матрицы (3.1) соответствует векторное поле

$$D_1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{g_1^j}{P'(x_j)} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad g_1^j = -\sum_{k \neq j} x_k.$$

Для построения зависящих от произвольных функций $r_j = r_j(x_j)$ решений, рассматриваемых ниже уравнений (см. пример 2), мы будем использовать следующую модификацию матрицы Вандермонда

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ & & \dots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2(x_2) & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & r_n(x_n) \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Нетрудно проверить, что справедливо утверждение:

Лемма 2. *При произвольном выборе функций $r_j(x_j)$, $j = 1, \dots, n$:*

(i) Матрица A из формулы (3.4) удовлетворяет условиям (1.1);

(ii) Для векторных полей D_0 и D_i, построенным по строкам матрицы $B = (A^{\mathsf{T}})^{-1}$, справедливы соотношения (ср. (3.2)):

$$\begin{cases} D_0(P)\Big|_{\lambda=x_j} = -D_0(x_j)P'(x_j) = \frac{-1}{r_j(x_j)}; \\ D_i(P)\Big|_{\lambda=x_j} = -D_i(x_j)P'(x_j) = \frac{-g_i^j}{r_j(x_j)}, \end{cases} \qquad P = P(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda - x_j). \tag{3.5}$$

Так как степень многочленов $D_0(P)$ и $D_i(P)$ равна $n-1$, то значения в n точках x_j полностью их определяют. Сравнив значения указанных многочленов в этих точках, мы получаем

Теорема 2. *В условиях леммы 1 выполняются соотношения*

$$D_m(P) = \langle P_m, P\rangle \overset{\text{def}}{=} P_m D_0(P) - P D_0(P_m), \qquad m = 1, \dots, n-1. \tag{3.6}$$

При этом

$$P_m(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \lambda^m + g_1\lambda^{m-1} + \dots + g_m \Rightarrow P_m(x_j) = g_m^j, \tag{3.7}$$

$$D_n(P_m) - D_m(P_n) = \langle P_n, P_m\rangle \quad (\forall\, n, m). \tag{3.8}$$

В качестве примера перепишем уравнения (3.6) при $m = 1$ в терминах коэффициентов g_j многочлена (2.2) произвольной степени $n > 1$. Так как $m = 1$ и $P_1 = x + g_1$, то степень многочлена $\langle P_1, P\rangle$ равна $n-1$ и, приравняв его коэффициенты коэффициентам многочлена $D_1(P)$ той же степени, мы получаем

$$D_1(g_1) = D_0(g_2), \quad D_1(g_2) = D_0(g_3) + \langle g_1, g_2\rangle, \dots, D_1(g_n) = \langle g_1, g_n\rangle, \tag{3.9}$$

где, как и в теореме, $\langle a, b\rangle = aD_0(b) - bD_0(a)$ обозначает «вронскиан» функций a, b. С другой стороны, полагая $x = x_j$ в тех же уравнениях (3.6), мы получаем при $m = 1$

$$\left[D_1 + \left(\sum_{k\neq j} x_k\right) D_0\right](x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{3.10}$$

Замена динамических переменных

$$x_j,\ j = 1, \dots, n,\ \Leftrightarrow\ g_j,\ j = 1, \dots, n, \tag{3.11}$$

связывает эти две формы уравнений (3.6).

Рассматривая приложения приведенных выше уравнений, мы заменяем коммутирующие векторные поля D_0 и D_j, $j = 1, 2, 3, \dots$, дифференцированиями по независимым переменным x и t_j

$$D_0 \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_j \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t_j}, \quad \langle a,\ b\rangle = ab_x - ba_x. \tag{3.12}$$

Аналогичные (3.10) уравнения для корней x_j переходят при этом в системы гиперболических уравнений, записанные в инвариантах Римана, а аналогичные (3.9) уравнения для симметрических многочленов g_j дают, как будет показано ниже, законы сохранения этих гиперболических систем.

