Владикавказский математический журнал
2012, Том 14, Выпуск 4, С. 10–18

УДК **517.983**

ОБРАЩЕНИЕ И ОПИСАНИЕ ОБРАЗОВ ПОТЕНЦИАЛОВ С ОСОБЕННОСТЯМИ ЯДЕР НА СФЕРЕ[1]

А. В. Гиль, В. А. Ногин

В рамках метода аппроксимативных обратных операторов (АОО), строится обращение обобщенных потенциалов Стрихарца с плотностями из пространства Харди H^1 в неэллиптическом случае, когда их символы вырождаются на множестве меры нуль в $\mathbb{R}^n$. Дается также описание образов этих операторов.

Ключевые слова: свертка, осциллирующий символ, образ, мультипликатор, метод аппроксимативных обратных операторов.

1. Введение. В работе рассматриваются обобщенные потенциалы Стрихарца

$$M_\theta^\beta \varphi = m_\theta^\beta * \varphi \tag{1}$$

с ядрами

$$m_\theta^\beta(y) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \theta(|y|)\big(1-|y|^2\big)_+^{\beta-1}, \quad \beta \geqslant 0,$$

и плотностями из пространства Харди H^1 (при $\beta = 0$ правая часть (1) понимается в смысле аналитического продолжения, см. (22)). Здесь $\theta(r)$ — гладкая функция, называемая характеристикой оператора M_θ^β.

Эти операторы играют важную роль в различных вопросах функционального анализа и математической физики (см. [1–7]).

В рамках метода аппроксимативных обратных операторов (АОО) строится обращение потенциалов (1) с плотностями из пространства Харди H^1 в неэллиптическом случае, когда их символы вырождаются на множестве меры нуль в $\mathbb{R}^n$. Дается также описание образа $M_\theta^\beta(H^1)$ в терминах обращающих конструкций.

В частности, в случае, когда $\theta(r) \equiv 1$, указанный символ имеет вид

$$\widehat{m^\beta}(x) = (2\pi)^{n/2} 2^{\beta-1} |x|^{1-\beta-n/2} J_{\beta-1+n/2}(|x|) \tag{2}$$

(см. [1]) и вырождается на бесконечном объединении сфер в $\mathbb{R}^n$.

В настоящее время имеется ряд работ по обращению и описанию потенциалов с L^p-плотностями и особенностями ядер на сфере в неэллиптическом случае, когда их символы вырождаются на множестве нулевой меры в $\mathbb{R}^n$ (см. [3–6]).

Случай потенциалов с плотностями из H^1 ранее не рассматривался. Между тем, этот случай оказался более трудным и потребовал применения более «тонкой» техники.

© 2012 Гиль А. В., Ногин В. А.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.A18.21.0356.

В частности, это относится к использованию неравенства Фефффермана (вместо неравенства Гёльдера, как это делалось в [3–5]), а также теорем 1, 2 о Фурье-мультипликаторах в H^1, сформулированных ниже.

2. Обозначения. Пусть $(Ff)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i\xi x}\,dx$ — преобразование Фурье функции f; $(F^{-1}f)(\xi) = \tilde{f}(\xi) = (2\pi)^{-n}(Ff)(-\xi)$ — обратное преобразование Фурье; $\mathscr{S}$ — класс Шварца быстро убывающих гладких функций; $\mathscr{S}'$ — пространство обобщенных функций медленного роста; $C_0(\mathbb{R}^n) = \{f : f \in C(\mathbb{R}^n),\ f(\infty) = 0\}$; $W_\varepsilon\varphi = w_\varepsilon * \varphi$ — интеграл Гаусса — Вейерштрасса, где $w_\varepsilon(x) = (4\pi\varepsilon)^{-n/2}e^{-|x|^2/(4\varepsilon)}$ $(\hat{w}_\varepsilon(\xi) = e^{-\varepsilon|\xi|^2})$; Φ, Ψ — пространства П. И. Лизоркина: $\Psi = \{\psi \in \mathscr{S} :\ (D^\nu\psi)(0) = 0,\ |\nu| = 0, 1, \dots\}$, $\Phi = \{\varphi \in \mathscr{S} : \hat{\varphi} \in \Psi\}$.

