Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 2, С. 36–45

УДК **514.75/.77**

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ MG-ДЕФОРМАЦИИ ОВАЛОИДА

Д. А. Жуков

Рассмотрены бесконечно малые деформации замкнутой поверхности положительной гауссовой кривизны, при которых сохраняется поточечно грассманов образ поверхности, а вариация гауссовой кривизны задается как функция на поверхности.

Ключевые слова: овалоид, грассманов образ, гауссова кривизна, бесконечно малые деформации, жесткость.

Введение

В этой работе изучается поведение овалоида положительной гауссовой кривизны относительно бесконечно малых деформаций, при которых сохраняется поточечно грассманов образ поверхности, а вариация гауссовой кривизны задается как функция σ на поверхности. Сохранение грассманова образа — известное условие G-деформаций [1]. Задание вариации гауссовой кривизны как известной функции на поверхности напоминает нам о проблеме Минковского [2]. Поэтому такие деформации будем называть бесконечно малыми MG-деформациями.

Будем считать, что овалоид и векторное поле MG-деформации $\vec{y}$ принадлежат классу $D_{3,p}$, $p > 2$.[1]

Если векторное поле MG-деформации имеет только вид $\vec{y} = \overrightarrow{\mathrm{const}}$, то будем говорить, что овалоид является жестким относительно бесконечно малых MG-деформаций.

В § 1 выводится уравнение бесконечно малой MG-деформации для поверхностей гауссовой кривизны $K \geqslant k_0 > 0$, $k_0 = \mathrm{const}$, в трехмерном евклидовом пространстве. В § 2 проводится исследование решений уравнения бесконечно малых MG-деформаций для овалоида. Основной результат работы сформулирован в виде теоремы, которая доказывается в § 3.

Теорема. *Для каждой функции σ существует единственная бесконечно малая* MG-*деформация овалоида положительной гауссовой кривизны, векторное поле деформаций которой определяется с точностью до постоянного вектора. Овалоид является жестким относительно бесконечно малых* MG-*деформаций тогда и только тогда, когда вариация гауссовой кривизны тождественно равна нулю* ($\sigma \equiv 0$).

[1] Используются обозначения книги [3].

§ 1. Бесконечно малые MG-деформации

Рассмотрим поверхность $S : \vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$, $(u^1, u^2) \in D$, D — область.

Определение 1. *Непрерывной по параметру t деформацией S_t* поверхности S называется непрерывное отображение любого промежутка, содержащего нуль, например $[0,1]$, в банахово пространство $C^n(\bar{D})$ вектор-функций такое, что $S_0 \equiv S$, а S_t для любого t из рассматриваемого промежутка есть регулярная поверхность класса $C^n(\bar{D})$.

Определение 2. Если вектор-функция $\vec{r}_t(u^1, u^2)$, задающая поверхность S_t, обладает частными производными порядка k:

$$\frac{\partial^l \vec{r}_t}{\partial t^l}, \quad l = 1, 2, \ldots, k,$$

каждая из которых есть непрерывное отображение рассматриваемого числового промежутка в $C^n(\bar{D})$, то непрерывная деформация S_t называется *деформацией класса C^k* по параметру.

Определение 3. Функция

$$\delta^l \vec{r}(u^1, u^2) = \frac{1}{2l!} \frac{d^l \vec{r}_t}{dt^l}\bigg|_{t=0}, \quad l = 1, 2, \ldots, k,$$

называется *l-й вариацией* (*по Рембсу*) радиус-вектора $\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$ поверхности S при деформации S_t.

Определение 4. Пусть S_t — деформация поверхности S класса C^k по параметру, $k = 1, 2, \ldots, \infty$. S_t называется бесконечно малой MG-деформацией поверхности S, если

$$\delta K = \sigma, \quad \delta \vec{n} = 0, \tag{1}$$

где σ — заданная функция на поверхности S, $\sigma \in D_{1,p}$, $p > 2$.

Разложим радиус-вектор поверхности S^t по степеням t: $\vec{r}_t = \vec{r} + 2(t\delta\vec{r} + t^2\delta^2\vec{r} + \ldots)$, $t \in [0,1]$, где $\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$ — радиус-вектор исходной поверхности. Обозначим $\delta\vec{r} = \vec{y}$ — векторное поле деформации.

Наша задача: найти векторное поле $\vec{y} = \vec{y}(u^1, u^2)$. Для этого нам понадобится преобразовать условия (1), таким образом, мы получим уравнение бесконечно малых MG-деформаций.

Будем рассматривать односвязные поверхности гауссовой кривизны $K \geqslant k_0 > 0$, $k_0 = \mathrm{const}$.

Рассмотрим условие $\delta\vec{n} = 0$:

$$\delta\vec{n} = \delta\left(\frac{[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]}{|[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]|}\right) = \frac{\delta[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}] \cdot |[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]| - [\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}] \cdot \delta(|[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]|)}{|[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]|^2} = 0,$$

где $\partial_j\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u^j}$. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда числитель равен нулю

$$\delta[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}] \cdot |[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]| - [\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}] \cdot \delta(|[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]|) = 0. \tag{2}$$

К тому же

$$\begin{aligned}\delta(|[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]|) &= \delta\sqrt{[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]^2} = \frac{1}{2}\big([\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]^2\big)^{-\frac{1}{2}} \cdot \delta\big([\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]^2\big) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]^2}} \cdot 2[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}] \cdot \big([\delta(\partial_1\vec{r}), \partial_2\vec{r}] + [\partial_1\vec{r}, \delta(\partial_2\vec{r})]\big) \\ &= \frac{1}{|[\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}]|} \cdot \big([\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}], [\partial_1\vec{y}, \partial_2\vec{r}] + [\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{y}]\big),\end{aligned}$$

и уравнение (2) принимает вид

$$\frac{([\partial_1\vec{y},\partial_2\vec{r}]+[\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{y}])\cdot|[\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{r}]|^2-[\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{r}]\cdot([\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{r}],[\partial_1\vec{y},\partial_2\vec{r}]+[\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{y}])}{|[\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{r}]|}=0.$$

Это равенство справедливо тогда и только тогда, когда

$$([\partial_1\vec{y},\partial_2\vec{r}]+[\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{y}])\cdot P_1-[\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{r}]\cdot P_2=0, \tag{3}$$

где $P_1=|[\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{r}]|^2$ и $P_2=([\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{r}],[\partial_1\vec{y},\partial_2\vec{r}]+[\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{y}])$ — скалярные величины. Умножая равенство (3) скалярно на $\partial_1\vec{r}$, а затем на $\partial_2\vec{r}$, находим $(\partial_1\vec{y},\partial_2\vec{r},\partial_1\vec{r})=0$ и $(\partial_1\vec{r},\partial_2\vec{y},\partial_2\vec{r})=0$. Это означает, что векторы $\partial_1\vec{r}$, $\partial_2\vec{r}$, $\partial_1\vec{y}$, $\partial_2\vec{y}$ компланарны.