Замечание 2. Так как при произвольных функциях f, g, зависящих от некоторого набора независимых переменных $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots)$, $t_0 \equiv x$, мы имеем

$$[fD_0, gD_0] = fD_0 \circ gD_0 - gD_0 \circ fD_0 = \langle f, g\rangle D_0, \quad \langle f, g\rangle = fD_0(g) - gD_0(f),$$

то уравнения (3.8) из теоремы 3 можно записывать в виде коммутационных соотношений

$$[D_m - P_m(\lambda, \mathbf{t})D_0, D_n - P_n(\lambda, \mathbf{t})D_0] = 0, \quad n, m \geqslant 1. \tag{3.13}$$

Пример 2. Возвращаясь к уравнениям (3.10), рассмотрим гиперболическую систему уравнений

$$u_t + (v + w)u_x = 0, \quad v_t + (w + u)v_x = 0, \quad w_t + (u + v)w_x = 0, \tag{3.14}$$

которая совпадает с (3.10) при $n = 3$ с точностью до обозначений. В зависимости от выбора вспомогательных функций r_j в формуле (3.4) мы получаем для отыскания трех искомых функций $u(x,t)$, $v(x,t)$, $w(x,t)$ следующие функциональные соотношения:

$$\begin{cases} u + v + w = \varepsilon = \text{const}; \\ u^2 + v^2 + w^2 = 2t; \\ u^3 + v^3 + w^3 = 3x, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} f(u) + g(v) + h(w) = \varepsilon = \text{const}; \\ uf'(u)\,du + vg'(v)\,dv + wh'(w)\,dw = dt; \\ u^2 f'(u)\,du + v^2 g'(v)\,dv + w^2 h'(w)\,dw = dx. \end{cases}$$

Первый случай является вырожденным, так как соответствует тривиальному выбору $r_j = 1$, и приводит лишь к частным решениям с алгебраическими особенностями типа ветвления. С другой стороны, выбирая во второй формуле подходящим образом вспомогательные функции f, g, h, можно исследовать широкий класс точных решений рассматриваемой системы уравнений (3.14). Законы сохранения этой гиперболической системы записываются в терминах симметрических многочленов от динамических переменных следующим образом:

$$\begin{cases} D_t(g_1) = D_x(g_2), \quad g_1 = -u - v - w, \quad g_2 = uv + uw + vw, \\ D_t(g_1^2 - g_2) = \frac{1}{3} D_x(g_1^3 + u^3 + v^3 + w^3). \end{cases} \tag{3.15}$$

Общая конструкция этих законов сохранения указана ниже в теореме 4.

4. Солитонные уравнения

Переход (3.11) от корней x_j к элементарным симметрическим многочленам приводит, как указано в теореме 2, к уравнениям (3.6), (3.8), которые фактически не зависят от степени n исходного многочлена (3.5). Тем не менее предельный переход $n \to \infty$ приводит к замене многочлена $P(\lambda)$ формальным рядом

$$G(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \lambda^{-n} P(\lambda) = 1 + \frac{g_1}{\lambda} + \ldots + \frac{g_n}{\lambda^n} + \ldots = \sum_0^\infty g_k \lambda^{-k}, \quad g_0 = 1, \tag{4.1}$$

и существенно расширяет область приложений излагаемой теории. Интересно отметить, что классические формулы Ньютона, связывающие степенные суммы корней с элементарными симметрическими многочленами также не меняются при увеличении степени n многочлена $P(\lambda)$. Например, при любом $n \geqslant 4$ мы имеем

$$\begin{cases} \sum x_j^2 = g_1^2 - 2g_2, & \sum x_j^3 = -g_1^3 - 3g_3 + 3g_1g_2, \\ g_1 = -\sum x_j, & \sum x_j^4 = g_1^4 - 4g_4 + 2g_2^2 + 4g_1g_3 - 4g_1^2g_2, \end{cases} \tag{4.2}$$

и предельный переход $n \to \infty$ здесь возможен, если соответствующие ряды сходятся.