3. Некоторые пространства функций и распределений. Через $H^1 = H^1(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество всех $\mathscr{S}'$-распределений таких, что $f^+(x) = \sup_{0<\varepsilon<\infty} |(f * \varphi_\varepsilon)(x)| \in L^1$, где $\varphi \in \mathscr{S}$ и $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx \neq 0$, $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$, $(f * \varphi_\varepsilon)(x) = \langle f, \varphi_\varepsilon(x - \cdot)\rangle$. Положим $\|f\|_{H^1} = \|f^+\|_{L^1}$ (см. [8, 9, главы 3–4]).

Заметим, что $H^1 \subset L^1$ и оператор вложения непрерывен (см. [9, с. 112]). Отметим также, что класс Φ плотен в H^1, см. [9, с. 128].

Через $BMO = BMO(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество всех локально интегрируемых функций, для которых

$$\|f\|_{BMO} = \sup_B \left\{ \frac{1}{|B|} \int\limits_B |f(x) - f_B|\,dx \right\} < \infty,$$

где $f_B = \frac{1}{|B|}\int_B f(x)\,dx$ и супремум берется по всем шарам B из $\mathbb{R}^n$ (см. [9, глава 4]). Заметим, что пространство BMO является сопряженным к H^1 (см. [9, с. 142]).

При доказательстве теоремы 4 существенно используется неравенство Фефффермана (см. [10]): если $f \in H^1$, $g \in BMO$ и $fg \in L^1$, то

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx \right| \leqslant C\|f\|_{H^1}\|g\|_{BMO}. \tag{3}$$

В дальнейшем нам понадобиться следующая

Теорема 1 [11, с. 167]. *Пусть $k = [n/2] + 1$. Если $m(\xi)$ ограниченная функция класса $C^k(R^n \setminus \{0\})$ и $\left|D^\alpha m(\xi)\right| \leqslant \left(A|\xi|^{-1}\right)^{|\alpha|}$, при $|\alpha| \leqslant k$ и $A \geqslant 1$, то оператор свертки с ядром $\widetilde{m}(x)$ ограничен в пространстве H^1.*

Ниже будет также использована следующая

Теорема 2 [2, с. 284]. *Пусть*

$$m_b^\pm(|\xi|) = v(|\xi|^2)|\xi|^{-b}e^{\pm i|\xi|}, \quad b > 0,$$

где $v(r) \in C^\infty(0, \infty)$, $0 \leqslant v(r) \leqslant 1$; $v(r) = 0$, если $r \leqslant 1$ и $v(r) = 1$, если $r \geqslant 2$. Тогда оператор свертки с ядром $F^{-1}(m_b^\pm(|\xi|))(x)$ ограничен в пространстве H^1 тогда и только тогда, когда $b \geqslant (n-1)/2$.

4. О пространствах Φ_V, Ψ_V типа Лизоркина. Пусть V — произвольное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. Через Ψ_V обозначим класс всех функций из $\mathscr{S}$, которые исчезают вместе со всеми своими производными на V:

$$\Psi_V = \left\{\psi(x) \in \mathscr{S} :\ D^k\psi(x) = 0,\ x \in V,\ |k| = 0, 1, 2, \dots\right\}.$$

Обозначим через Φ_V пространство прообразов Фурье функций из Ψ_V: $\Phi_V = F^{-1}(\Psi_V)$.

Пространства Ψ_V, Φ_V в случае, когда $V = \{0\}$ либо V — совокупность координатных гиперплоскостей были введены и изучены П. И. Лизоркиным в [12, 13]. Случай произвольного замкнутого множества нулевой меры был изучен С. Г. Самко в [14, 15] (см. также [16, § 2.4]).

5. Равномерное асимптотическое разложение функции Бесселя $J_\nu(z)$. Пусть $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ и $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| > \eta, \ |\arg z| < \theta\}$, где $\eta > 0$, $\theta \in (0, \pi/2)$. Представляя $J_\nu(z)$ в виде линейной комбинации функции Ганкеля $H^{(1)}_{\pm\nu}(z)$ и $H^{(2)}_{\pm\nu}(z)$ (где берется $+\nu$, если $\nu > -1/2$ и $-\nu$ в противном случае) и применяя результаты [17, с. 220], получаем для $z \in \Omega$ равенство

$$J_\nu(z) = \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{-1/2}\left[e^{-iz}\left(\sum_{l=0}^{N} C^{(\nu)}_{l,-} z^{-l} + R^{(\nu)}_{N,-}(z)\right) + e^{iz}\left(\sum_{l=0}^{N} C^{(\nu)}_{l,+} z^{-l} + R^{(\nu)}_{N,+}(z)\right)\right], \quad (4)$$