Следовательно, $\partial_1\vec{y}$, $\partial_2\vec{y}$ можно разложить по векторам $\partial_1\vec{r}$, $\partial_2\vec{r}$:

$$\partial_j\vec{y}=\alpha_j^k\partial_k\vec{r},\quad j=1,2, \tag{4}$$

где α_j^k — некоторые скалярные функции от (u^1,u^2).

Продифференцируем первое равенство системы (4) по u^2, а второе по u^1

$$\begin{cases}\partial_{12}\vec{y}=\partial_2\alpha_1^1\partial_1\vec{r}+\alpha_1^1\partial_{12}\vec{r}+\partial_2\alpha_1^2\partial_2\vec{r}+\alpha_1^2\partial_{22}\vec{r},\\ \partial_{21}\vec{y}=\partial_1\alpha_2^1\partial_1\vec{r}+\alpha_2^1\partial_{11}\vec{r}+\partial_1\alpha_2^2\partial_2\vec{r}+\alpha_2^2\partial_{21}\vec{r}.\end{cases}$$

Используем деривационные формулы Гаусса $\partial_{jk}\vec{r}=\Gamma_{jk}^l\partial_l\vec{r}+b_{jk}\vec{n}$, $j,k=1,2$,

$$\begin{cases}\partial_{12}\vec{y}=\partial_2\alpha_1^1\partial_1\vec{r}+\alpha_1^1(\Gamma_{12}^1\partial_1\vec{r}+\Gamma_{12}^2\partial_2\vec{r}+b_{12}\vec{n})+\partial_2\alpha_1^2\partial_2\vec{r}+\alpha_1^2(\Gamma_{22}^1\partial_1\vec{r}+\Gamma_{22}^2\partial_2\vec{r}+b_{22}\vec{n}),\\ \partial_{21}\vec{y}=\partial_1\alpha_2^1\partial_1\vec{r}+\alpha_2^1(\Gamma_{11}^1\partial_1\vec{r}+\Gamma_{11}^2\partial_2\vec{r}+b_{11}\vec{n})+\partial_1\alpha_2^2\partial_2\vec{r}+\alpha_2^2(\Gamma_{21}^1\partial_1\vec{r}+\Gamma_{21}^2\partial_2\vec{r}+b_{21}\vec{n}),\end{cases}$$

где b_{jk}, $j,k=1,2$, — коэффициенты второй квадратичной формы исходной поверхности. Так как $\partial_{12}\vec{y}=\partial_{21}\vec{y}$, то, приравняв коэффициенты при $\partial_1\vec{r}$, $\partial_2\vec{r}$ и $\vec{n}$, получим систему

$$\begin{cases}\partial_2\alpha_1^1+\alpha_1^1\Gamma_{12}^1+\alpha_1^2\Gamma_{22}^1=\partial_1\alpha_2^1+\alpha_2^1\Gamma_{11}^1+\alpha_2^2\Gamma_{21}^1,\\ \partial_2\alpha_1^2+\alpha_1^1\Gamma_{12}^2+\alpha_1^2\Gamma_{22}^2=\partial_1\alpha_2^2+\alpha_2^1\Gamma_{11}^2+\alpha_2^2\Gamma_{21}^2,\\ \alpha_1^1b_{12}+\alpha_1^2b_{22}=\alpha_2^1b_{11}+\alpha_2^2b_{21}.\end{cases} \tag{5}$$

Так как гауссова кривизна исходной поверхности $S:K\geqslant k_0>0$, $k_0=\mathrm{const}$, то, вводя на S сопряженно изометрическую систему координат, в которой $b_{11}=b_{22}\neq 0$, $b_{12}=0$, получим $\alpha_1^2=\alpha_2^1$. Система (5) преобразуется в систему

$$\begin{cases}\partial_2\alpha_1^1-\partial_1\alpha_1^2=(\alpha_2^2-\alpha_1^1)\Gamma_{21}^1+\alpha_1^2(\Gamma_{11}^1-\Gamma_{22}^1),\\ \partial_2\alpha_1^2-\partial_1\alpha_2^2=(\alpha_2^2-\alpha_1^1)\Gamma_{12}^2+\alpha_1^2(\Gamma_{11}^2-\Gamma_{22}^2).\end{cases} \tag{6}$$

Теперь, следуя В. Т. Фоменко [2, с. 87], введем обозначения: $U=\frac{1}{2}(\alpha_2^2-\alpha_1^1)$, $V=\alpha_1^2$, $\Pi=\frac{1}{2}(\alpha_2^2+\alpha_1^1)$. Тогда $\alpha_1^1=\Pi-U$, $\alpha_2^2=\Pi+U$. Уравнения (6) принимают вид

$$\begin{cases}\partial_1U-\partial_2V+2\Gamma_{12}^2U+(\Gamma_{11}^2-\Gamma_{22}^2)V&=-\partial_1\Pi,\\ \partial_2U+\partial_1V+2\Gamma_{21}^1U+(\Gamma_{11}^1-\Gamma_{22}^1)V&=\partial_2\Pi.\end{cases} \tag{7}$$

Таким образом, условие $\delta\vec{n}=0$ привело нас к системе (7).

Рассмотрим условие $\delta K = \sigma$.