Очевидно, что на коммутационные соотношения (3.13) и уравнения (3.8) предельный переход $n \to \infty$ не влияет. Нетрудно проверить далее (см., например, [8]), что производящей функцией становится теперь формальный ряд (4.1), удовлетворяющий (ср. (3.6)), уравнению

$$D_m(G) = \langle G_m, G \rangle, \quad G_m(\lambda) = \lambda^m + g_1\lambda^{m-1} + \ldots + g_m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.3}$$

эквивалентному коммутационным соотношениям (3.13), записанным в виде (см. замечание к теореме 3):

$$D_n(G_m) - D_m(G_n) = \langle G_n, G_m \rangle \quad (\forall\ n, m). \tag{4.4}$$

Первое достижение, от замены последовательности многочленов (3.5) степени $n \to \infty$ формальным рядом (4.1), заключается в адекватной реализации и уточнении нашего изначального утверждения (теорема 1) о взаимосвязи коммутирующих векторных полей и законов сохранения для интегрируемых динамических систем:

Теорема 3. *Производящей функцией для законов сохранения уравнений* (4.4) *является формальный ряд* $H(\lambda) = 1/G(\lambda)$*:*

$$H(\lambda) = 1 + \frac{h_1}{\lambda} + \frac{h_2}{\lambda^2} + \ldots, \quad h_1 = -g_1, \quad h_2 = g_1^2 - g_2, \quad h_3 = -g_3 + 2g_1g_2 - g_1^3, \ldots \tag{4.5}$$

$\lhd$ Дифференцируя $H(\lambda) = 1/G(\lambda)$, получаем в силу уравнения (4.3), что при любом $m \geqslant 0$

$$D_m(H) = -H^2 \left(G_m D_0 \frac{1}{H} - \frac{1}{H} D_0 G_m \right) = D_0(G_m \cdot H). \tag{4.6}$$

Таким образом, мы доказали, что коэффициенты h_j формального ряда (4.5) являются плотностями законов сохранения рассматриваемых уравнений:

$$D_m(\rho) = D_0(\sigma). \ \rhd \tag{4.7}$$

В полиномиальном случае, т. е. при конечном n, теорема 4 дает набор законов сохранения (4.7) гиперболических систем из предыдущего параграфа (см. (3.15)). Для того чтобы записать плотности $h_i(x_1, \ldots, x_n)$ найденных законов сохранения в инвариантах Римана достаточно воспользоваться формулами Ньютона (4.2). Например,

$$h_1 = x_1 + \ldots + x_n, \quad h_2 = \frac{1}{2} \sum x_k^2 + \frac{1}{2} h_1^2, \ldots$$

Отметим, что, пользуясь формулами (4.2), мы всегда можем выразить коэффициенты ряда (4.5), по крайней мере формально, через степенные суммы корневых переменных x_k.

С теоретической точки зрения теорема 4, гарантирующая наличие «богатого» набора законов сохранения у рассматриваемых эволюционных уравнений, исчерпывает вопрос об интегрируемости бесконечномерной динамической системы (4.3). Однако, при построении частных решений при помощи, изложенной в предыдущем разделе схемы, встает вопрос о подходящем выборе дополнительной диагональной матрицы в формуле (3.4), гарантирующем не только локальную, но и глобальную разрешимость уравнений типа (3.14) (ср. [2]). В такой общей формулировке задача о глобальной разрешимости мало изучена и относится скорее к теории гиперболических уравнений. Мы изложим здесь вкратце результаты относящиеся к случаю, когда диагональная матрица в формуле (3.4) удовлетворяет условиям

$$r_j(x_j) = \frac{1}{r(x_j)} \quad (\forall\, j = 1, \ldots, n), \tag{4.8}$$

обеспечивающим инвариантность динамической системы, отвечающей векторному полю D_0 (ср. (2.4)), относительно перестановок корней.

