Владикавказский математический журнал
2012, Том 14, Выпуск 4, С. 45–51

УДК **517.98**

О ПОЛИНОМАХ МАГАРАМ[1]

З. А. Кусраева, Б. Б. Тасоев

Установлен вариант теоремы Радона — Никодима и обоснована конструкция магарамова расширения для положительных ортогонально аддитивных полиномов в векторных решетках.

Ключевые слова: степень векторной решетки, ортогонально аддитивный полином, полином Магарам, магарамово расширение, теорема Радона — Никодима.

1. Введение

В последние годы значительный интерес вызывают порядковые свойства полиномов в векторных решетках, см., например, [3, 7, 5, 11, 14, 15, 20]. Наибольший прогресс достигнут в изучении класса ортогонально аддитивных полиномов. В частности, в [3] получено представление однородных полиномов в виде композиции положительного оператора и специального однородного полинома степенного вида. Этот же результат переоткрыт в [11]. Представление указанного вида фактически сводит исследование положительных ортогонально аддитивных однородных полиномов к изучению линейных положительных операторов в векторных решетках и степенного отображения в f-алгебрах.

В цикле работ Д. Магарам построена теория положительных операторов, см. обзор [18]. В частности, в [19] введены порядково непрерывные операторы в пространствах измеримых функций, сохраняющие порядковые отрезки, которые ныне принято называть *операторами Магарам.* В работе [17] часть теории Магарам была распространена на линейные положительные операторы в K-пространствах и, в частности, была установлена теорема типа Радона — Никодима для этого класса операторов. В [1] предложена конструкция магарамова расширения, позволяющая произвольный линейный положительный оператор расширить до оператора Магарам (подробности в [2]; см. также [16]).

Цель настоящей заметки — получить вариант теоремы Радона — Никодима и обосновать конструкцию магарамова расширения для однородных положительных ортогонально аддитивных полиномов. Необходимые сведения о векторных решетках и положительных операторах имеются в книгах [2, 4].

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 8210, и Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-00623-а.

2. Степень векторной решетки

Напомним понятие степени векторной решетки, см. [6, 8].

Определение 1. Пусть $2 \leqslant s \in \mathbb{N}$ и E — архимедова векторная решетка. Пара $(E^{s\odot}, \odot_s)$ называется *s-ой степенью E*, если выполнены следующие условия:

1) $E^{s\odot}$ — архимедова векторная решетка;

2) $\odot_s : E^s \to E^{s\odot}$ — ортосимметричный решеточный s-морфизм, называемый *каноническим полиморфизмом* или *каноническим s-морфизмомом* степени s;

3) для любой архимедовой векторной решетки F и любого ортосимметричного решеточного s-морфизма $\varphi : E^s \to F$ существует единственный решеточный гомоморфизм $S : E^{s\odot} \to F$ такой, что $S \circ \odot_s = \varphi$.

Это определение введено в [6]. Там же установлено, что для любой архимедовой векторной решетки E и любого натурального $2 \leqslant s \in \mathbb{N}$ существует единственная с точностью до решеточного изомофизма s-ая степень $(E^{s\odot}, \odot_s)$. Для удобства полагают также $E^{1\odot} = E$ и $\odot_1 = I_E$. Обозначим символом $\iota := \iota_s$ отображение $x \mapsto x \odot |x| \odot \ldots \odot |x|$.

Ниже потребуются следующие полезные свойства степени векторной решетки. Выражения вида $(x^s + y^s)^{\frac{1}{s}}$ и $|x^s - y^s|^{\frac{1}{s}}$ понимаются в смысле однородного функционального исчисления [9, 13], т. е. для элементов x и y равномерно полной векторной решетки полагают

$$(x^s + y^s)^{\frac{1}{s}} := \varphi(x, y), \quad |x^s - y^s|^{\frac{1}{s}} := \psi(x, y),$$

где $\varphi, \psi : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ — положительно однородные непрерывные функции, определяемые формулами: $\varphi(\alpha, \beta) := (\alpha^s + \beta^s)^{1/s}$, $\psi(\alpha, \beta) := |\alpha^s - \beta^s|^{1/s}$ и $\alpha^s := |\alpha|^s \operatorname{sgn}(\alpha)$.

