Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 3, С. 7–18

УДК **517.547**

О ПРОБЛЕМЕ ДЕЛЕНИЯ В НЕРАДИАЛЬНЫХ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Д. А. Абанина, А. В. Кузьминова

В работе рассматривается индуктивное весовое пространство целых функций $H^{1;\infty}_{u,v}$, задаваемое последовательностью нерадиальных двучленных весов $\{q_n u(|z|) + nv(|\operatorname{Im} z|)\}_{n=1}^{\infty}$, где $0 < q_n \uparrow 1$. При дополнительном предположении на функцию v в пространстве $H^{1;\infty}_{u,v}$ установлена теорема деления. Получен также ряд результатов, касающихся выметания масс на границу круга субгармонической функции $v(|\operatorname{Im} z|)$.

Ключевые слова: пространство целых функций, теорема деления, субгармоническая функция.

Введение

Как известно, задача о разрешимости уравнения свертки в различных пространствах бесконечно дифференцируемых и аналитических функций обычно эквивалентна проблеме деления для его символа. Более точно, пусть E и F — некоторые локально выпуклые пространства бесконечно дифференцируемых или аналитических функций; A и B — пространства целых функций, представляющие собой изоморфные реализации сопряженных пространств E' и F' (с помощью преобразования Фурье — Лапласа и др.); μ — мультипликатор пары пространств A и B, т. е. такая целая функция, что $\mu A \subset B$; T_μ — оператор свертки с символом μ, действующий из E в F. Тогда оператор T_μ сюръективен в том и только в том случае, если μ является делителем пары A и B, т. е. если из того, что $g \in B$, $\frac{g}{\mu} \in H(\mathbb{C})$, следует, что $\frac{g}{\mu} \in A$. Впервые это было независимо установлено Б. Мальгранжем и Л. Эренпрайсом для оператора свертки в пространстве $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (по этому поводу см. [1, с. 40–41]). Затем Л. Эренпрайс в [2] получил необходимое и достаточное условие на символ μ, названное условием медленного убывания и формулируемое через оценки роста на бесконечности, при котором соответствующий оператор свертки $T_\mu : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ сюръективен. Заметим, что в этом случае символ представляет собой функцию из алгебры целых функций f, рост которых на бесконечности ограничен весом $n\ln(1+|z|) + n|\operatorname{Im} z|$ при некотором $n = n(f) \in \mathbb{N}$.

В дальнейшем было множество работ (см., например, [3–12]), посвященных сюръективности операторов свертки и теореме деления в различных пространствах. В основе всех доказательств лежит предложенный О. В. Епифановым и В. А. Ткаченко метод (см. [5, 6]), основанный на процедуре выметания масс субгармонической функции на границу круга.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашения № 14.A18.21.0356 и № 8210, а также гранта ЮФУ № 213.01-24/2013-63 «Весовые пространства бесконечно дифференцируемых функций. Общая теория и приложения».

Остановимся подробнее на результатах, касающихся операторов свертки в так называемых классах ультрадифференцируемых функций (УДФ). Теория УДФ и ультрараспределений возникла в 60-е годы XX века благодаря работам Ш. Румье [13], А. Берлинга и Г. Бьорка [14]. В конце XX века она была значительно модифицирована и дополнена группой немецких и американских математиков (см. [15]). Первоначально, основное внимание уделялось классам УДФ Берлинга максимального типа и классам Румье минимального типа, задаваемым соответственно весовыми последовательностями $(n\omega)_{n=1}^{\infty}$ и $\left(\frac{1}{n}\,\omega\right)_{n=1}^{\infty}$, где $\omega = \omega(t)$ — некоторая весовая функция. В частности, в [7] для пространств Берлинга максимального типа была решена задача о сюръективности оператора свертки. Или, другими словами, в сопряженном пространстве, которое представляет собой алгебру целых функций, рост которых на бесконечности ограничен весом $n\omega(|z|) + n|\operatorname{Im} z|$, $n \in \mathbb{N}$, была установлена теорема деления. Вслед за [2] соответствующее необходимое и достаточное условие на символ также было названо условием медленного убывания. Позднее в [11] З. Момм доказал теорему деления для более общих алгебр целых функций, задаваемых нерадиальными двучленными весами $nu(|z|) + nv(|\operatorname{Im} z|)$, $n \in \mathbb{N}$, где u и v — некоторые весовые функции.

В последнее десятилетие достаточно интенсивно изучаются классы УДФ Берлинга и Румье нормального типа, задаваемые последовательностями $(q_n\omega)_{n=1}^{\infty}$, где $q_n \uparrow 1$ либо $q_n \downarrow 1$ (см. [16–18]). Проведенные исследования выявили ряд существенных отличий данных пространств от предельных случаев. В [17] задача о сюръективности оператора свертки была решена для пространств УДФ Берлинга нормального типа. Основной результат из [17] (теорема 2) полностью характеризует все символы сюръективных операторов свертки, т. е. все делители сопряженного пространства — пространства целых функций, задаваемого весами $q_n\omega(|z|) + n|\operatorname{Im} z|$, $n \in \mathbb{N}$, $q_n \uparrow 1$. Следует отметить, что и в [17], хоть и со значительными техническими трудностями, был реализован упоминавшийся выше традиционный метод.