где $C^{(\nu)}_{0,\pm} = \frac{1}{2} e^{\mp(i\pi/4)(2\nu+1)}$,

$$R^{(\nu)}_{N,\pm}(z) = \frac{B^{\pm}_N}{z^{N+1}} \cdot Q^{(\nu)}_{N,\pm}(z),$$

$$Q^{(\nu)}_{N,\pm}(z) = \int\limits_0^1 (1-t)^N dt \int\limits_0^{\infty\cdot\mathbf{exp}(i\alpha)} e^{-u} u^{\nu+N+1/2}\left(1 - \frac{ut}{2iz}\right)^{\nu-N-\frac{3}{2}} du.$$

6. Обращение потенциалов M^β_θ с H^1-плотностями. Заметим, что оператор M^β_θ ограничен в пространстве H^1. Это утверждение легко выводится из [18, теорема 3].

Воспользуемся идеей обращения потенциалов с символами (2) из [7]. Обращение потенциала $f = M^\beta_\theta \varphi$, $\varphi \in H^1$, в неэллиптическом случае будем строить в виде

$$T^\beta_\theta f = \overset{(H^1)}{\lim_{\varepsilon\to 0}} \ \overset{(L^2)}{\lim_{\delta\to 0}} T^\beta_{\theta,\varepsilon,\delta} f, \quad (5)$$

где

$$T^\beta_{\theta,\varepsilon,\delta} f = F^{-1}\left(\frac{\overline{\widehat{m^\beta_\theta}(|\xi|)} \ e^{-\varepsilon|\xi|^2}}{|\widehat{m^\beta_\theta}(|\xi|)|^2 + i\delta}\right) * f,$$

$$\widehat{m^\beta_\theta}(|\xi|) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^1 \rho^{n-1}(1-\rho^2)^{\beta-1}\theta(\rho)\, d\rho \int\limits_{S^{n-1}} e^{i\rho(\xi\cdot\sigma)}\, d\sigma.$$

Здесь мы рассматриваем наиболее общий характер вырождения символа $\widehat{m^\beta_\theta}(|\xi|)$, предполагая, что $\operatorname{mes}\{\xi : \ \widehat{m^\beta_\theta}(|\xi|) = 0\} = 0$.

Следующая теорема дает обращение потенциалов $M^\beta_\theta \varphi$, $\varphi \in H^1$.

Теорема 3. *Пусть $\beta > 0$ и $\varphi \in H^1$. Тогда*

$$\left(T^\beta_\theta M^\beta_\theta \varphi\right)(x) = \varphi(x), \quad (6)$$

где T^β_θ — оператор (5); предел по H^1-норме в (5) можно заменить пределом почти всюду.

◁ Будем основываться на равенстве

$$(T^\beta_{\theta,\varepsilon,\delta} M^\beta_\theta \varphi)(x) = (W_\varepsilon \varphi)(x) - i\delta(N^\beta_{\theta,\varepsilon,\delta} W_{\frac{\varepsilon}{2}} \varphi)(x), \quad \varepsilon, \delta > 0, \quad (7)$$

где

$$N^{\beta}_{\theta,\varepsilon,\delta}f = F^{-1}\left(n^{\beta}_{\theta,\varepsilon,\delta}(\xi)\right) * f \equiv F^{-1}\left(\frac{e^{\frac{-\varepsilon|\xi|^2}{2}}}{|\widehat{m^{\beta}_{\theta}}(|\xi|)|^2 + i\delta}\right) * f.$$

Для функций $\varphi \in \Phi$ равенство (7) проверяется переходом к преобразованиям Фурье. Это равенство распространяется по ограниченности на все пространство H^1, с учетом того, что операторы в обеих частях (7) ограничены в H^1 (ограниченность операторов $T^{\beta}_{\theta,\varepsilon,\delta}$ и $N^{\beta}_{\theta,\varepsilon,\delta}$ в H^1 доказывается с помощью теоремы 1). Следовательно, равенство (7) справедливо для любой функции $\varphi \in H^1$.