Лемма 1. *Если векторная решетка E равномерно полна, то $\iota = \iota_s$ — нелинейный ортогонально аддитивный порядковый изоморфизм из E на $E^{s\odot}$, сохраняющий модуль ($\equiv |\iota(x)| = \iota(|x|)$) и умножение на -1 ($\equiv \iota(-x) = -\iota(x)$). Более того,*

$$\iota\big((x^s + y^s)^{\frac{1}{s}}\big) = \iota(x) + \iota(y) \quad (x, y \in E).$$

$\triangleleft$ См. [12, теорема 3.1]. $\triangleright$

Лемма 2. *Пусть E — равномерно полная векторная решетка и $1 \leqslant s \in \mathbb{N}$. Для каждого $\tau \in \operatorname{Orth}^\infty(E)$ оператор $\hat{\tau} := \iota \circ \tau \circ \iota^{-1}$ является ортоморфизмом из $\operatorname{Orth}^\infty(E^{s\odot})$, причем $\mathscr{D}(\hat{\tau}) = \iota(\mathscr{D}(\tau))$, где $\mathscr{D}(\tau) \subset E$ — область определения τ. Отображение $\tau \mapsto \hat{\tau}$ является изоморфизмом упорядоченных множеств $\operatorname{Orth}^\infty(E)$ и $\operatorname{Orth}^\infty(E^{s\odot})$.*

$\triangleleft$ Здесь можно провести те же соображения, что и в [12, теорема 3.4]. $\triangleright$

Замечание 1. Отображение $\tau \mapsto \hat{\tau}$ из леммы 2 осуществляет также изоморфизм f-алгебры $\operatorname{Orth}^\infty(E)^{s\odot}$ на f-алгебру $\operatorname{Orth}^\infty(E^{s\odot})$.

Лемма 3. *Пусть F — равномерно полная векторная решетка $1 \leqslant s \in \mathbb{N}$. Тогда существует единственная с точность до решеточного изоморфизма равномерно полная векторная решетка F° такая, что F есть s-ая степень F°, т. е. $(F^\circ)^{s\odot} = F$.*

$\triangleleft$ Доказательство проводится аналогично [12, теорема 3.3]. $\triangleright$

Лемма 4. *Пусть E, F, F° и s — те же, что и в леммах 2 и 3. Для любого инъективного решеточного гомоморфизма $h : E^{s\odot} \to F$ существует инъективный решеточный гомоморфизм $j : E \to F^\circ$ такой, что*

$$h(x_1 \odot \ldots \odot x_s) = j(x_1) \bar{\odot} \ldots \bar{\odot} j(x_s) \quad (x_1, \ldots, x_s \in E),$$

где $\odot : E^s \to E^{s\odot}$ и $\bar{\odot} : F^\circ \to F = (F^\circ)^{s\odot}$ — канонические s-морфизмы.

$\triangleleft$ См. [8, предложение 2.4]. $\triangleright$

3. Ортогонально аддитивные полиномы

Введем основной объект данной статьи — однородный полином. Подробно о полиномах см. [10]. Всюду ниже E и F — архимедовы векторные решетки и $1 \leqslant s \in \mathbb{N}$.

Определение 2. Отображение $P : E \to F$ называется *однородным полиномом степени* s (или s-*однородным полиномом*), если существует s-линейный оператор $\varphi : E^s \to F$, такой что

$$P(x) = \varphi(x, \dots, x) \quad (x \in E).$$

Полином P называют *положительным,* если $\varphi(x_1, \dots, x_s) \geqslant 0$ для всех $x_1, \dots, x_s \in E_+$, и *регулярным,* если он представим в виде разности двух положительных полиномов.

Определение 3. Однородный полином P называют *ортогонально аддитивным*, если для любых $x, y \in E$ выполняется

$$|x| \wedge |y| = 0 \implies P(x + y) = P(x) + P(y).$$

Обозначим символом $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ множество всех регулярных ортогонально аддитивных полиномов из E в F, упорядоченное конусом всех положительных полиномов. Если векторная решетка F порядково полна, то $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ — K-пространство.

Примером s-однородного ортогонально аддитивного положительного полинома служит *канонический полином* $x \mapsto x^{s\odot} := x \odot \dots \odot x$ $(x \in E)$, где $\odot$ — канонический s-морфизм степени $E^{s\odot}$. В [3, теорема 3] установлено, что при не очень обременительных условиях любой регулярный s-однородный ортогонально аддитивный полином допускает представление в виде композиции линейного регулярного оператора и канонического полинома.