Лемма 2. *Вспомогательной линейной задачей для динамической системы, отвечающей векторному полю D_0, при выполнении условий (4.8), является дифференциальное уравнение третьего порядка*

$$G_{xxx} = 4UG_x + 2U_xG \tag{4.9}$$

с произвольным потенциалом $U = U(x, \lambda)$ вида

$$U(x, \lambda) = \lambda^m + u_1(x)\lambda^{k-1} + \ldots + u_m(x). \tag{4.10}$$

$\lhd$ В полиномиальном случае, обозначив $P = P(x, \lambda) = \lambda^n G(x, \lambda)$, в результате умножения уравнения (4.9) на $2P$ и последующего интегрирования по независимой переменной x мы получаем, связав константу интегрирования с заданной функцией $r(\lambda)$ из формулы (4.8), что

$$4U(x)P^2 + P_x^2 - 2PP_{xx} = r^2(\lambda), \quad P = \prod_{j=1}^{n} \big(\lambda - x_j(x)\big). \tag{4.11}$$

Полагая в полученном уравнении второго порядка $\lambda = x_j$, находим, что

$$P_x\big|_{\lambda = x_j} = -D_0(x_j)P'(x_j) = \pm r(x_j) \quad (\forall\, j),$$

где P_x и P' обозначают производные от многочлена $P = P(x, \lambda)$ по x и λ соответственно. Сравнение этой формулы с (3.5) завершает доказательство. $\rhd$

Замечание 3. В дополнение к лемме 2, отметим, что вспомогательная линейная задача позволяет выразить коэффициенты g_i формального ряда (4.1) в виде дифференциальных многочленов от коэффициентов u_j потенциала (4.10) уравнения (4.9). Например, в случае спектральной задачи Шредингера с потенциалом $U(x, \lambda) = u(x) - \lambda$ подстановка в уравнение (4.9) формального ряда (4.1) приводит к рекуррентной формуле

$$g_{n+1} = \frac{1}{4}\left(-D_0^2 + 4u - 2D_0^{-1}u_x\right) g_n, \quad U = u - \lambda,$$

которая при $4UG^2 + G_x^2 - 2GG_x = -4\lambda$ (ср. (4.11)), дает

$$g_1 = \frac{1}{2}u, \quad g_2 = \frac{1}{8}(3u^2 - u_{xx}), \quad g_3 = \frac{1}{32}(u_{xxxx} - 10uu_{xx} - 5u_x^2 + 10u^3), \dots \tag{4.12}$$

В случае квадратичного по λ потенциала (4.10), соответствующего спектральной задаче Захарова — Шабата, аналогичные формулы для первых трех g_i имеют следующий вид:

$$g_1 = -\frac{1}{2}u_1, \quad g_2 = \frac{3}{8}u_1^2 - u_2, \quad g_3 = -\frac{1}{8}\left(u_{1,xx} + 10u_1^3 - 12u_1u_2\right). \tag{4.13}$$

Связь спектральной задачи с потенциалом $U = U(x,\lambda)$:

$$\psi_{xx} = U(x,\lambda)\psi, \tag{4.14}$$

с уравнением (4.9) и производной Шварца устанавливается следующим образом:

Лемма 3. *Пусть ψ_1, ψ_2 — линейно независимые решения линейного дифференциального уравнения второго порядка* (4.14). *Тогда*

(i) *функция $\varphi = \psi_1/\psi_2$ удовлетворяет уравнению с производной Шварца:*

$$\frac{3\varphi_{xx}^2}{4\varphi_x^2} - \frac{\varphi_{xxx}}{2\varphi_x} = U(x); \tag{4.15}$$

(ii) *функции*

$$\phi_1 = \psi_1^2, \quad \phi_2 = \psi_2^2, \quad \phi_3 = \psi_1\psi_2 \tag{4.16}$$

образуют фундаментальную систему решений линейного уравнения третьего порядка (4.9)*;*

(iii) *функция $\Phi = \phi_3 = \psi_1\psi_2$ удовлетворяет уравнению*

$$4U(x)\Phi^2 + \Phi_x^2 - 2\Phi\Phi_{xx} = w^2, \quad w = \langle\psi_1, \psi_2\rangle. \tag{4.17}$$

$\lhd$ Обозначим $f_j = \psi_{j,x}/\psi_j$. Тогда

$$\varphi_x = \frac{\langle\psi_2, \psi_1\rangle}{\psi_2^2} = \frac{w}{\psi_2^2}, \quad \frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x} = -2\frac{\psi_{2x}}{\psi_2} = -2f_2,$$

и, таким образом, уравнение (4.15) является следствием уравнения Риккати $f_{2,x}+f_2^2 = U$, которому удовлетворяют логарифмические производные ψ_x/ψ решений уравнения (4.14).