Пусть $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$, $b = b_{11}b_{22} - b_{12}^2$ — дискриминанты первой и второй квадратичных форм исходной поверхности соответственно. Тогда $K = \frac{b}{g}$ и

$$\delta\left(\frac{b}{g}\right) = \sigma, \quad \frac{\delta b \cdot g - b \cdot \delta g}{g^2} = \sigma,$$

отсюда следует равенство

$$\delta b - K \cdot \delta g = g\sigma. \tag{8}$$

Проварьируем g и b:

$$\begin{aligned} \delta g &= \delta g_{11} \cdot g_{22} + g_{11} \cdot \delta g_{22} - 2g_{12} \cdot \delta g_{12}, \\ \delta b &= \delta b_{11} \cdot b_{22} + b_{11} \cdot \delta b_{22} - 2b_{12} \cdot \delta b_{12}. \end{aligned} \tag{9}$$

Вычислим вариации δg_{jk} и δb_{jk}, $j,k = 1,2$, выражая их через α_1^1, α_1^2, α_2^2, учитывая, что $\delta\vec{r} = \vec{y}$, $\delta\vec{n} = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \delta g_{11} &= \delta(\partial_1\vec{r}, \partial_1\vec{r}) = (\delta(\partial_1\vec{r}), \partial_1\vec{r}) + (\partial_1\vec{r}, \delta(\partial_1\vec{r})) = 2(\partial_1\vec{y}, \partial_1\vec{r}) \\ &= 2\big(\alpha_1^1\partial_1\vec{r} + \alpha_1^2\partial_2\vec{r}, \partial_1\vec{r}\big) = 2\alpha_1^1 g_{11} + 2\alpha_1^2 g_{21}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta g_{12} &= \delta(\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}) = (\delta(\partial_1\vec{r}), \partial_2\vec{r}) + (\partial_1\vec{r}, \delta(\partial_2\vec{r})) = (\partial_1\vec{y}, \partial_2\vec{r}) + (\partial_2\vec{y}, \partial_1\vec{r}) \\ &= \big(\alpha_1^1\partial_1\vec{r} + \alpha_1^2\partial_2\vec{r}, \partial_2\vec{r}\big) + \big(\alpha_1^2\partial_1\vec{r} + \alpha_2^2\partial_2\vec{r}, \partial_1\vec{r}\big) = \alpha_1^1 g_{12} + \alpha_1^2 g_{22} + \alpha_1^2 g_{11} + \alpha_2^2 g_{21}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta g_{22} &= \delta(\partial_2\vec{r}, \partial_2\vec{r}) = (\delta(\partial_2\vec{r}), \partial_2\vec{r}) + (\partial_2\vec{r}, \delta(\partial_2\vec{r})) = 2(\partial_2\vec{y}, \partial_2\vec{r}) \\ &= 2\big(\alpha_1^2\partial_1\vec{r} + \alpha_2^2\partial_2\vec{r}, \partial_2\vec{r}\big) = 2\alpha_1^2 g_{12} + 2\alpha_2^2 g_{22}. \end{aligned}$$

Продифференцируем первое из уравнений (4) по u^1, а второе — по u^2:

$$\partial_{11}\vec{y} = \partial_1\alpha_1^1\partial_1\vec{r} + \alpha_1^1\partial_{11}\vec{r} + \partial_1\alpha_1^2\partial_2\vec{r} + \alpha_1^2\partial_{21}\vec{r},$$

$$\partial_{22}\vec{y} = \partial_2\alpha_2^1\partial_1\vec{r} + \alpha_2^1\partial_{12}\vec{r} + \partial_2\alpha_2^2\partial_2\vec{r} + \alpha_2^2\partial_{22}\vec{r}.$$

Используя эти равенства, а также формулу $\partial_{12}\vec{y} = \partial_2\alpha_1^1\partial_1\vec{r} + \alpha_1^1\partial_{12}\vec{r} + \partial_2\alpha_1^2\partial_2\vec{r} + \alpha_1^2\partial_{22}\vec{r}$, находим

$$\delta b_{11} = (\delta(\partial_{11}\vec{r}), \vec{n}) + (\partial_{11}\vec{r}, \delta\vec{n}) = (\partial_{11}\vec{y}, \vec{n}) = \alpha_1^1(\partial_{11}\vec{r}, \vec{n}) + \alpha_1^2(\partial_{21}\vec{r}, \vec{n}) = \alpha_1^1 b_{11} + \alpha_1^2 b_{12},$$

$$\delta b_{22} = (\delta(\partial_{22}\vec{r}), \vec{n}) + (\partial_{22}\vec{r}, \delta\vec{n}) = (\partial_{22}\vec{y}, \vec{n}) = \alpha_1^2(\partial_{12}\vec{r}, \vec{n}) + \alpha_2^2(\partial_{22}\vec{r}, \vec{n}) = \alpha_1^2 b_{12} + \alpha_2^2 b_{22},$$

$$\delta b_{12} = (\delta(\partial_{12}\vec{r}), \vec{n}) + (\partial_{12}\vec{r}, \delta\vec{n}) = (\partial_{12}\vec{y}, \vec{n}) = \alpha_1^1(\partial_{12}\vec{r}, \vec{n}) + \alpha_1^2(\partial_{22}\vec{r}, \vec{n}) = \alpha_1^1 b_{12} + \alpha_1^2 b_{22}.$$

Учитывая, что $b_{11} = b_{22} \neq 0$, $b_{12} = 0$, получаем $\delta b_{11} = \alpha_1^1 b_{11}$, $\delta b_{22} = \alpha_2^2 b_{11}$, $\delta b_{12} = \alpha_1^2 b_{11}$. Подставляя найденные вариации в (9), получаем

$$\delta g = 2g_{22}\big(\alpha_1^1 g_{11} + \alpha_1^2 g_{21}\big) + 2g_{11}\big(\alpha_1^2 g_{12} + \alpha_2^2 g_{22}\big) - 2g_{12}\big(\alpha_1^1 g_{12} + \alpha_1^2 g_{22} + \alpha_1^2 g_{11} + \alpha_2^2 g_{21}\big),$$

$$\delta b = \alpha_1^1 b_{11} \cdot b_{22} + b_{11} \cdot \alpha_2^2 b_{11} - 2b_{12} \cdot \alpha_1^2 b_{11} = b_{11}b_{11}\big(\alpha_1^1 + \alpha_2^2\big).$$

