Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 2, С. 78–82

УДК **514.17**

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ИНТЕГРАЛА СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ НА МНОЖЕСТВЕ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ С ЗАДАННЫМ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ ДИАМЕТРОМ[1]

Н. В. Рассказова

В работе найдены экстремальные значения интеграла средней кривизны на множестве прямых трехмерных параллелепипедов с заданным геодезическим диаметром поверхности. Наибольшее его значение достигается на вырожденном параллелепипеде с соотношением длин ребер $a : b : c = 0 : 1 : 1$, наименьшее — на вырожденном параллелепипеде с соотношением длин ребер $a : b : c = 0 : 0 : 1$.

Ключевые слова: прямоугольный параллелепипед, внутренний диаметр, интеграл средней кривизны.

Интересной задачей выпуклой геометрии в трехмерном евклидовом пространстве является поиск экстремальных значений естественных функционалов на множестве выпуклых тел, рассматриваемых на подмножестве тел с заданным геодезическим диаметром поверхности тела. Однако вычисление геодезического диаметра выпуклой поверхности является весьма непростой задачей, далекой в настоящее время от своего полного решения. Поэтому целесообразно провести соответствующее исследование для тех семейств выпуклых тел, для которых соответствующая информация доступна. К таким семействам относится семейство трехмерных прямоугольных параллелепипедов, для которых геодезический диаметр поверхностей вычислен в работе [5].

Весьма естественными функционалами на множестве выпуклых тел в k-мерном евклидовом пространстве являются *интегралы поперечных мер Минковского* W_i, где $i = 0, 1, \ldots, k$ (см., например, [4, п. 6.1.6]). Пусть A — выпуклое тело, т. е. замкнутое и выпуклое точечное множество, в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Ему можно сопоставить следующие интегралы поперечных мер Минковского: $W_0(A) = V(A)$ — объем, $W_1(A) = F(A)/3$, $W_2(A) = M(A)/3$, $W_3(A) = \mathrm{const} = 4\pi/3$, где $F(A)$ — площадь поверхности, а $M(A)$ — интеграл средней кривизны. Все эти величины естественно появляются в формуле Штейнера для объема ε-отступления (внешнего параллельного тела) A_ε [4, п. 6.1.8]:

$$V(A_\varepsilon) = V(A) + F(A)\varepsilon + M(A)\varepsilon^2 + \frac{4\pi}{3}\varepsilon^3 = W_0(A) + 3W_1(A)\varepsilon + 3W_2(A)\varepsilon^2 + W_3(A)\varepsilon^3.$$

Напомним значения интегралов поперечных мер Минковского для прямоугольного параллелепипеда $P = ABCDA'B'C'D'$ в $\mathbb{E}^3$ с ребрами длины $|AB| = a$, $|AD| = b$, $|AA'| = c$, где $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$. Общеизвестные формулы для объема $W_0(P) = V(P) = abc$ и площади

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 8206, а также Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ, № НШ-921.2012.1.

поверхности $F(P) = 2(ab + ac + bc) = W_1(P)/3$ дополняются формулой $W_3(P) = 4\pi/3$ и $M(P) = \pi(a + b + c) = W_2(P)/3$ [3].

Для параллелепипеда P будем обозначать через $\partial(P)$ поверхность этого параллелепипеда (его границу в естественной топологии трехмерного евклидова пространства). Пусть $d(M, N)$ — геодезическое (внутреннее) расстояние между точками $M \in \partial(P)$ и $N \in \partial(P)$, т. е. минимум длин ломаных, лежащих в $\partial(P)$ и соединяющих точки M и N. Через $D(P)$ обозначим геодезический (внутренний, в другой терминологии) диаметр параллелепипеда P (точнее, его поверхности) — максимальное геодезическое (внутреннее) расстояние между парой точек на поверхности параллелепипеда. Отметим, что геодезическое расстояние на поверхности параллелепипеда обладает рядом интересных свойств, о которых можно узнать, например, из работ [1, 2].

Интересной задачей является нахождение экстремальных значений интегралов поперечных мер Минковского (исключая тривиальный случай константы $W_3 = 4\pi/3$) для прямоугольного параллелепипеда $P = ABCDA'B'C'D'$ с заданным геодезическим диаметром. Для удобства мы будем рассматривать также *вырожденные параллелепипеды*, что соответствует случаю $a = 0$.