Прямое вычисление вронскиана трех функций ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 дает

$$W = \det\langle\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \vec{\phi}_3\rangle = (\psi_1\psi_{2,x} - \psi_2\psi_{1,x})^3 = w^3.$$

Следовательно, $W = \mathrm{const} \neq 0$ и функции ϕ_i линейно независимы. Далее, нетрудно проверить, что

$$\frac{w}{\phi_3} = f_2 - f_1, \quad \frac{\phi_{3,x}}{\phi_3} = f_2 + f_1, \tag{4.18}$$

и, следовательно,

$$f_1 = \frac{\phi_{3,x} - w}{2\phi_3}, \quad f_2 = \frac{\phi_{3,x} + w}{2\phi_3}.$$

Подставив найденные выражения для f_j через $\phi_3 = \Phi$ в уравнение Риккати, мы приходим к уравнению (4.17). Легко видеть, что линейное уравнение (4.9) получается из (4.11) дифференцированием по x. Аналогично проверяется, что функции ϕ_1, ϕ_2 удовлетворяют уравнению (4.17) с $w = 0$. $\rhd$

Лемма 2 остается в силе и для потенциалов более общего вида

$$U(x,\lambda) = \lambda^m + u_1(x)\lambda^{m-1} + \ldots + u_m(x) + v_1(x)\frac{1}{\lambda} + v_2(x)\frac{1}{\lambda^2} + \ldots \tag{4.19}$$

Предположение о полиномиальности по λ потенциала $U(x,\lambda)$ приводит автоматически, в силу соотношения (4.11), к полиномиальности функции $r^2(\lambda)$, стоящей в правой части уравнения (4.11)[2]. Вопрос о регулярности решений динамической системы, отвечающей векторному полю D_0, сводится при этом к формулировке подходящих алгебраических требований на многочлен $r^2(\lambda)$. В соответствии с леммой 3 (ср. уравнения (4.17) и (4.11)) эти требования допускают также формулировку в терминах структуры спектра соответствующей спектральной задачи. В случае $U(x,\lambda) = u(x) - \lambda$ эта интересная задача хорошо изучена (см., например, [1, 4]).

В заключение этого раздела мы остановимся кратко на взаимосвязи бесконечномерной динамической системы (4.3) с основными иерархиями солитонных уравнений. Как уже отмечалось, подстановка производящей функции $G(\lambda)$ в виде бесконечного формального ряда (4.1) в дифференциальные уравнения (4.9) и (4.11) леммы 2 позволяет выразить коэффициенты g_i формального ряда (4.1) в виде дифференциальных многочленов от коэффициентов u_j потенциала (4.10) уравнения (4.9). Остается, грубо говоря, подставить найденные выражения для g_i (см. замечание 1) в исходные уравнения (4.3) или эквивалентные им

$$D_m(g_j) = \sum_{k=1}^{j} \langle g_{j-k}, g_{m+k} \rangle. \tag{4.20}$$

Затем можно переписать полученные уравнения в терминах u_j. Цепочка формул

$$u_j \ \mapsto \ g_j \mapsto \ x_j \tag{4.21}$$

позволяет также, по крайней мере в принципе, получить корневые представления для коэффициентов u_j потенциала, используя классические формулы Ньютона (4.2).