Теорема 1. *Пусть E и F — равномерно полные векторные решетки. Тогда для любого ортогонально аддитивного регулярного s-однородного полинома $P : E \to F$ существует единственный линейный регулярный оператор $S := S_P : E^{s\odot} \to F$ такой, что*

$$P(x) = S(x^{s\odot}) \quad (x \in E). \tag{1}$$

Более того, отображение $P \mapsto S_P$ есть решеточный изоморфизм $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ на $L^r(E^{s\odot}, F)$.

Определение 4. Пусть E и F — векторные решетки, а $P : E \to F$ — положительный ортогонально аддитивный полином. Говорят, что P *сохраняет порядковые отрезки* или обладает *свойством Магарам,* если для любых $x \in E_+$ и $0 \leqslant f \leqslant P(x) \in F_+$ существует $0 \leqslant e \leqslant x$ такой, что $f = Pe$ или, короче, $P(\,[0, x]\,) = [0, Px]$. Полином P называют *полиномом Магарам*, если он порядково непрерывен и обладает свойством Магарам.

4. Теорема Радона — Никодима

В доказательстве теоремы Радона — Никодима для полиномов нам понадобится следующий вспомогательный факт.

Лемма 5. *Пусть E и F — некоторые K-пространства и $P : E \to F$ положительный ортогонально аддитивный полином, причем $P(x) = S(x^{s\odot})$ $(x \in E)$ для некоторого линейного положительного оператора $S : E^{s\odot} \to F$. Тогда P является полиномом Магарам в том и только в том случае, когда S также является оператором Магарам.*

$\lhd$ Предположим сначала, что $S[0, u] = [0, S(u)]$ для любого $0 \leqslant u \in E^{s\odot}$. Возьмем такие $x \in E_+$ и $f \in F_+$, что $f \leqslant P(x) = S(x^{s\odot})$. В силу нашего предположения существует $v \leqslant x^{s\odot}$ такой, что $S(v) = f$. Если взять $y := \iota^{-1}(v)$, то $0 \leqslant y \leqslant x$, $v = y^{s\odot}$ и, стало быть, $f = S(v) = S(y^{s\odot}) = P(y)$. Наоборот, если P сохраняет порядковые отрезки и $f \leqslant S(u)$ для некоторого $u \in E^{s\odot}$, то для $x := \iota^{-1}(u)$ имеем $u = x^{s\odot}$, $f \leqslant S(u) = P(x)$, а значит, существует $0 \leqslant y \leqslant x$, для которого $f = P(y)$. Положив $v := \iota(y)$, приходим к требуемому: $0 \leqslant v \leqslant u$ и $f = S(v)$.

Далее заметим, что отображение $x \mapsto x^{s\odot}$ порядково непрерывно (ср. [12, предложение 3.2 (3)]), поэтому из порядковой непрерывности S вытекает порядковая непрерывность P. В то же время, если P порядково непрерывен и $u_\alpha \downarrow 0$, $u_\alpha \in E^{s\odot}$, то $x_\alpha := \iota^{-1}(u_\alpha) \downarrow 0$ и $S(u_\alpha) = P(x_\alpha) \downarrow 0$. $\rhd$

Теорема 2 (Теорема Радона — Никодима для ортогонально аддитивных полиномов)**.** *Пусть E и G — некоторые K-пространства, а P и Q — положительные s-однородные ортогонально аддитивные полиномы из E в G. Если Q — полином Магарам, то эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $P \in \{Q\}^{\perp\perp}$;

(2) $P(x) \in \{Q(x)\}^{\perp\perp}$ *для всех* $x \in E_+$;