Подставляя эти выражения в (8), находим

$$\begin{aligned} b_{11}b_{11}\big(\alpha_1^1 + \alpha_2^2\big) - 2Kg_{22}\big(\alpha_1^1 g_{11} + \alpha_1^2 g_{21}\big) - 2Kg_{11}\big(\alpha_1^2 g_{12} + \alpha_2^2 g_{22}\big) \\ + 2Kg_{12}\big(\alpha_1^1 g_{12} + \alpha_1^2 g_{22} + \alpha_1^2 g_{11} + \alpha_2^2 g_{21}\big) = g\sigma. \end{aligned}$$

Перегруппировав это выражение, приводим его к виду

$$\big(\alpha_1^1+\alpha_2^2\big)(b_{11}b_{11}-2Kg)=g\sigma,$$

отсюда имеем

$$\big(\alpha_1^1+\alpha_2^2\big)=-\frac{\sigma}{K}. \tag{10}$$

Сделаем замену $\Pi=\frac{1}{2}(\alpha_2^2+\alpha_1^1)$. Тогда уравнение (10) принимает вид

$$\Pi=-\frac{\sigma}{2K}. \tag{11}$$

Таким образом, система (1) привела нас к системе

$$\begin{cases}\partial_1U-\partial_2V+2\Gamma_{12}^2U+(\Gamma_{11}^2-\Gamma_{22}^2)V=-\partial_1\Pi,\\ \partial_2U+\partial_1V+2\Gamma_{21}^1U+(\Gamma_{11}^1-\Gamma_{22}^1)V=\partial_2\Pi,\\ \Pi=-\frac{\sigma}{2K}.\end{cases} \tag{12}$$

Благодаря третьему уравнению системы (12) функция Π у нас фактически известна, так как K и σ известные и заранее заданные функции, поэтому вместо функции Π мы подставим в первые два уравнения системы (12) ее значение $-\frac{\sigma}{2K}$. Получается система двух уравнений с двумя неизвестными U и V

$$\begin{cases}\partial_1U-\partial_2V+2\Gamma_{12}^2U+(\Gamma_{11}^2-\Gamma_{22}^2)V=\partial_1\big(\frac{\sigma}{2K}\big),\\ \partial_2U+\partial_1V+2\Gamma_{21}^1U+(\Gamma_{11}^1-\Gamma_{22}^1)V=-\partial_2\big(\frac{\sigma}{2K}\big).\end{cases}$$

Теперь, следуя И. Н. Векуа [3, с. 111], вводим в рассмотрение функцию $w(z)=U+iV$, где $z=u^1+iu^2$, $(u^1,u^2)\in D$, и записываем полученную систему в виде одного уравнения:

$$\partial_{\overline{z}}\,w+A_1w+B_1\overline{w}=\frac{1}{2}\,\partial_z\Big(\frac{\sigma}{K}\Big), \tag{13}$$

где

$$A_1=\frac{1}{4}\left(\Gamma_{11}^1-\Gamma_{22}^1+2\Gamma_{12}^2\right)-\frac{i}{4}\left(\Gamma_{11}^2-\Gamma_{22}^2-2\Gamma_{21}^1\right),$$

$$B_1=\frac{1}{4}\left(\Gamma_{22}^1-\Gamma_{11}^1+2\Gamma_{12}^2\right)+\frac{i}{4}\left(\Gamma_{11}^2-\Gamma_{22}^2+2\Gamma_{12}^1\right),$$

$$\partial_{\overline{z}}\,w=\frac{1}{2}\left(\partial_1w+i\partial_2w\right),\quad \partial_z\Big(\frac{\sigma}{K}\Big)=\frac{1}{2}\Big(\partial_1\Big(\frac{\sigma}{K}\Big)-i\partial_2\Big(\frac{\sigma}{K}\Big)\Big).$$

Преобразуем уравнение (13).

Согласно [3, с. 100] коэффициент A_1 может быть представлен в виде $A_1=\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\ln\sqrt{g\sqrt{K}}$. Введем в рассмотрение функцию $\widetilde{w}=w\sqrt{g\sqrt{K}}$. Тогда $w=\frac{\widetilde{w}}{\sqrt{g\sqrt{K}}}$. Подставляем w в (13) и, учитывая, что $A_1=\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\ln\sqrt{g\sqrt{K}}$, приводим уравнение (13) к виду

$$\partial_{\overline{z}}\,\widetilde{w}+B_1\overline{\widetilde{w}}=\frac{\sqrt{g\sqrt{K}}}{2}\,\partial_z\Big(\frac{\sigma}{K}\Big). \tag{14}$$

Решив уравнение (14), мы найдем функцию $\widetilde{w}=w\sqrt{g\sqrt{K}}$, отсюда вычислим w, а значит, найдем $U=\mathrm{Re}\{w(z)\}$, $V=\mathrm{Im}\{w(z)\}$.

Зная U и V, с помощью формул $\alpha_1^1 = \Pi - U$, $\alpha_2^2 = \Pi + U$, $\alpha_1^2 = V$ и (11) получим α_1^1, α_1^2, α_2^2.

Система (4) является пфаффовой системой, причем условие интегрируемости пфаффовой системы выполняется тождественно, поэтому соотношение $d\vec{y} = \partial_1 \vec{y} du^1 + \partial_2 \vec{y} du^2$, является полным дифференциалом. Интегрируя его, находим вектор смещения MG-деформации $\vec{y}$ с точностью до постоянного вектора в силу односвязности поверхности.

Таким образом, задача нахождения вектора смещений бесконечно малых MG-деформаций эквивалентна решению уравнения (14), поэтому уравнение (14) будем называть *комплексным уравнением бесконечно малых* MG-*деформаций поверхностей положительной гауссовой кривизны.*

§ 2. Исследование решений уравнения бесконечно малых MG-деформаций овалоида

Общее решение неоднородного уравнения вида (14), следуя И. Н. Векуа [3, с. 130], будем искать в виде

$$\widetilde{w} = \widetilde{w}_0 + \widetilde{w}_*, \tag{15}$$

т. е. общее решение неоднородного уравнения вида (14) равно сумме общего решения однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.