Учитывая, что $W_{\varepsilon}\varphi \to \varphi$ при $\varepsilon \to 0$ по H^1-норме или почти всюду (см. [9, с. 127]), формула (6) будет следовать из равенства:

$$\lim_{\delta\to 0} \delta \left\|(N^{\beta}_{\theta,\varepsilon,\delta} W_{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi)(x)\right\|_{L^2} = 0, \quad \varphi \in H^1. \tag{8}$$

Докажем (8). Применяя равенство Парсеваля, получаем

$$\delta^2 \left\|(N^{\beta}_{\theta,\varepsilon,\delta} W_{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi)(x)\right\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta^2 e^{\frac{-\varepsilon|\xi|^2}{2}}}{|\widehat{m^{\beta}_{\theta}}(|\xi|)|^4 + \delta^2} \left|(\widehat{W_{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi})(\xi)\right|^2 d\xi \to 0 \tag{9}$$

при $\delta \to 0$, с учетом того, что

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\delta^2 e^{\frac{-\varepsilon|\xi|^2}{2}}}{|\widehat{m^{\beta}_{\theta}}(|\xi|)|^4 + \delta^2} \left|(\widehat{W_{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi})(\xi)\right|^2 = 0, \quad \xi \notin \left\{\xi : \widehat{m^{\beta}_{\theta}}(|\xi|) = 0\right\}.$$

Предельный переход (9) обосновывается применением мажорантной теоремы Лебега с учетом оценки

$$\frac{\delta^2 e^{\frac{-\varepsilon|\xi|^2}{2}}}{|\widehat{m^{\beta}_{\theta}}(|\xi|)|^4 + \delta^2} \left|(\widehat{W_{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi})(\xi)\right|^2 \leqslant e^{\frac{-\varepsilon|\xi|^2}{2}} \left|(\widehat{W_{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi})(\xi)\right|^2 \in L_1.$$

Здесь мы существенно использовали тот факт, что $W_{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi \in L^2$, если $\varphi \in H^1 \subset L^1$. Кроме того, мы учли, что функция

$$\overline{\widehat{m^{\beta}_{\theta}}(|\xi|)} e^{\frac{-\varepsilon|\xi|^2}{2}} \Big/ \left(\left|\widehat{m^{\beta}_{\theta}}(|\xi|)\right|^2 + i\delta\right)$$

является 2-мультипликатором. $\rhd$

7. Описание образа $M^{\beta}_{\theta}(H^1)$. Основной результат статьи содержится в следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть* $\beta > 0$. *Тогда*

$$M^{\beta}_{\theta}(H^1) = \left\{f \in H^1 : T^{\beta}_{\theta} f \in H^1\right\},$$

где T^{β}_{θ} *— оператор* (5).

$\lhd$ Вложение

$$M^{\beta}_{\theta}(H^1) \subset \left\{f \in H^1 : T^{\beta}_{\theta} f \in H^1\right\} \tag{10}$$

вытекает из ограниченности оператора M^{β}_{θ} в пространстве H^1 и теоремы 3.

Докажем вложение

$$M_\theta^\beta(H^1) \supset \left\{ f \in H^1 : T_\theta^\beta f \in H^1 \right\}, \tag{11}$$

обратное к (10). Пусть функция $\omega \in \mathscr{S}$ такова, что $\widehat{\omega}(\xi) = 0$ в некоторой окрестности множества $V = \{\xi : \widehat{m_\theta^\beta}(|\xi|) = 0\}$ (следовательно, $\omega \in \Phi_V$).

Имеем

$$\left\langle M_\theta^\beta T_\theta^\beta f, \omega \right\rangle = \left\langle T_\theta^\beta f, \overline{M_\theta^\beta} \omega \right\rangle = \left\langle \overset{(H^1)}{\lim_{\varepsilon\to 0}} \overset{(L^2)}{\lim_{\delta\to 0}} T_{\theta,\varepsilon,\delta}^\beta f, \overline{M_\theta^\beta}\omega \right\rangle, \tag{12}$$

где $\overline{M_\theta^\beta}$ — оператор свертки с символом $\overline{\widehat{m_\theta^\beta}(|\xi|)}$. С учетом (12) и неравенства Феффермана (3), получаем

$$\begin{aligned} \left\langle M_\theta^\beta T_\theta^\beta f, \omega \right\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0} \left\langle \overset{(L^2)}{\lim_{\delta\to 0}} T_{\theta,\varepsilon,\delta}^\beta f, \overline{M_\theta^\beta}\omega \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} \left\langle T_{\theta,\varepsilon,\delta}^\beta f, \overline{M_\theta^\beta}\omega \right\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} \left\langle f, \overline{T_{\theta,\varepsilon,\delta}^\beta}\ \overline{M_\theta^\beta}\omega \right\rangle, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\overline{T_{\theta,\varepsilon,\delta}^\beta}$ — мультипликаторный оператор с символом

$$\frac{\widehat{m_\theta^\beta}(|\xi|)\ e^{-\varepsilon|\xi|^2}}{|\widehat{m_\theta^\beta}(|\xi|)|^2 - i\delta}.$$