(3) *существует ортоморфизм* $0 \leqslant \rho \in \mathrm{Orth}^\infty(E)$ *такой, что*

$$P(x) = Q(\rho x) \quad (x \in \mathscr{D}(\rho));$$

(4) *существует возрастающая последовательность положительных ортоморфизмов* (ρ_n), $\rho_n \in \mathrm{Orth}(E)_+$, *такая, что имеет место представление:*

$$P(x) = \sup_n Q(\rho_n x) \quad (x \in E_+).$$

$\lhd$ Нужно лишь показать, что каждое из утверждений (1)–(4) эквивалентно соответствующему утверждению из теоремы Люксембурга — Шэпа, см. [2, теоремы 3.4.9]. В силу теоремы 1 существуют линейные положительные операторы $S, T : E^{s\odot} \to F$ такие, что $P(x) = S(x^{s\odot})$ и $Q(x) = T(x^{s\odot})$ для всех $x \in X$. По лемме 5 T — оператор Магарам и $S \in \{T\}^{\perp\perp}$. В соответствии с теоремой Люксембурга — Шэпа мы можем подобрать такой ортоморфизм $0 \leqslant \bar\rho \in \mathrm{Orth}^\infty(E^{s\odot})$, что $S(x) = T(\bar\rho x)$ $(x \in \mathscr{D}(\bar\rho))$. Ввиду леммы 2 найдется $0 \leqslant \rho \in \mathrm{Orth}^\infty(E)$, для которого $\bar\rho = \hat\rho$. Из всего сказанного видно, что для любого $0 \leqslant x \in \mathscr{D}(\hat\rho) = \iota(\mathscr{D}(\rho))$ справедлива цепочка равенств:

$$P(x) = S(x^{s\odot}) = T(\bar\rho x^{s\odot}) = T(\iota \circ \rho \circ \iota^{-1}\iota(x)) = T((\rho x)^{s\odot}) = Q(\rho x).$$

Для произвольного $x \in \mathscr{D}(\hat\rho)$, учитывая ортогональную аддитивность Q имеем $P(x) = P(x^+) + (-1)^s P(x^-) = Q(\rho x^+) + (-1)^s Q(\rho x^-) = Q(\rho x^+ - \rho x^-) = Q(\rho x)$. Ясно также, что если $P|_{\mathscr{D}(\rho)} = Q \circ \rho$, $P \in \{Q\}^{\perp\perp}$. Таким образом доказана эквивалентность (1) и (3). Остальные эквивалентности доказываются аналогично с помощью привлечения соответствующих пунктов из теоремы Люксембурга — Шэпа и лемм 2 и 3. $\rhd$

5. Магарамово расширение положительного полинома

Применим теперь тот же прием, что и в предыдущем параграфе, к конструкции магарамова расширения однородного положительного полинома.

Теорема 3 (О магарамовом расширении положительного ортогонально аддитивного полинома)**.** *Пусть E — равномерно полная векторная решетка, F — произвольное K-пространство и $P : E \to F$ — существенно положительный ортогонально аддитивный s-однородный полином. Тогда существуют единственное с точностью до решеточного* *изоморфизма K-пространство $\overline{E}$, инъективный решеточный гомоморфизм j из E в $\overline{E}$ и существенно положительный ортогонально аддитивный s-однородный полином Магарам $\overline{P} : \overline{E} \to F$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(1) *порядковый идеал в $\overline{E}$, порожденный множеством $j(E)$, совпадает с $\overline{E}$;*

(2) *существует o-непрерывный булев гомоморфизм $\tau : \mathfrak{P}(F) \to \mathfrak{P}(\overline{E})$ такой, что*

$$\pi P(x) = \overline{P}(\tau(\pi) jx) \quad (x \in E,\ \pi \in \mathfrak{P}(F));$$

(3) *$j(E)$ плотна в $\overline{E}$ в том смысле, что для любых $z \in \overline{E}$ и $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ существуют $z_\varepsilon \in \overline{E}$, разбиение $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset \mathfrak{P}(F)$ проектора $[\overline{P}(|z|)] \in \mathfrak{P}(F)$ и семейство $(x_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset E$ такие, что*

$$z_\varepsilon = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \tau(\pi_\xi) j(x_\xi), \quad \overline{P}\big(|z^s - z_\varepsilon^s|^{1/s}\big) \leqslant \varepsilon \overline{P}(|z|).$$