Максимум площади поверхности был найден в [5] Ю. Г. Никоноровым и Ю. В. Никоноровой (минимум в данном случае, очевидно, равен 0 и достигается в точности на (вырожденном) параллелепипеде со свойством $b = a = 0$), он достигается на параллелепипеде с соотношением длин ребер $a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{2}$. В частности, для произвольных параллелепипедов выполняется соотношение $ab + ac + bc \leqslant \frac{1+2\sqrt{2}}{6}\,(D(P))^2$.

Произведенные автором численные расчеты для объема позволяют предположить, что максимальное значение объема достигается на параллелепипеде с таким же соотношением длин ребер $a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{2}$, как и в случае с площадью поверхности (минимум равен 0 и достигается в точности на вырожденных параллелепипедах).

В настоящей работе мы исследуем экстремальные значения *интеграла средней кривизны*. Основным результатом настоящей заметки является следующая

Теорема 1. *Среди всех прямоугольных параллелепипедов с заданным геодезическим диаметром наибольшее значение интеграла средней кривизны $M(P)$ достигается в точности на параллелепипеде с соотношением длин ребер $a : b : c = 0 : 1 : 1$, а наименьшее значение — на параллелепипеде с соотношением длин ребер $a : b : c = 0 : 0 : 1$. Таким образом, для произвольного прямоугольного параллелепипеда выполнено неравенство $\pi D(P) \leqslant M(P) \leqslant \pi\sqrt{2}D(P)$, где $D(P)$ — геодезический диаметр, а $M(P)$ — интеграл средней кривизны параллелепипеда P.*

В дальнейшем нам понадобятся некоторые результаты работы [5], которые мы для удобства читателей процитируем ниже. В частности, в [5] была получена явная формула для расчета внутреннего диаметра поверхности произвольного прямоугольного параллелепипеда.

Предложение 1 [5, теорема 1]**.** *Пусть $D(P)$ — это геодезический диаметр параллелепипеда P со сторонами длины $0 < a \leqslant b \leqslant c$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(I) *если $(a, b, c) \in \mathscr{ME}$, то $D(P) = \sqrt{(a + b)^2 + c^2}$;*

(II) *если $(a, b, c) \in \mathscr{M} \setminus \mathscr{ME}$ и $a^2b^2 \leqslant c^2(b - a)(a + b + 2c)$, то*

$$D(P) = \sqrt{b^2 + 3c^2 + 2b(a + c) - 2c\sqrt{(b + c)^2 - 2a(c - b) - a^2}};$$

(III) *если $(a, b, c) \in \mathscr{M} \setminus \mathscr{ME}$ и $a^2b^2 \geqslant c^2(b - a)(a + b + 2c)$, то $D(P) = l$, где l —*

единственный действительный корень уравнения

$$\sqrt{l^2-(a+c)^2}+\sqrt{l^2-(b+c)^2}+\sqrt{2l^2-(a+b+c)^2}=c,$$

удовлетворяющий неравенству $l \geqslant \max\{b+c, \sqrt{(a+b)^2+c^2}\}$. *Здесь*

$$\mathscr{M}=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:\ 0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\},$$

$$\mathscr{M}\mathscr{E}=\Big\{(a,b,c)\in\mathscr{M}:\ \sqrt{\max\{0,a^2+2ab-2bc\}} \\ +\sqrt{\max\{0,b^2+2ab-2ac\}}\geqslant 2c-a-b\Big\}. \tag{1}$$

Отметим, что для вырожденного параллелепипеда P (т. е. прямоугольника, поскольку $a=0$) его поверхностью $\partial(P)$ естественно считать дважды накрытый прямоугольник P, при этом его геодезический диаметр, очевидно, вычисляется по формуле $D(P)=\sqrt{b^2+c^2}$.

Нам понадобится еще один результат из [5].

Предложение 2 [5, лемма 2]**.** *Геодезическое расстояние между точками* A *и* C' *(т. е. геодезическое расстояние между двумя противолежащими вершинами параллелепипеда* P*) удовлетворяет равенству* $d(A,C')=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$.

Теперь мы можем доказать основное утверждение настоящей работы.

$\lhd$ Доказательство теоремы 1. Мы рассматриваем фиксированное отличное от нуля значение диаметра $D(P)$. Поэтому для всех параллелепипедов с таким диаметром обязательно выполнено неравенство $c>0$.