Далее имеем

$$\left(\overline{T_{\theta,\varepsilon,\delta}^\beta}\ \overline{M_\theta^\beta}\omega\right)(x) = (W_\varepsilon\omega)(x) + i\delta\left(\overline{N_{\theta,\varepsilon,\delta}^\beta} W_{\frac{\varepsilon}{2}}\omega\right)(x), \quad \varepsilon, \delta > 0, \tag{14}$$

где $\overline{N_{\theta,\varepsilon,\delta}^\beta}$ — ограниченный в L^2 оператор, порождаемый 2-мультипликатором

$$\frac{e^{\frac{-\varepsilon|\xi|^2}{2}}}{\left|\widehat{m_\theta^\beta}(|\xi|)\right|^2 - i\delta}.$$

Равенство (14) проверяется переходом к преобразованиям Фурье.

С учетом (13) и (14) получаем

$$\left\langle M_\theta^\beta T_\theta^\beta f, \omega \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle f, W_\varepsilon\omega\rangle + \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} \left\langle f, i\delta \overline{N_{\theta,\varepsilon,\delta}^\beta} W_{\frac{\varepsilon}{2}}\omega \right\rangle. \tag{15}$$

Докажем, что

$$\lim_{\delta\to 0} \left\langle f, i\delta \overline{N_{\theta,\varepsilon,\delta}^\beta} W_{\frac{\varepsilon}{2}}\omega \right\rangle = 0. \tag{16}$$

Так как $(\overline{N_{\theta,\varepsilon,\delta}^\beta} W_{\frac{\varepsilon}{2}}\omega)(x) \in \Phi_V$, то

$$\left\langle f, i\delta \overline{N_{\theta,\varepsilon,\delta}^\beta} W_{\frac{\varepsilon}{2}}\omega \right\rangle = (2\pi)^{-n} \left\langle \widehat{f}, i\delta F(\overline{N_{\theta,\varepsilon,\delta}^\beta} W_{\frac{\varepsilon}{2}}\omega) \right\rangle.$$

Применяя неравенство Гёльдера, с учетом того, что $\widehat{f} \in L^\infty$, будем иметь

$$\left| \left\langle \widehat{f}, i\delta F(\overline{N_{\theta,\varepsilon,\delta}^\beta} W_{\frac{\varepsilon}{2}}\omega) \right\rangle \right| \leqslant\ \delta \|\widehat{f}\|_\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\varepsilon|\xi|^2}\, |\widehat{\omega}(\xi)|}{\left|\widehat{m_\theta^\beta}(|\xi|)\right|^2}\, d\xi. \tag{17}$$

Заметим, что интеграл в правой части (17) конечен, так как $\widehat{\omega}(\xi) = 0$ в некоторой окрестности множества V.

Переходя в (17) к пределу при $\delta \to 0$, получаем (16).

Из (15) и (16) следует, что

$$\left\langle M_\theta^\beta T_\theta^\beta f, \omega \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \langle f, W_\varepsilon \omega\rangle = \langle f, \omega\rangle. \tag{18}$$

Переходя к завершающему этапу доказательства, для заданной функции $\omega \in \mathscr{S}$ выберем последовательность $\{\omega_N\}$, $\omega_N \in \Phi_V$, такую, что $\widehat{\omega_N}(\xi)$ обращается в нуль в некоторой окрестности множества V и

$$\overset{(C_0)}{\lim_{N\to\infty}} \omega_N = \omega$$

(возможность выбора такой последовательности доказана в [15]).

Из (18) вытекает, что

$$\left\langle M_\theta^\beta T_\theta^\beta f, \omega_N \right\rangle = \langle f, \omega_N\rangle.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $N \to \infty$ на основании мажорантной теоремы Лебега, получаем

$$\langle f, \omega\rangle = \left\langle M_\theta^\beta T_\theta^\beta f, \omega \right\rangle, \quad \omega \in \mathscr{S},$$

откуда следует, что

$$f(x) = \left(M_\theta^\beta T_\theta^\beta f\right)(x) \tag{19}$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Из (19) следует вложение (11). $\rhd$