$\lhd$ Вновь воспользуемся представлением (1): $P(x) = S(x^{s\odot})$ $(x \in E)$, где $S : E^{s\odot} \to F$ — существенно положительный линейный оператор. Применим процедуру магарамова расширения к оператору S (см. [2, § 3.5]): существуют K-пространство $\overline{E^{s\odot}}$, инъективный решеточный гомоморфизм $h : E^{s\odot} \to \overline{E^{s\odot}}$ и существенно положительный оператор Магарам $\overline{S} : \overline{E^{s\odot}} \to F$, удовлетворяющие равенству

$$S(u) = \overline{S} \circ h(u) \quad (u \in E^{s\odot}). \tag{2}$$

Согласно лемме 3, существует единственная с точностью до решеточного изоморфизма векторная решетка $\overline{E} := (\overline{E^{s\odot}})^{\circ}$, s-ая степень которой совпадает с $\overline{E^{s\odot}}$; символически, $(\overline{E})^{s\odot} = \overline{E^{s\odot}}$. Поэтому решетки $(\overline{E})^{s\odot}$ и $\overline{E^{s\odot}}$ отождествляются и можем считать, что оператор $\overline{S}$ определен на $(\overline{E})^{s\odot}$ и h действует из $E^{s\odot}$ в $\overline{E}^{s\odot}$. Как уже отмечалось в [12, предложение 3.2 (1)] векторная решетка и ее s-ая степень порядково полны или нет одновременно, следовательно, $\overline{E}$ — K-пространство. Положим по определению

$$\overline{P}(x) := \overline{S}(x^{s\odot}) \quad (x \in \overline{E}). \tag{3}$$

Из [12, предложение 4.4 (4)] видно, что отображение $\overline{P} : \overline{E} \to F$ является существенно положительным ортогонально аддитивным s-однородным полиномом Магарам.

В силу леммы 4 существует инъективный решеточный гомоморфизм $j : E \to \overline{E}$, для которого выполняются соотношения

$$h \circ \iota = \iota \circ j, \quad h(x^{s\odot}) = (jx)^{s\odot} \quad (x \in E). \tag{4}$$

Напомним также следующее свойство оператора Магарам: существует o-непрерывный булев гомоморфизм $\eta : \mathfrak{P}(F) \to \mathfrak{P}(\overline{E}^{s\odot})$, для которого (см. [2, теорема 3.5.2]):

$$\pi\overline{S}(u) = \overline{S}(\eta(\pi)u) \quad \big(u \in \overline{E}^{s\odot},\ \pi \in \mathfrak{P}(F)\big). \tag{5}$$

Кроме того, существует изоморфизм ν из $\mathfrak{P}((\overline{E})^{s\odot})$ на $\mathfrak{P}(\overline{E})$ такой, что

$$\pi \circ \iota = \iota \circ \nu(\pi), \quad \pi(x^{s\odot}) = (\nu(\pi)x)^{s\odot} \quad \big(\pi \in \mathfrak{P}(\overline{E}^{s\odot}),\ x \in \overline{E}\big). \tag{6}$$

Очевидно, что $\tau := \nu \circ \eta$ — o-непрерывный булев гомоморфизм из $\mathfrak{P}(E)$ в $\mathfrak{P}(\overline{E})$. Следовательно, учитывая формулы (1)–(6), для произвольного $\pi \in \mathfrak{P}(F)$ выводим:

$$\overline{P}(\tau(\pi)j(x)) \overset{(3)}{=} \overline{S}\big((\tau(\pi)j(x))^{s\odot}\big) \overset{(6)}{=} \overline{S} \circ \eta(\pi)\big(j(x)^{s\odot}\big)$$
$$\overset{(5)}{=} (\pi\overline{S} \circ h)(x^{s\odot}) \overset{(4)}{=} \pi\overline{S}(j(x)^{s\odot}) \overset{(2)}{=} (\pi S)(x^{s\odot}) \overset{(1)}{=} \pi P(x).$$

Утверждение 3 (2) следует из того, что $\overline{E}^{s\odot}$ есть идеал, порожденный множеством $h(E^{s\odot})$ [2, § 3.5]. В самом деле, отображение $\iota : \overline{E} \to \overline{E}^{s\odot}$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между идеалами (полосами) в $\overline{E}$ и $\overline{E}^{s\odot}$. Очевидно, что $\tau := \nu \circ \eta$ — булев изоморфизмом из $\mathfrak{P}(F)$ в $\mathfrak{P}(\overline{E})$. Следовательно, множества $j(E)$ и $j(E)^{s\odot} = h(E^{s\odot})$ порождают один и тот же идеал.