Для того чтобы отыскать общее решение однородного уравнения

$$\partial_{\bar{z}} \widetilde{w}_0 + B_1 \overline{\widetilde{w}_0} = 0, \tag{16}$$

исследуем поведение функции $\widetilde{w}_0$ на бесконечности.

Пусть S — овалоид положительной гауссовой кривизны. Выберем на овалоиде две диаметрально противоположные точки P_1, P_2, которые будем называть полюсами. С помощью стереографической проекции из полюса P_1 взаимно однозначно отобразим овалоид на плоскость (u^1, u^2), при этом полюс P_2 отобразится в точку $z = u^1 + iu^2 = 0$, а полюс P_1 в точку $z = u^1 + iu^2 = \infty$.

Теперь с помощью стереографической проекции из полюса P_2 взаимно однозначно отобразим овалоид на плоскость (ξ, η), при этом полюс P_1 отобразится в точку $\zeta = \xi + i\eta = 0$, а полюс P_2 в точку $\zeta = \xi + i\eta = \infty$.

Таким образом, мы получили две карты (u^1, u^2) и (ξ, η). Переход от одной карты на другую происходит при помощи конформного преобразования вида $\zeta = \frac{1}{z}$.

Исследуем поведение решения однородного уравнения в окрестности точки $z = \infty$.

Для любого скалярного или векторного инварианта на овалоиде (обозначим его через s) справедливо следующее соотношение:

$$s_z = \frac{\partial s}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial s}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z}.$$

Так как $\zeta = \frac{1}{z}$, $\bar{\zeta} = \frac{1}{\bar{z}}$, то $\zeta_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{1}{z^2}$, $\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial s}{\partial \zeta}$ ограничено, так как при $|z| \to \infty$, $|\zeta| \to 0$, $s_z = \frac{\partial s}{\partial \zeta} \cdot \big(-\frac{1}{z^2}\big) = O\big(|z|^{-2}\big)$ при $|z| \to \infty$.

$$s_{\bar{z}} = \frac{\partial s}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial s}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{z}}.$$

Так как $\zeta = \frac{1}{z}$, $\bar{\zeta} = \frac{1}{\bar{z}}$, то $\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} = 0$, $\bar{\zeta}_{\bar{z}} = \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\bar{z}^2}$. Следовательно (учитывая, что $s_{\bar{\zeta}}$ ограничено), $s_{\bar{z}} = \frac{\partial s}{\partial \zeta} \cdot \big(-\frac{1}{\bar{z}^2}\big) = O\big(|z|^{-2}\big)$ при $|z| \to \infty$.

Изучим поведение $\partial_j\vec{r}$, $j=1,2$,

$$\partial_{\bar z}\vec{r}=\frac{1}{2}\,(\partial_1\vec{r}+i\partial_2\vec{r}),\quad \partial_z\vec{r}=\frac{1}{2}\,(\partial_1\vec{r}-i\partial_2\vec{r}).$$

Складывая эти два равенства, находим $\partial_1\vec{r}=\partial_{\bar z}\vec{r}+\partial_z\vec{r}$. Отсюда следует, что $\partial_1\vec{r}=O(|z|^{-2})$ при $|z|\to\infty$. Вычитая из первого равенства второе получим $i\partial_2\vec{r}=\partial_{\bar z}\vec{r}-\partial_z\vec{r}$. Отсюда следует, что $\partial_2\vec{r}=O(|z|^{-2})$ при $|z|\to\infty$.

Аналогично доказывается, что $\partial_j\vec{n}=O(|z|^{-2})$, $\partial_j\vec{y}=O(|z|^{-2})$, $j=1,2$.

Итак, частные производные радиус-вектора овалоида ведут себя как $O(|z|^{-2})$, поэтому коэффициенты первой квадратичной формы овалоида ведут себя как $O(|z|^{-4})$:

$$g_{ij}=(\partial_i\vec{r},\partial_j\vec{r})=O(|z|^{-2})O(|z|^{-2})=O(|z|^{-4}),\quad i,j=1,2,\ |z|\to\infty.$$

Тоже справедливо и для коэффициентов второй квадратичной формы овалоида:

$$b_{ij}=-(\partial_i\vec{r},\partial_j\vec{n})=O(|z|^{-2})O(|z|^{-2})=O(|z|^{-4}),\quad i,j=1,2,\ |z|\to\infty.$$

Следовательно,

$$g=g_{11}g_{22}-g_{12}^2=O(|z|^{-4})O(|z|^{-4})-(O(|z|^{-4}))^2=O(|z|^{-8}),$$

$$b=b_{11}b_{22}-b_{12}^2=O(|z|^{-4})O(|z|^{-4})-(O(|z|^{-4}))^2=O(|z|^{-8}),\quad |z|\to\infty,$$

$$K=\frac{b}{g}=\frac{O(|z|^{-8})}{O(|z|^{-8})}=O(1),\quad |z|\to\infty.$$

Исследуем поведение на бесконечности функций α_1^1, α_1^2, α_2^2. Воспользуемся соотношениями $\delta b_{11}=\alpha_1^1b_{11}+\alpha_1^2b_{12}$, $\delta b_{12}=\alpha_1^1b_{12}+\alpha_1^2b_{22}$. Так как

$$\delta b_{11}=-(\partial_1\vec{y},\partial_1\vec{n})=O(|z|^{-2})O(|z|^{-2})=O(|z|^{-4}),$$

$$\delta b_{12}=-(\partial_1\vec{y},\partial_2\vec{n})=O(|z|^{-2})O(|z|^{-2})=O(|z|^{-4}),$$

$$b_{11}=b_{22}\neq 0,\quad b_{12}=0,$$

то по правилу Крамера получаем

$$\alpha_1^1=\frac{\begin{vmatrix}\delta b_{11} & b_{12}\\ \delta b_{12} & b_{22}\end{vmatrix}}{b}=\frac{b_{22}\delta b_{11}}{b}=\frac{O(|z|^{-4})O(|z|^{-4})}{O(|z|^{-8})}=O(1),$$

$$\alpha_1^2=\frac{\begin{vmatrix}b_{11} & \delta b_{11}\\ b_{12} & \delta b_{12}\end{vmatrix}}{b}=\frac{b_{11}\delta b_{12}}{b}=\frac{O(|z|^{-4})O(|z|^{-4})}{O(|z|^{-8})}=O(1).$$

Аналогично из соотношений $\delta b_{22}=\alpha_2^1b_{12}+\alpha_2^2b_{22}$, $\delta b_{21}=\alpha_2^1b_{11}+\alpha_2^2b_{21}$ получаем, что $\alpha_2^2=O(1)$.