Пример 3. В случае спектральной задачи Шредингера формулы (4.12) дают уравнение КдФ:

$$D_1 g_1 = D_0 g_2 \ \Leftrightarrow \ u_t = (u_{xx} - 3u^2)_x = u_{xxx} - 6uu_x, \quad D_t = -4D_1. \tag{4.22}$$

Формулы (4.21), связывающие потенциал $u = u(t,x)$ с корнями x_j, приводят нас к полезной формуле

$$u(t,x) = 2g_1(t,x) = -2\sum x_j(t,x).$$

Интересно, что известные осцилляционные теоремы для линейного уравнения Шредингера, позволяют доказать [3], что для уравнения (4.22) в процессе столкновения уединенных волн амплитуда не превосходит максимальной из амплитуд сталкивающихся солитонов.

Дополнительные уравнения $D_n(g_1) = D_0(g_{n+1})$, $n = 2, 3, \ldots$, из системы (4.20) дают здесь, вместе с уравнением (4.22), КдФ-иерархию совместных друг с другом эволюционных уравнений. Первое из этих дополнительных уравнений записывается в силу формулы (4.12) следующим образом:

$$D_2(g_1) = D_0(g_3) \ \Leftrightarrow \ 16D_2(u) = D_0(u_{xxxx} - 10uu_{xx} - 5u_x^2 + 10u^3).$$

[2] Это уравнение является следствием уравнения (4.9) и его первым интегралом.

Замечание 4. Нетрудно показать (ср. замечание 3), что при заданном потенциале $U(x,\lambda)$ вида (4.19), решение линейного уравнения третьего порядка (4.9) в виде формального степенного ряда единственно, с точностью до умножения на формальный ряд по обратным степеням λ с постоянными коэффициентами. Эта неоднозначность учитывается при переходе от уравнения (4.9) к билинейному уравнению (4.11) (ср. (4.17)) появлением в правой части этого уравнения нормировочного множителя $r^2(\lambda)$. Решение билинейного уравнения (4.11) в виде формального степенного ряда (4.1), таким образом, единственно, но зависит от выбора правой части $r^2(\lambda)$. В формулах типа (4.12) мы всюду, чтобы устранить указанный произвол, выбираем в качестве основной формы билинейного уравнения следующую:

$$4UG^2 + G_x^2 - 2GG_{xx} = 4\lambda^m, \quad G = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j}{\lambda^j}, \tag{4.23}$$

где λ^m соответствует старшему члену потенциала вида (4.19). Это избавляет нас от появления младших членов в формулах, связывающих g_i с коэффициентами u_j из (4.19). Отметим, что замена $H = 1/G$ и переход к производящей функции законов сохранения несколько упрощают вычисления, связанные с билинейным уравнением (4.23), и приводят его к виду[3]:

$$\frac{3}{4}\frac{H_x^2}{H^2} - \frac{1}{2}\frac{H_{xx}}{H} + \lambda^m H^2 = U, \quad H = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h_j}{\lambda^j}. \tag{4.24}$$

Это помогает также выразить плотности h_j законов сохранения из теоремы 3 в терминах потенциала (4.19).

Пример 4. В случае квадратичного потенциала $U = \lambda^2 + \lambda u_1 + u_2$ первые две из формул (4.13) устанавливают взаимно однозначное соответствие между g_i, $i = 1, 2$, и u_i, $i = 1, 2$. Это позволяет заменить u_i на g_i, $i = 1, 2$, в уравнении (4.23) и переписать формулы (4.13) в следующем виде $g_3 = 3g_1g_2 - 2g_1^3 + \frac{1}{4}\, g_{1,xx}$, $D_1(g_1) = D_0(g_2)$. Так как $D_1 g_2 = D_0 g_3 + \langle g_1, g_2\rangle$, то обозначив $D_1 = D_t$, $g_1 = q_x$, $g_2 = q_t$, мы получаем уравнение второго порядка по t, допускающее вариационную формулировку:

$$q_{tt} = \frac{1}{4} q_{xxxx} - 6\, q_x^2 q_{xx} + 4\, q_x q_{tx} + 2\, q_t q_{xx} \;\Leftrightarrow\; \delta \int dt\, dx\, \Phi(q_t, q_{xx}, q_x) = 0 \tag{4.25}$$

с плотностью лагранжиана

$$\Phi = \frac{1}{2}\left(q_t^2 + \frac{1}{4} q_{xx}^2 + q_x^4 - 2q_t q_x^2 \right).$$

Развитая теория преобразований этого лагранжиана охватывает широкий круг задач, включая цепочку Тоды, модель Гейзенберга и разнообразные модификации нелинейного уравнения Шредингера (см. [7, 10]).