Покажем плотность E в указанном смысле. Пусть $z \in \overline{E}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда $\iota(z) \in \overline{E}^{s\odot}$ и в силу [2, § 3.5.1], [2, § 3.5.2] существуют $u_\varepsilon \in \overline{E}^{s\odot}$, разбиение $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset \mathfrak{P}(F)$ проектора $[\overline{P}(|z|)] \in \mathfrak{P}(F)$ и семейство $(x_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset E$ такие, что

$$u_\varepsilon = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \eta(\pi_\xi)h(\iota x_\xi)), \quad \overline{S}(|\iota z - u_\varepsilon|) \leqslant \varepsilon\overline{S}(|\iota z|). \tag{7}$$

Обозначим через $z_\varepsilon := \iota^{-1}(u_\varepsilon) \in \overline{E}$. Тогда, привлекая (4), (6) и (7), убеждаемся, что

$$\tau(\pi_\xi)z_\varepsilon \overset{(6)}{=} (\iota^{-1}\eta(\pi_\xi)\iota)\iota^{-1}(u_\varepsilon) \overset{(7)}{=} \iota^{-1}\eta(\pi_\xi)h(\iota x_\xi) \overset{(4)}{=} (\iota^{-1}\eta(\pi_\xi)\iota)j(x_\xi) \overset{(6)}{=} \tau(\pi_\xi)j(x_\xi)$$

для всех $\xi \in \Xi$ и, стало быть, z_ε совпадает с порядковой суммой семейства $(\tau(\pi_\xi)j(x_\xi))_{\xi\in\Xi}$. Далее, $|\iota z - \iota z_\varepsilon| = |\iota z + \iota(-z_\varepsilon)| = \iota(|z^s - z_\varepsilon^s|^{1/s})$ в силу леммы 1 и, следовательно, $\overline{P}\big(|z^s - z_\varepsilon^s|^{1/s}\big) = (\overline{S} \circ \iota)\big(|z^s - z_\varepsilon^s|^{1/s}\big) = \overline{S}(|\iota z - \iota z_\varepsilon|) \leqslant \varepsilon\overline{S}(|\iota z|) = \varepsilon\overline{P}(|z|)$. Единственность $\overline{E}$ следует из утверждения 3 (3). $\triangleright$

Лемма 6. *Пусть E, $\overline{E}$, F, P, $\overline{P}$ и j — те же, что и в теореме 1. Для каждого полинома $Q \in \{P\}^{\perp\perp}$ существует единственный полином $\overline{Q} \in \{\overline{P}\}^{\perp\perp}$ такой, что $Q(x) = \overline{Q}(jx)$ для всех $x \in E$. Соответствие $Q \mapsto \overline{Q}$ осуществляет изоморфизм K-пространств $\{P\}^{\perp\perp}$ и $\{\overline{P}\}^{\perp\perp}$.*

$\triangleleft$ Пусть $P(x) = S(x^{s\odot})$ $(x \in E)$. Полоса $\{P\}^{\perp\perp}$ в $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ решеточно изоморфна полосе $\{S\}^{\perp\perp}$ в $L^r(E, F)$ по теореме 1. В силу [2, теорема 3.5.4] полоса $\{S\}^{\perp\perp}$ решеточно изоморфна полосе $\{\overline{S}\}^{\perp\perp}$ в $L^r(\overline{E}^{s\odot}, F)$. И вновь по теореме 1 полосы $\{\overline{S}\}^{\perp\perp}$ и $\{\overline{P}\}^{\perp\perp}$ также изоморфны. Композиция трех указанных изоморфизмов и есть искомый изоморфизм полос $\{P\}^{\perp\perp}$ и $\{\overline{P}\}^{\perp\perp}$. $\triangleright$

Теорема 4. *Пусть E, $\overline{E}$, F, P, $\overline{P}$ и j — те же, что и в теореме 1. Для любого полинома $Q \in \mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ равносильны следующие утверждения:*

(1) *$Q \in \{P\}^{\perp\perp}$;*

(2) *существует единственный ортоморфизм $\rho \in \mathrm{Orth}^\infty(\overline{E})$ такой, что $Q(x) = \overline{P}(\rho(jx))$ $(x \in j^{-1}(\mathscr{D}(\rho)))$;*

(3) *существует последовательность ортоморфизмов (ρ_n) в $\mathrm{Orth}(\overline{E})$ такая, что $Q(x) = \sup_n \overline{P}(\rho_n(jx))$ для всех $x \in E_+$.*

$\triangleleft$ Следует из леммы 6 и теорем 2 и 3. $\triangleright$

Замечание 2. Теоремы 1 и 2 получены Кусраевой З. А., а теоремы 3 и 4 — Тасоевым Б. Б.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензенту за критические замечания, повлекшие за собой значительное улучшение первоначального варианта заметки.