Из этого следует, что $U=\frac{1}{2}(\alpha_2^2-\alpha_1^1)=O(1)$, $V=\alpha_1^2=O(1)$, следовательно, $w=U+iV=O(1)$. Тогда $\widetilde{w}=w\sqrt{g\sqrt{K}}=O(1)O(|z|^{-4})O(1)=O(|z|^{-4})$, $|z|\to\infty$.

Исследуем $\widetilde{w}_*$ на бесконечности. Частное решение неоднородного уравнения вычисляется по формуле [3, с. 154]

$$\widetilde{w}_*=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \Omega_1(z,\zeta,D)F(\zeta)\,d\xi\,d\eta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \Omega_2(z,\zeta,D)\overline{F}(\zeta)\,d\xi\,d\eta,$$

где $\Omega_1(z,\zeta)=\frac{e^{\omega_1}+e^{\omega_2}}{2(\zeta-z)}$, $\Omega_2(z,\zeta)=\frac{e^{\omega_1}-e^{\omega_2}}{2(\zeta-z)}$.

$$\widetilde{w}_*=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_D\left[\frac{e^{\omega_1}+e^{\omega_2}}{2(\zeta-z)}\big(\mathrm{Re}\{F\}+i\,\mathrm{Im}\{F\}\big)+\frac{e^{\omega_1}-e^{\omega_2}}{2(\zeta-z)}\big(\mathrm{Re}\{F\}-i\,\mathrm{Im}\{F\}\big)\right]d\xi\,d\eta$$
$$=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{e^{\omega_1}\,\mathrm{Re}\{F\}+ie^{\omega_2}\,\mathrm{Im}\{F\}}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta.$$

Обозначив $f(\zeta)=e^{\omega_1}\,\mathrm{Re}\{F\}+ie^{\omega_2}\,\mathrm{Im}\{F\}$, получаем $\widetilde{w}_*=-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta=T_Df$. Докажем, что $f\in L_{p,2}$, $p>2$. Из [3, с. 139] известно, что $|\omega_j|\leqslant M'_p$, следовательно, $|e^{\omega_j}|\leqslant e^{M'_p}$, $j=1,2$. Отсюда следует $e^{\omega_j}=O(1)$.

$$F=\frac{\sqrt{g\sqrt{K}}}{2}\,\partial_z\bigg(\frac{\sigma}{K}\bigg)=\frac{\sqrt{g\sqrt{K}}}{2}\cdot\frac{\partial_z\sigma\cdot K-\sigma\cdot\partial_z K}{K^2}=O(|z|^{-4})O(|z|^{-2})=O(|z|^{-6}).$$

Следовательно, $f(\zeta)\in L_{p,6}$, $p>2$, поэтому можем считать, что $f\in L_{p,2}$, $p>2$.

Таким образом, f удовлетворяет условию теоремы 1.24 из [3, с. 44], из которой следует, что вблизи бесконечности T_Df убывает как $|z|^{\frac{2-p}{p}}$, $p>2$, т. е. $\widetilde{w}_*=T_Df=O\big(|z|^{\frac{2-p}{p}}\big)$, $p>2$, $|z|\to\infty$. Наконец, из формулы (15) следует, что

$$\widetilde{w}_0=\widetilde{w}_*-\widetilde{w}=O\Big(|z|^{\frac{2-p}{p}}\Big)-O\big(|z|^{-4}\big)=O\Big(|z|^{\frac{2-p}{p}}\Big),\quad p>2,\ |z|\to\infty.$$

Из [3] известно, что $B_1\in L_{p,2}(D)$, $p>2$, D — вся комплексная плоскость, но в явном виде это утверждение в [3] не доказывается, поэтому сформулируем его в виде леммы и приведем подробное доказательство.

Лемма. *Коэффициент $B_1\in L_{p,2}(D)$, $p>2$, D — вся комплексная плоскость.*

$\lhd$ Коэффициент $B_1=-\overline{B}$ [3, с. 323]. Из [3, с. 99] известно, что

$$B=-\frac{1}{8a}\bigg(2a^-\frac{\partial a^+}{\partial\bar z}-a^+\frac{\partial a^-}{\partial\bar z}-a^-\frac{\partial a^-}{\partial z}\bigg),$$

где $a^+=4(\vec r_z,\vec r_{\bar z})$, $a^-=4(\vec r_{\bar z},\vec r_{\bar z})$, $a=\frac{1}{4}({a^+}^2-|a^-|^2)$,

$$\frac{\partial a^+}{\partial\bar z}=4(\vec r_{z\bar z},\vec r_{\bar z})+4(\vec r_z,\vec r_{\bar z\bar z}),\quad\frac{\partial a^-}{\partial\bar z}=8(\vec r_{\bar z},\vec r_{\bar z\bar z}),\quad\frac{\partial a^-}{\partial z}=8(\vec r_{\bar z},\vec r_{\bar z z}).$$

Так как D — вся комплексная плоскость, то ее конформные преобразования исчерпываются формулой $\zeta=\frac{\varepsilon z+\lambda}{\phi z+\mu}$, причем $\varepsilon\mu-\phi\lambda\neq0$. Положим $\varepsilon=0$, $\lambda=1$, $\phi=1$, $\mu=0$. При конформном преобразовании $\zeta=\frac{1}{z}$:

$$\vec r_z=\vec r_\zeta\cdot\zeta_z,\quad\vec r_{\bar z}=\vec r_{\bar\zeta}\cdot\bar\zeta_{\bar z},\quad\vec r_{\bar z\bar z}=(\vec r_{\bar\zeta}\cdot\bar\zeta_{\bar z})'_{\bar z}=\vec r_{\bar\zeta\bar\zeta}\cdot\bar\zeta_{\bar z}^2+\vec r_{\bar\zeta}\cdot\bar\zeta_{\bar z\bar z}.$$