Аналогично предыдущему, в случае

$$4UG^2 + G_x^2 - 2GG_{xx} = 4\lambda, \quad U = \lambda + u + \frac{v}{\lambda}, \tag{4.26}$$

обратив замену (4.21) и выразив u и v через g_i, $i = 1, 2$, мы находим

$$u = -2g_1, \quad v = -2g_2 + \frac{1}{2}\, g_{1,xx} + 3g_1^2; \quad g_3 = \frac{1}{4}\, q_{xxt} + 3q_x q_t - \frac{1}{4}\, q_x q_{xxx} - \frac{1}{8}\, q_{xx}^2 - 2q_x^3,$$

[3] Связь (4.23) с производной Шварца из уравнения (4.15) становится здесь очевидной.

где, как и выше, $g_1 = q_x$, $g_2 = q_t$. Несложно проверить теперь, что уравнение $D_1 g_2 = D_0 g_3 + \langle g_1, g_2 \rangle$ приводит в данном случае к вариационной задаче:

$$\delta \int dt\, dx\, \Phi(q_t, q_{xxx}, q_{xx}, q_x) = 0, \quad \Phi = \frac{1}{2}\left(q_t^2 - \frac{1}{4}\, q_x q_{xx}^2 - \frac{1}{4}\, q_t q_{xxx} + q_x^4 - 2q_t q_x^2\right). \tag{4.27}$$

Сопоставив леммы 2 и 3, мы можем заменить вспомогательную линейную задачу в виде уравнения третьего порядка (4.9) спектральной задачей (4.14). Условия совместности лаксовой пары уравнений

$$D_0^2 \psi = U\psi, \quad D_m(\psi) = G_m D_0(\psi) - \frac{1}{2}\, \psi D_0(G_m), \quad D_0 = \frac{\partial}{\partial x}, \tag{4.28}$$

записывается, очевидно, в следующем виде

$$D_m(U) = 2D_0(G_m)U + D_0(U)G_m - \frac{1}{2} D_0^3(G_m), \quad m = 1,\, 2, \ldots, \tag{4.29}$$

где коэффициенты многочлена $G_m(\lambda) = \lambda^m + g_1 \lambda^{m-1} + \ldots + g_m$ по-прежнему находятся из уравнения (4.9). Таким образом, эволюционное уравнение (4.29) для потенциала $U(\lambda)$ получается исключением из лаксовой пары ψ-функции перекрестным дифференцированием, в то время как *эквивалентное* ему (4.3) полным исключением потенциала из рассматриваемых уравнений. Эти две формы, различных на первый взгляд эволюционных уравнений, отличаются только выбором динамических переменных (ср. [7]) и, например, в рассмотренном выше случае (4.26), уравнение (4.29) при $m = 1$ дает удобную систему уравнений (ср. [5])

$$2u_t = \frac{1}{2}\left(u_{xx} - 3u^2 + 4v\right)_x, \quad 2v_t + uv_x + 2u_x v = 0, \tag{4.30}$$

мало похожую на вариационную задачу (4.27). В частности, второе из уравнений (4.30) показывает, что рассматриваемая система обладает дополнительным законом сохранения с нестандартной плотностью $\sqrt{v}$.

5. Заключение

Одним из результатов данной работы является разработка общей и вполне однозначной процедуры сведения солитонных уравнений, соответствующих спектральной задаче (4.14) с потенциалом (4.19), к бесконечномерной динамической системе, закодированной в уравнениях (4.3).