8. Случай $\beta = 0$**.** Построим аналитическое продолжение свертки (1) из полуплоскости $\operatorname{Re}\beta > 0$ в полуплоскость $\operatorname{Re}\beta > -1$, считая, что $\varphi \in \Phi$. Для этого представим потенциал $M_\theta^\beta \varphi$ в виде

$$\left(M_\theta^\beta \varphi\right)(x) = \left(M_\theta^{\beta,1} \varphi\right)(x) + \left(M_\theta^{\beta,2} \varphi\right)(x),$$

где

$$\left(M_\theta^{\beta,1}\right)(x) = \int\limits_{1-\delta\leqslant|y|\leqslant 1} \omega(|y|) m_\theta^\beta(y) \varphi(x-y)\, dy, \tag{20}$$

$$\left(M_\theta^{\beta,2} \varphi\right)(x) = \int\limits_{|y|\leqslant 1-\delta/2} \bigl(1-\omega(|y|)\bigr) m_\theta^\beta(y) \varphi(x-y)\, dy,$$

функция $\omega(r) \in C^\infty[0,1]$ такова, что $0 \leqslant \omega(r) \leqslant 1$, $\omega(r) = 0$, если $r \in [0, 1-\delta]$ и $\omega(r) = 1$, если $r \in [1-\delta/2, 1]$, $0 < \delta < 1$. После перехода в интеграле (20) к полярным координатам и интегрирования по частям, будем иметь

$$\begin{aligned}(M_\theta^\beta \varphi)(x) &= \frac{1}{2\Gamma(\beta+1)} \int\limits_{1-\delta}^{1} (1-\rho^2)^\beta \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho^{n-2} \theta(\rho)\, \omega(\rho) \int\limits_{S^{n-1}} \varphi(x-\rho\sigma)\, d\sigma \right) d\rho \\ &+ \frac{\beta}{\Gamma(\beta+1)} \int\limits_{|y|\leqslant 1-\delta/2} \bigl(1-\omega(|y|)\bigr) \theta(|y|) \bigl(1-|y|^2\bigr)^{\beta-1} \varphi(x-y)\, dy.\end{aligned} \tag{21}$$

Правая часть (21) является аналитической функцией в полосе $-1 < \operatorname{Re}\beta < 1$.

При $\beta = 0$ получаем

$$(M_\theta^0 \varphi)(x) = \frac{\theta(1)}{2} \int\limits_{S^{n-1}} \varphi(x - \sigma)\, d\sigma. \tag{22}$$

Оператор (22) определен выше для $\varphi \in \Phi$. Легко видеть, что этот оператор продолжим по ограниченности на все пространство H^1 до линейного ограниченного оператора в H^1 и указанное продолжение также имеет вид (22).

Теорема 5. *Оператор* (22) *ограничен в пространстве* H^1.

$\lhd$ Применив формулу (25.13) из [16]:

$$\int\limits_{S^{n-1}} e^{i(x\cdot\sigma)}\, d\sigma = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{|x|^{\frac{n}{2}-1}} J_{\frac{n}{2}-1}(|x|),$$

получаем, что символ оператора (22) представим в виде

$$\widehat{m_\theta^0}(\xi) = \frac{1}{2}\theta(1) \frac{(2\pi)^{n/2}}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(|\xi|).$$

Имеем

$$\widehat{m_\theta^0}(\xi) = \big(1 - v(|\xi|^2)\big)\widehat{m_\theta^0}(\xi) + v\big(|\xi|^2\big)\widehat{m_\theta^0}(\xi) \equiv \widehat{m_{\theta,0}^0}(\xi) + \widehat{m_{\theta,\infty}^0}(\xi).$$

Так как $\widehat{m_{\theta,0}^0}(\xi) \in C_0^\infty$, то в силу теоремы 1 заключаем, что оператор свертки с ядром $m_{\theta,0}^0(x)$ ограничен в пространстве H^1.

Рассмотрим $\widehat{m_{\theta,\infty}^0}(\xi)$. Используя формулу (4) с $N = \left[\frac{n+1}{2}\right] + 2$, имеем

$$\widehat{m_{\theta,\infty}^0}(\xi) = \sum_{k=0}^{N} \Big(h_0^{k,-}(|\xi|) + h_0^{k,+}(|\xi|)\Big) + R_0^{N,-}(|\xi|) + R_0^{N,+}(|\xi|),$$