Аналогично $\vec r_{z\bar z}=\vec r_{\zeta\bar\zeta}\cdot\bar\zeta_{\bar z}\cdot\zeta_z$,

$$a^+=4(\vec r_z,\vec r_{\bar z})=4(\vec r_\zeta\zeta_z,\vec r_{\bar\zeta}\bar\zeta_z)=4(\vec r_\zeta,\vec r_{\bar\zeta})\zeta_z\bar\zeta_{\bar z}=a_*^+\zeta_z\bar\zeta_{\bar z},$$

$$a^-=4(\vec r_{\bar z},\vec r_{\bar z})=4(\vec r_{\bar\zeta}\bar\zeta_{\bar z},\vec r_{\bar\zeta}\bar\zeta_{\bar z})=4(\vec r_{\bar\zeta},\vec r_{\bar\zeta})\bar\zeta_{\bar z}^2=a_*^-\bar\zeta_{\bar z}^2,$$

$$a=\frac{1}{4}\left({a^+}^2-|a^-|^2\right)=\frac{1}{4}\left({a_*^+}^2{\zeta_z}^2\bar\zeta_{\bar z}^2-|a_*^-\bar\zeta_{\bar z}^2|^2\right)=\frac{1}{4}\left({a_*^+}^2-|a_*^-|^2\right)|\zeta_z|^4=a_*|\zeta_z|^4.$$

$$\frac{\partial a^+}{\partial\bar z}=4(\vec r_{z\bar z},\vec r_{\bar z})+4(\vec r_z,\vec r_{\bar z\bar z})=4(\vec r_{\zeta\bar\zeta}\zeta_z\bar\zeta_{\bar z},\vec r_{\bar\zeta}\bar\zeta_{\bar z})+4(\vec r_\zeta\zeta_z,\vec r_{\bar\zeta\bar\zeta}\cdot\bar\zeta_{\bar z}^2+\vec r_{\bar\zeta}\cdot\bar\zeta_{\bar z\bar z})$$
$$=4(\vec r_{\zeta\bar\zeta},\vec r_{\bar\zeta})\zeta_z\bar\zeta_{\bar z}^2+4(\vec r_\zeta,\vec r_{\bar\zeta\bar\zeta})\zeta_z\bar\zeta_{\bar z}^2+4(\vec r_\zeta,\vec r_{\bar\zeta})\zeta_z\bar\zeta_{\bar z\bar z}=\frac{\partial a_*^+}{\partial\bar\zeta}\,\zeta_z\bar\zeta_{\bar z}^2+a_*^+\zeta_z\bar\zeta_{\bar z\bar z},$$

$$\frac{\partial a^-}{\partial\bar z}=8(\vec r_{\bar z},\vec r_{\bar z\bar z})=8(\vec r_{\bar\zeta}\bar\zeta_{\bar z},\vec r_{\bar\zeta\bar\zeta}\cdot\bar\zeta_{\bar z}^2+\vec r_{\bar\zeta}\cdot\bar\zeta_{\bar z\bar z})=8(\vec r_{\bar\zeta},\vec r_{\bar\zeta\bar\zeta})\bar\zeta_{\bar z}^3+8(\vec r_{\bar\zeta},\vec r_{\bar\zeta})\cdot\bar\zeta_{\bar z}\bar\zeta_{\bar z\bar z}$$
$$=\frac{\partial a_*^-}{\partial\bar\zeta}\bar\zeta_{\bar z}^3+2a_*^-\cdot\bar\zeta_{\bar z}\bar\zeta_{\bar z\bar z},$$

$$\frac{\partial a^-}{\partial z}=8(\vec r_{\bar\zeta}\bar\zeta_{\bar z},\vec r_{\zeta\bar\zeta}\cdot\bar\zeta_{\bar z}\zeta_z)=8(\vec r_{\bar\zeta},\vec r_{\zeta\bar\zeta})\cdot\bar\zeta_{\bar z}^2\zeta_z=\frac{\partial a_*^-}{\partial\zeta}\cdot\bar\zeta_{\bar z}^2\zeta_z.$$

Тогда

$$B=-\frac{1}{8a}\left(2a^-\frac{\partial a^+}{\partial\bar z}-a^+\frac{\partial a^-}{\partial\bar z}-a^-\frac{\partial a^-}{\partial z}\right)=-\frac{1}{8a_*|\zeta_z|^4}\left(2a_*^-\bar\zeta_{\bar z}^2\left(\frac{\partial a_*^+}{\partial\bar\zeta}\,\zeta_z\bar\zeta_{\bar z}^2+a_*^+\zeta_z\bar\zeta_{\bar z\bar z}\right)\right.$$
$$\left.-a_*^+\zeta_z\bar\zeta_{\bar z}\left(\frac{\partial a_*^-}{\partial\bar\zeta}\,\bar\zeta_{\bar z}^3+2a_*^-\bar\zeta_{\bar z}\bar\zeta_{\bar z\bar z}\right)-a_*^-\bar\zeta_{\bar z}^2\frac{\partial a_*^-}{\partial\zeta}\cdot\bar\zeta_{\bar z}^2\zeta_z\right)=B_*\frac{\bar\zeta_{\bar z}^4\zeta_z}{|\zeta_z|^4},$$

где $B_*=-\frac{1}{8a_*}\big(2a_*^-\frac{\partial a_*^+}{\partial\bar\zeta}-a_*^+\frac{\partial a_*^-}{\partial\bar\zeta}-a_*^-\frac{\partial a_*^-}{\partial\zeta}\big)$.