Дальнейшее развитие теории [9] связано с отказом в уравнениях (4.4) от формальных рядов и замены уравнений (4.3) уравнением

$$D_\mu G(\lambda) = \frac{\langle G(\lambda), G(\mu) \rangle}{\lambda - \mu}, \quad D_\mu \overset{\text{def}}{=} D_0 + \sum_1^\infty D_m \mu^{-m}, \tag{5.1}$$

где $\langle a, b \rangle := ab_x - ba_x$ обозначает вронскиан функций a, b. Так как

$$\frac{1}{\lambda - \mu} = -\frac{1}{\mu}\, \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = -\frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^k}{\mu^k} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\mu}\, G_1(\lambda) + \frac{1}{\mu^2}\, G_2(\lambda) + \ldots = \frac{1}{\mu - \lambda}\, G(\mu),$$

то уравнение (4.3) является одним из следствий (5.1):

$$D_\mu G(\lambda) = -\left\langle G(\lambda), 1 + \frac{1}{\mu} G_1(\lambda) + \frac{1}{\mu^2} G_2(\lambda) + \ldots \right\rangle.$$

Литература

1. *Drach U.* Sur l'integration par quadratures de l'equation differentielle $y'' = [\varphi(x) + h]\ y$ // Compt. Rend. Acad. Sci.—1919.—Vol. 168.—P. 337–340.
2. *Рождественский Б. Л., Сидоренко А. Д.* О невозможности «градиентной катастрофы» для слабо-линейных систем // Вычислительная математика и мат. физика.—1967.—Т. 7, № 5.—С. 1176–1179.
3. *Шабат А. Б.* О потенциалах с нулевым коэффициентом отражения // Динамика сплошной среды.—1970.—Т. 5.—Р. 130–145.
4. *Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.* Нелинейные уравнения типа Кортевега де Фриза, конечнозначные линейные операторы и абелевы многообразия // Успехи мат. наук.—1976.—Т. 31, № 1.—С. 55–136.
5. *Ito M.* Symmetries and conservation laws of a coupled nonlinear wave equation // Phys. Lett. A.—1982.—Vol. 91.—P. 335–338.
6. *Ferapontov E.* Integration of weakly nonlinear hydrodynamic systems in Riemann invariants // Phys. Lett. A.—1991.—Vol. 158.—P. 112–118.
7. *Адлер В. Э., Марихин В. Г., Шабат А. Б.* Канонические преобразования Бэклунда и лагранжевы цепочки // Теорет. и мат. физика.—2001.—Т. 129, № 2.—С. 163–183.
8. *Martínez Alonso L., Shabat A. B.* Towards a theory of differential constraints of a hydrodynamic hierarchy // J. Non. Math. Phys.—2003.—Vol. 10, № 2.—P. 229–242.
9. *Адлер В. Э., Шабат А. Б.* Модельное уравнение теории солитонов // Теорет. и мат. физика.—2007.—Т. 153, № 1.—Р. 29–45.
10. *Шабат А. Б.* Symmetries of spectral problems // Lecture Notes in Physics.—2009.—Vol. 767, № 1.—P. 139–173.
11. *Габиев Р. А., Шабат А. Б.* О расширениях КдФ иерархии // Исследования по математическому анализу, дифференц. уравнениям и их приложениям / Ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2010.—С. 227–233.—(Итоги науки. Юг России. Мат. форум. Т. 4).

Статья поступила 30 ноября 2012 г.

Шабат Алексей Борисович
Карачаево-Черкесский государственный университет,
профессор кафедры математического анализа
РОССИЯ, 357190, Карачаевск, ул. Ленина, 29;

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН,
главный научный сотрудник
РОССИЯ, 142432, г. Черноголовка, пр. Ак. Семенова, д. 1-А
E-mail: shabatab@mail.ru

SYMMETRICAL POLYNOMIALS AND CONSERVATION LAWS

Shabat A. B.

Vector fields with symmetrical polynomials as the first integrals are considered. The connection of these dynamical systems with the theory of multi-phase solutions of the solitonic models of mathematical physics is established.

Key words: Liouville therem, symmetric polynomials, Riemann invariants, solitonic equations.