Литература

1. *Акилов Г. П., Колесников Е. В., Кусраев А. Г.* Порядково непрерывное расширение положительного оператора // Сиб. мат. журн.—1988.—Т. 29, № 5.—С. 24–55.
2. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
3. *Кусраева З. А.* О представлении ортогонально аддитивных полиномов // Сиб. мат. журн.—2011.—Т. 52, № 2.—С. 315–325.

4. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—London: Acad. Press Inc., 1985.—xvi+367 p.
5. *Benyamini Y., Lassalle S., Llavona J. G.* Homogeneous orthogonally additive polynomials on Banach lattices // Bull. London Math. Soc.—2006.—Vol. 38, № 3.—P. 459–469.
6. *Boulabier K., Buskes G.* Vector lattice powers: f-algebras and functional calculus // Communication in Algebra.—2006.—Vol. 34.—P. 1435–1442.
7. *Bu Q., Buskes G.* Polynomials on Banach lattices and positive tensor products spaces // J. Math. Anal. Appl.—2012.—Vol. 388.—P. 845–862.
8. *Buskes G., Kusraev A. G.* Representation and extension of orthoregular bilinear operators // Vladikavkaz Math. J.—2007.—Vol. 9, № 1.—P. 16–29.
9. *Buskes G., de Pagter B., van Rooij A.* Functional calculus in Riesz spaces // Indag. Math. (N. S.).—1991.—Vol. 4, № 2.—P. 423–436.
10. *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces.—Berlin: Springer, 1999.—543 p.
11. *Ibort A., Linares P., Llavona J. G.* A Representation Theorem for Orthogonally Additive Polynomials on Riesz Spaces.—2012.—arXiv:1203.2379vl.
12. *Kusraev A. G.* A Radon–Nikodým type theorem for orthosymmetric bilinear operators // Positivity.—2010.—Vol. 14, № 2.—P. 225–238.
13. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces. Vol. 2. Function Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—243 p.
14. *Linares P.* Orthogonal additive polynomials and applications // PhD. Departamento de Analisis Matematico. Universidad Complutense de Madrid.—2009.—105 p.
15. *Loan J.* Polynomials on Riesz spaces // J. Math. Anal. and Appl.—2010.—Vol. 364.—P. 71–78.
16. *Luxemburg W. A. J., de Pagter B.* Maharam extension of positive operators and f-algebras // Positivity.—2001.—Vol. 6, № 2.—P. 147–190.
17. *Luxemburg W. A. J., Schep A.* A Radon–Nikodým type theorem for positive operators and a dual // Indag. Math.—1978.—Vol. 10.—P. 357–375.
18. *Maharam D.* On positive operators // Contemporary Math.—1984.—Vol. 26.—P. 263–277.
19. *Maharam D.* The representation of abstract integrals // Trans. Amer. Math. Soc.—1953.—Vol. 75, № 1.—P. 154–184.
20. *Perez-Garcia D., Villanueva I.* Orthogonally additive polynomials on spaces of continuous functions // J. Math. Anal. Appl.—2005.—Vol. 306, № 1.—P. 97–105.

Статья поступила 30 августа 2012 г.

Кусраева Залина Анатольевна
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
аспирант отдела функционального анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `zali13@mail.ru`

Тасоев Батрадз Ботазович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
стажер-исследователь отдела функционального анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова,
аспирант математического факультета
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: `tasoevbatradz@yandex.ru`

ON MAHARAM POLYNOMIALS

Kusraeva Z. A., Tasoev B. B.

A Radon–Nikodým type theorem is proved and the Maharam extension is constructed for positive orthogonally additive polynomials in vector lattices.

Key words: vector lattice power, orthogonally additive polynomial, Maharam polynomial, Maharam extension, Radon–Nikodym theorem.