Заметим, что для *вырожденных параллелепипедов* ($a=0$) неравенство $\pi D(P)\leqslant M(P)\leqslant \pi\sqrt{2}D(P)$ принимает вид $\pi\sqrt{b^2+c^2}\leqslant \pi(b+c)\leqslant \pi\sqrt{2}\sqrt{b^2+c^2}$. Справедливость последнего неравенства очевидна. Понятно также, что $\sqrt{b^2+c^2}=b+c$ в точности при $b=0$, $b+c=\sqrt{2}\sqrt{b^2+c^2}$ — в точности при $b=c$. Таким образом, нам осталось доказать неравенство $\pi D(P)<M(P)<\pi\sqrt{2}D(P)$ для всех невырожденных параллелепипедов ($a>0$).

Сначала займемся доказательством *оценки сверху* для интеграла средней кривизны $M(P)$. По предложению 2 геодезическое расстояние между двумя противолежащими вершинами определяется формулой $\sqrt{(a+b)^2+c^2}$. Следовательно, для произвольного прямоугольного параллелепипеда P с длинами ребер $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c$ выполнено неравенство

$$D(P)\geqslant\sqrt{(a+b)^2+c^2}. \tag{2}$$

Далее, из неравенства

$$(D(P))^2\geqslant(a+b)^2+c^2=\frac{1}{2}(a+b+c)^2+\frac{1}{2}(a+b-c)^2\geqslant\frac{1}{2}(a+b+c)^2$$

следует $\sqrt{2}D(P)\geqslant a+b+c$, что эквивалентно неравенству $\pi\sqrt{2}D(P)\geqslant M(P)$.

Определим теперь случаи, когда последнее неравенство обращается в равенство. Из предложений 1 и 2 следует, что это равенство не может быть выполнено при $(a,b,c)\notin\mathscr{M}\mathscr{E}$ (см. (1)), поскольку в этом случае $D(P)>\sqrt{(a+b)^2+c^2}$. Поэтому мы можем считать, что $(a,b,c)\in\mathscr{M}\mathscr{E}$ и $D(P)=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$.

Понятно, что равенство $\sqrt{2}\sqrt{(a+b)^2+c^2}=a+b+c$ эквивалентно равенству $c=a+b$. Осталось проверить, какие значения $(a,b,c)\in\mathscr{M}\mathscr{E}$ удовлетворяют условию $c=a+b$.

Первое подкоренное выражение из (1) при $c=a+b$ примет следующий вид:

$$a^2+2ab-2bc=(a+b)^2-2bc-b^2=c^2-2bc-b^2=(c-b)^2-2b^2=a^2-2b^2.$$

Поскольку $a^2 - 2b^2 \leqslant 0$, то $m_1 := \max\{0, a^2 + 2ab - 2bc\} = 0$. Аналогично второе подкоренное выражение в формуле (1) принимает вид $b^2 + 2ab - 2ac = b^2 - 2a^2$. Нас интересует случай, когда $b^2 - 2a^2 > 0$, тогда $m_2 := \max\{0, b^2 + 2ab - 2ac\} = b^2 - 2a^2$ (в противном случае неравенство в формуле (1) принимает вид $0 = \sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} \geqslant 2c - a - b = a + b$, откуда $a = b = c = 0$, что мы не рассматриваем).

Подставив найденные выражения в формулу (1), получаем

$$\sqrt{b^2 - 2a^2} = \sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} \geqslant 2c - a - b = a + b.$$

Последнее неравенство выполнено только при $a = 0$ и $b = c$, что соответствует уже разобранному случаю вырожденных параллелепипедов. Таким образом, наибольшее значение интеграла средней кривизны $M(P)$ достигается в точности на прямоугольных параллелепипедах с соотношением длин ребер $a : b : c = 0 : 1 : 1$.

Теперь перейдем к *оценке снизу* интеграла средней кривизны $M(P)$. Нам требуется доказать неравенство

$$a + b + c > D(P) \tag{3}$$

для всех невырожденных параллелепипедов. Мы исследуем все три различных выражения для геодезического диаметра параллелепипеда в соответствии с предложением 1.

Рассмотрим сначала случай (I) в предложении 1. Неравенство (3) в данном случае выглядит следующим образом:

$$a + b + c > \sqrt{(a+b)^2 + c^2}. \tag{4}$$

Очевидно, что $a + b + c \geqslant \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$, а равенство здесь выполняется лишь при $a = b = 0$, что соответствует случаю вырожденных параллелепипедов. Таким образом, неравенство (4) выполнено.