где

$$h_0^{k,\pm}(|\xi|) = \frac{\theta(1)\gamma_{k,\pm} v(|\xi|^2) e^{\pm i|\xi|}}{2|\xi|^{\frac{n-1}{2}+k}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant N,\ \gamma_{0,\pm} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{\mp\frac{i\pi}{4}(n-1)},$$

$$R_0^{N,\pm}(|\xi|) = \frac{\theta(1)\gamma_{0,\pm} v(|\xi|^2) e^{\pm i|\xi|}}{2|\xi|^{\frac{n-1}{2}}} R_{N,\pm}^{(\frac{n-2}{2})}(|\xi|).$$

Рассмотрим мультипликатор

$$h_0^{0,\pm}(|\xi|) = \frac{\frac{1}{2}\theta(1)\gamma_{0,\pm} v(|\xi|^2) e^{\pm i|\xi|}}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}}}.$$

По теореме 2 получаем, что оператор свертки с ядром $F^{-1}(h_0^{0,\pm}(|\xi|))(x)$ ограничен в пространстве H^1.

Аналогично, в пространстве H^1 ограничены операторы свертки с ядрами $F^{-1}(h_0^{k,\pm}(|\xi|))(x)$, $1 \leqslant k \leqslant N$, и $F^{-1}(R_0^{N,\pm}(|\xi|))(x)$. $\rhd$

Для оператора (22) справедливы также теоремы об обращении и описании потенциала $M_\theta^0\varphi$. Доказательства этих теорем строятся аналогично доказательству теорем 3, 4.

Теорема 6. *Пусть* $\varphi \in H^1$. *Тогда* $\left(T_\theta^0 M_\theta^0 \varphi\right)(x) = \varphi(x)$, *где*

$$T_\theta^0 f = \overset{(H^1)}{\lim_{\varepsilon\to 0}} \overset{(L^2)}{\lim_{\delta\to 0}} T^0_{\theta,\varepsilon,\delta} f, \quad T^0_{\theta,\varepsilon,\delta} f = F^{-1}\left(\frac{\overline{\widehat{m^0_\theta}(|\xi|)}\; e^{-\varepsilon|\xi|^2}}{|\widehat{m^0_\theta}(|\xi|)|^2 + i\delta}\right) * f, \quad \widehat{m^0_\theta}(|\xi|) = \frac{1}{2}\,\theta(1) \int\limits_{S^{n-1}} e^{i(\xi\cdot\sigma)}\, d\sigma.$$

Теорема 7. *Справедливо равенство* $M_\theta^0(H^1) = \left\{ f \in H^1 : T_\theta^0 f \in H^1 \right\}$.

Литература

1. *Strichartz R. S.* Convolutions with kernels having singularities on a sphere // Trans. Amer. Math. Soc.—1970.—Vol. 146.—P. 461–471.
2. *Miyachi A.* On some singular Fourier multipliers // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. IA.—1981.—Vol. 28.—P. 267–315.
3. *Nogin V. A., Karasev D. N.* On the L-characteristic of some potential-type operators with radial kernels, having singularities on a sphere // Fractional Calculus & Applied Analysis.—2001.—Vol. 4, № 3.—P. 343–366.
4. *Лужецкая П. А., Ногин В. А.* $L^p \to L^q$-оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими символами и их приложения // Изв. вузов. Математика.—2002.—№ 11.—С. 79–82.
5. *Karasev D. N., Nogin V. A.* Description of the ranges of some potential-type operators with oscillating kernels in the non-elliptic case // Fractional Calculus & Applied Analysis.—2002.—Vol. 5, № 3.—P. 315–349.
6. *Гиль А. В., Ногин В. А.* $L^1 - H^1$ оценки для обобщенного потенциала Стрихарца // Изв. вузов. Математика.—2011.—№ 9.—С. 10–18.
7. *Nogin V. A., Luzhetskaya P. A.* Inversion and description of the ranges of multiplier operators of Strichartz–Peral–Miyachi-type // Fractional Calculus & Applied Analysis.—2000.—Vol. 3, № 1.—P. 87–96.
8. *Fefferman C. L., Stein E. M.* H^p-spaces of several variables // Acta Math.—1972.—Vol. 129.—P. 137–193.
9. *Stein E. M.* Harmonic Analysis: Real-Variable Method, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.—Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.—695 p.
10. *Fefferman C. L.* Characterizations of bounded mean oscillation // Bull. Amer. Math. Soc.—1971.—Vol. 77.—P. 587–588.
11. *Calderon A. P., Torchinsky A.* Parabolic maximal functions associated with a distribution, II // Adv. Math.—1977.—Vol. 24, № 2.—P. 101–171.
12. *Лизоркин П. И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. МИАН АН СССР.—1969.—Т. 105.—С. 89–107.
13. *Лизоркин П. И.* Операторы, связанные с дробным дифференцированием, и классы дифференцируемых функций // Тр. МИАН АН СССР.—1972.—Т. 117.—С. 212–243.
14. *Самко С. Г.* Об основных функциях, исчезающих на заданном множестве, и о делении на функции // Мат. заметки.—1977.—Т. 21, № 5.—С. 677–689.
15. *Самко С. Г.* О плотности в $L_p(\mathbb{R}^n)$ пространства Φ_v типа Лизоркина // Мат. заметки.—1982.—Т. 31, № 6.—С. 855–865.
16. *Samko S. G.* Hypersingular Integrals and Applications.—London–New-York: Taylor&Frances, 2002.—376 p.—(Ser. Anal. Methods and Special Functions. Vol. 5).
17. *Ватсон. Г. Н.* Теория бесселевых функций.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949.—798 с.
18. *Гиль А. В., Ногин В. А.* Оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими символами // Владикавк. мат. журн.—2010.—Т. 12, № 3.—С. 21–29.