Так как при $|z|\to\infty$ имеем $\zeta\to0$, то $B_*=O(1)$, $\frac{\bar\zeta_{\bar z}^4}{|\zeta_z|^4}=\frac{O(|z|^{-8})}{O(|z|^{-8})}=O(1)$, $\zeta_z=-\frac{1}{z^2}=O(|z|^{-2})$, это означает, что $B=O(|z|^{-2})$ при $|z|\to\infty$, следовательно, $B_1=O(|z|^{-2})$ при $|z|\to\infty$, и $B_1\in L_{p,2}(D)$, $p>2$. $\rhd$

Итак, функция $\widetilde w_0$ ограничена и является решением однородного уравнения (16), где $B_1\in L_{p,2}(D)$, $p>2$ (в силу леммы). Так как $\widetilde w_0=O\Big(|z|^{\frac{2-p}{p}}\Big)$, $p>2$ при $|z|\to\infty$, то $\widetilde w_0$ обращается в нуль в точке $z=\infty$.

Таким образом, $\widetilde w_0$ является обобщенной аналитической функцией, удовлетворяющей условию обобщенной теоремы Лиувилля [3, с. 128].

Из этой теоремы следует, что $\widetilde w_0(z)\equiv0$ всюду на плоскости D.

§ 3. Доказательство теоремы

Итак, мы показали, что $\widetilde w_0(z)\equiv0$ всюду на плоскости D. Тогда соотношение (15) имеет вид $\widetilde w=\widetilde w_*$. Получается, что каждому σ соответствует единственное решение $\widetilde w$.

Функция $w=\frac{\widetilde w}{\sqrt{g\sqrt K}}=\frac{\widetilde w_*}{\sqrt{g\sqrt K}}$, $U=\mathrm{Re}\{w\}$, $V=\mathrm{Im}\{w\}$, следовательно, $\alpha_1^2=\mathrm{Im}\{w\}$, $\alpha_1^1=\Pi-U=-\frac{\sigma}{2K}-\mathrm{Re}\{w\}$, $\alpha_2^2=\Pi+U=-\frac{\sigma}{2K}+\mathrm{Re}\{w\}$. Уравнения (4) принимают вид:

$$\begin{cases}\partial_1\vec y=\big(-\frac{\sigma}{2K}-\mathrm{Re}\{w\}\big)\partial_1\vec r+\mathrm{Im}\{w\}\partial_2\vec r,\\ \partial_2\vec y=\mathrm{Im}\{w\}\partial_1\vec r+\big(-\frac{\sigma}{2K}+\mathrm{Re}\{w\}\big)\partial_2\vec r.\end{cases}\tag{17}$$

Так как рассматриваемая поверхность односвязна, то с помощью уравнений (17) можно найти поле смещений бесконечно малой MG-деформации, соответствующей конкретному σ, с точностью до постоянного вектора, интегрируя выражение $d\vec y=\partial_1\vec y\,du^1+\partial_2\vec y\,du^2$.

Таким образом, для каждого σ существует единственное поле бесконечно малой MG-деформации с точностью до постоянного вектора.

Докажем теперь, что овалоид является жестким относительно бесконечно малых MG-деформаций тогда и только тогда, когда $\sigma\equiv0$.

Пусть $\sigma \equiv 0$. Тогда $F = \frac{\sqrt{g\sqrt{K}}}{2}\partial_z\left(\frac{\sigma}{K}\right) = 0$. Следовательно,

$$\widetilde{w}_* = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \Omega_1(z,\zeta,D)F(\zeta)\,d\xi\,d\eta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_D \Omega_2(z,\zeta,D)\overline{F}(\zeta)\,d\xi\,d\eta \equiv 0.$$

Тогда $w = \frac{\widetilde{w}_*}{\sqrt{g\sqrt{K}}} \equiv 0$, и соотношения (17) принимают вид:

$$\begin{cases} \partial_1\vec{y} = 0, \\ \partial_2\vec{y} = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Отсюда следует жесткость овалоида.

Пусть овалоид является жестким относительно бесконечно малых MG-деформаций, т. е. $\vec{y} = \vec{C} = \overrightarrow{\mathrm{const}}$. Тогда $d\vec{y} = \partial_1\vec{y}\,du^1 + \partial_2\vec{y}\,du^2 = 0$. Следовательно, справедливы равенства (18). Тогда в силу соотношений (17) имеем

$$\begin{cases} \left(-\frac{\sigma}{2K} - \mathrm{Re}\{w\}\right)\partial_1\vec{r} + \mathrm{Im}\{w\}\partial_2\vec{r} = 0, \\ \mathrm{Im}\{w\}\partial_1\vec{r} + \left(-\frac{\sigma}{2K} + \mathrm{Re}\{w\}\right)\partial_2\vec{r} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Умножая скалярно первое из этих равенств на $-\partial_1\vec{n}$, а второе — на $-\partial_2\vec{n}$, учитывая, что $b_{11} = b_{22} \neq 0$, $b_{12} = 0$, получаем

$$\begin{cases} -\frac{\sigma}{2K} - \mathrm{Re}\{w\} = 0, \\ -\frac{\sigma}{2K} + \mathrm{Re}\{w\} = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\sigma \equiv 0$.

Литература

1. *Фоменко В. Т., Бикчантаев И. А.* Применение обобщенных аналитических функций на римановых поверхностях к исследованию G-деформаций двумерных поверхностей в E^4 // Мат. сб.—1988.—Т. 136 (178), № 4 (8).—С. 561–573.
2. *Фоменко В. Т.* О единственности решений проблем Кристоффеля и Минковского для овалоидов // Сб. науч. тр. по межвуз. программе «Университеты России — фундаментальные исследования».—Таганрог: Изд-во ТГПИ, 1998.—С. 73–95.
3. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции.—М.: Наука, 1988.—512 с.
4. *Климентов С. Б.* О продолжении бесконечно малых изгибаний высших порядков односвязной поверхности положительной кривизны // Мат. заметки.—1984.—Т. 36, вып. 3.—С. 393–403.

Статья поступила 5 мая 2011 г.

Жуков Дмитрий Александрович
Таганрогский государственный педагогический институт,
аспирант кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 347936, Таганрог, ул. Инициативная, 48
E-mail: `fossil.new@yandex.ru`

INFINITESIMAL MG-DEFORMATIONS OF OVALOID

Zhukov D. A.

We consider infinitesimal deformations of a closed surface with positive Gaussian curvature, under which the variation of Gaussian curvature is given as a function on a surface and the Grassman image is kept invariant.

Key words: ovaloid, Grassman image, Gaussian curvature, infinitesimal deformations, rigidity.