В случае (II) предложения 1 (при $a^2b^2 \leqslant c^2(b-a)(a+b+2c)$) следует доказать неравенство

$$a + b + c > \sqrt{b^2 + 3c^2 + 2b(a+c) - 2c\sqrt{(b+c)^2 - 2a(c-b) - a^2}}. \tag{5}$$

Приведем цепочку эквивалентных неравенств:

$$4c^2\big((b+c)^2 - 2a(c-b) - a^2\big) > 4c^4 - 8ac^3 + 4a^3c + a^4,$$

$$b^2 + 2(a+c)b - \left(a^2 + \frac{a^3}{c} + \frac{a^4}{4c^2}\right) > 0.$$

Решив относительно b уравнение

$$b^2 + 2(a+c)b - \left(a^2 + \frac{a^3}{c} + \frac{a^4}{4c^2}\right) = 0,$$

получим

$$b = -2a - 2c - \frac{a^2}{2c}, \quad b = \frac{a^2}{2c}.$$

Теперь ясно, что неравенство (5) справедливо при $b > \frac{a^2}{2c}$ (для $0 < a \leqslant b \leqslant c$) и, следовательно, при $b \geqslant a\big(> \frac{a^2}{2c}\big)$.

В случае (III) предложения 1 выполняется неравенство $a^2b^2 \geqslant c^2(b-a)(a+b+2c)$ (которое мы не будем использовать), а число l удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{l^2 - (a+c)^2} + \sqrt{l^2 - (b+c)^2} + \sqrt{2l^2 - (a+b+c)^2} = c.$$

Нам следует доказать неравенство

$$a + b + c > l. \tag{6}$$

Поскольку

$$c = \sqrt{l^2 - (a+c)^2} + \sqrt{l^2 - (b+c)^2} + \sqrt{2l^2 - (a+b+c)^2} \geqslant \sqrt{2l^2 - (a+b+c)^2},$$

то $c^2 \geqslant 2l^2 - (a+b+c)^2$ и (поскольку обязано выполняться неравенство $l \geqslant c$)

$$(a+b+c)^2 \geqslant 2l^2 - c^2 \geqslant 2l^2 - l^2 = l^2,$$

причем равенство $a+b+c = l$ (как нетрудно заметить) влечет равенства $c = l$ и $a = b = 0$. Следовательно, мы доказали неравенство (6) для невырожденных параллелепипедов.

Таким образом, наименьшее значение интеграла средней кривизны $M(P)$ достигается в точности на прямоугольных параллелепипедах с соотношением длин ребер $a : b : c = 0 : 0 : 1$. $\triangleright$

Литература

1. *Вялый М. Н.* Кратчайшие пути по поверхности параллелепипеда // Мат. просвещение. Сер. 3.—М.: МЦНМО, 2005.—Вып. 9.—С. 203–206.
2. *Никоноров Ю. Г., Никонорова Ю. В.* О внутреннем расстоянии на поверхности параллелепипеда // Тр. Рубцовского индустр. ин-та.—2000.—Вып. 9.—С. 222–228.
3. *Сантало Л. А.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности.—М.: Наука, 1983.—360 с.
4. *Хадвигер Г.* Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии.— М.: Наука, 1966.—416 с.
5. *Nikonorov Yu. G., Nikonorova Yu. V.* The intrinsic diameter of the surface of a parallelepiped // Discrete and Computational Geometry.—2008.—Vol. 40.—P. 504–527.

Статья поступила 2 декабря 2011 г.

Рассказова Наталья Владимировна
Рубцовский индустриальный институт
(филиал) ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный
технический университет им. И. И. Ползунова»,
старший преподаватель кафедры прикладной математики
РОССИЯ, 658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6
E-mail: `ras_na@mail.ru`

EXTREMAL VALUES OF THE INTEGRAL OF THE MEAN CURVATURE ON THE SET OF PARALLELEPIPEDS WITH A GIVEN GEODESIC DIAMETER

Rasskazova N. V.

In the paper, extremal values of the mean curvature integral on set of parallelepipeds with a given geodesic diameter are obtained. The maximal (minimal) value of the integral of mean curvature is attained for a degenerate parallelepiped with relation $0 : 1 : 1$ ($0 : 0 : 1$, respectively) for its edge lengths.

Key words: rectangular parallelepiped, intrinsic diameter, integral of average curvature.