Статья поступила 26 мая 2011 г.

Гиль Алексей Викторович
Южный федеральный университет,
ассистент кафедры дифференц. и интегр. уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: gil-alexey@yandex.ru

Ногин Владимир Александрович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
старший научный сотрудник лаб. вещественного анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Южный федеральный университет,
доцент кафедры дифференц. и интегр. уравнений
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: vnogin@ns.math.rsu.ru

INVERSION AND DESCRIPTION OF THE RANGES OF POTENTIALS WITH SINGULARITIES OF THEIR KERNELS ON A SPHERE

Gil A. V., Nogin V. A.

Within the framework of the method of approximative inverse operators we construct the inversion of generalized Strichartz potentials with densities in the Hardy space H^1 in the non-elliptic case, when their symbols degenerate on a set of measure zero. The ranges of these operators are also described.

Key words: convolution, oscillating symbol, range, multiplier, method of approximative inverse operators.

Владикавказский математический журнал
2012, Том 14, Выпуск 4, С. 19–23

УДК **517.633**

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ[1]

В. В. Гусаченко, В. Б. Левенштам

Рассмотрен конкретный (иллюстративный) пример линейной параболической задачи с двумя независимыми переменными (x, t) и высокочастотными по времени t коэффициентами; соответствующая стационарная однородная усредненная задача при этом вырождена. С помощью методики, развитой недавно для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [1]), и метода пограничного слоя построена полная формальная асимптотика периодического по времени решения.

Ключевые слова: параболическая задача, высокочастотные по времени коэффициенты, вырожденная усредненная задача, полная асимптотика периодического по времени решения.

В работе [1] (см. также [2]) построены и обоснованы полные асимптотические разложения периодических решений линейных нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с высокочастотными коэффициентами, для которых стационарная формально усредненная задача имеет простое нулевое собственное значение. Важную роль при этом играет методика, развитая в работе [3], где рассматривались возмущения стационарных задач на спектре.

В данной работе методика [1] в сочетании с методом погранслоя [4] применена для построения формальной асимптотики решения конкретной параболической задачи второго порядка с двумя независимыми переменными (x, t) в полосе с высокочастотными по времени t коэффициентами. Соответствующая однородная стационарная формально усредненная задача вырождена. Представленная в работе методика, как видно из изложения ее на примере, применима к широкому классу высокочастотных параболических задач с вырождением.

Построим формальную асимптотику $\frac{2\pi}{\omega}$-периодического по времени t решения задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t) + \frac{1}{\omega} u(x,t)\,\cos x + u(x,t)\, x \sin \omega t + \cos 2x + \cos x \cos \omega t; \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0; \\ u(x, t+2\pi) = u(x,t), \end{cases} \tag{1}$$

рассматриваемой в полосе $(x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}$. Введем в рассмотрение оператор A_0 с областью определения $D(A_0) = \{u \in W_2^2([0,\pi]) : u(0) = u(\pi) = 0\}$, действующий в $L_2([0,\pi])$ по правилу $A_0 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u$. Оператор A_0 самосопряжен и его спектр имеет вид $\sigma(A_0) = \{1 - k^2, k \in \mathbb{N}\}$, $a_0(x) = \sin x$ — собственная функция оператора A_0, отвечающая собственному значению $\lambda = 0$.

© 2012 Гусаченко В. В., Левенштам В. Б.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 8210, и Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-00402-а.