В свете работы [11] теперь представляется интересным рассмотреть проблему деления в пространстве целых функций, задаваемом двучленными весами $q_n u(|z|) + nv(|\operatorname{Im} z|)$, где $q_n \uparrow 1$, u и v — весовые функции. Этому и посвящена настоящая работа. Была сделана попытка распространить существующую методику, основанную, как уже говорилось выше, на выметании масс субгармонической функции $v(|\operatorname{Im} z|)$, на данные пространства. Однако, их специфика: одновременное наличие второго веса v (по сравнению с [17]) и конечность коэффициента перед весом u (по сравнению с [11]) — выявила ряд новых и неожиданных эффектов, которые не позволяют получить законченный результат в случае произвольных весов. Тем не менее, на основе проведенного анализа было сформулировано ограничение на вес v, при котором для указанных пространств удалось установить теорему деления. В этом заключается основной результат работы (теорема 1). Кроме того, в работе указываются классы весов, удовлетворяющие этому дополнительному предположению и не удовлетворяющие ему. Это позволяет говорить о теореме 1 как о значительном обобщении теоремы 2 из [17].

Структура работы следующая. В § 1 вводятся весовые функции u и v, определяется изучаемое пространство целых функций $H_{u,v}^{1,\infty}$ и описывается множество всех его мультипликаторов, из которого в дальнейшем будет выделяться подкласс делителей. В § 2 формулируется и доказывается основной результат работы — теорема деления для пространства $H_{u,v}^{1,\infty}$. При этом подробно излагаются лишь те моменты доказательств, которые существенно отличны от [17]. Все аналогичные рассуждения опущены. Наконец, § 3 посвящен выметанию масс субгармонической функции $v(|\operatorname{Im} z|)$ и анализу дополнительного ограничения на вес v, при котором установлена теорема 1. Результаты § 3 представляют самостоятельный интерес и относятся больше, по-видимому, к теории субгармонических функций.

1. Пространство целых функций $H_{u,v}^{1,\infty}$

Всюду далее веса u и v — это непрерывные неубывающие на $[0,\infty)$ функции, удовлетворяющие условиям:

$$
\begin{array}{ll}
(\alpha)\ u(2t) = O\big(u(t)\big),\ t\to\infty; & (\alpha_1)\ v(2t) = O\big(v(t)\big),\ t\to\infty;\\
(\gamma)\ \ln t = o\big(u(t)\big),\ t\to\infty; & (\delta_1)\ v(t) \text{ выпукла на } [0,\infty);\\
(\delta)\ u(e^x) \text{ выпукла на } [0,\infty); & (\zeta)\ u(t) = O\big(v(t)\big),\ t\to\infty.
\end{array}
$$

Заметим, что условия (α), (γ) и (δ) идентичны соответствующим условиям на вес ω при определении классов УДФ (см. [15–18]); ограничения (α_1) и (δ_1) на функцию v те же, что и в [11]; между собой веса u и v связываются естественным соотношением (ζ). В [11] использовалось более жесткое условие $u(t) = o\big(v(t)\big)$, которое нам удается ослабить за счет различия коэффициентов перед весами u и v в определении пространств нормального типа.

Веса u и v обладают следующим полезным свойством (см. [16]):

$$
\lim_{r\downarrow 1}\varlimsup_{t\to\infty}\frac{u(rt)}{u(t)} = \lim_{r\downarrow 1}\varlimsup_{t\to\infty}\frac{v(rt)}{v(t)} = 1\,. \tag{1}
$$

Без ограничения общности можно считать, что $u(0) = v(0) = 0$. Обозначим еще $u(z) := u(|z|)$, $v(z) := v(|z|)$, $z\in\mathbb{C}$.

Для положительных чисел q и l введем в рассмотрение следующее банахово пространство целых функций:

$$
H_{qu,\,lv} := \left\{ f\in H(\mathbb{C}):\ \|f\|_{qu,\,lv} = \sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|f(z)|}{e^{qu(z)+lv(\operatorname{Im} z)}} < \infty \right\}.
$$

Основным изучаемым пространством будет

$$
H_{u,v}^{1,\infty} := \bigcup_{q\in(0,1)}\ \bigcup_{l\in(0,\infty)} H_{qu,\,lv} = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{q_n u,\,nv},
$$

где $0 < q_n \uparrow 1$. Пространство $H_{u,v}^{1,\infty}$ наделяется естественной индуктивной топологией $\operatorname{ind}_n H_{q_n u,\,nv}$ и является в ней (DFS)-пространством (см. [19]).

Нетрудно видеть, что пространство $H_{u,v}^{1,\infty}$ не является алгеброй (так же, как в [17], и в отличие от [7, 11]). Аналогично [17, теорема 1] имеет место

Предложение 1. *Множеством всех мультипликаторов пространства $H_{u,v}^{1,\infty}$ является $M(H_{u,v}^{1,\infty}) = \big\{\mu\in H(\mathbb{C}) : (\forall\,\varepsilon>0)\ (\exists\, l>0)\ \|\mu\|_{\varepsilon u,\,lv}<\infty\big\}$, причем каждый мультипликатор $\mu\in M(H_{u,v}^{1,\infty})$ непрерывен, т. е. соответствующий оператор умножения $\Lambda_\mu : f\mapsto \mu f$ действует непрерывно в $H_{u,v}^{1,\infty}$.*

Как обычно, нетривиальный мультипликатор μ пространства $H_{u,v}^{1,\infty}$ будет его делителем тогда и только тогда, когда образ $\operatorname{Im}\Lambda_\mu$ оператора умножения Λ_μ замкнут в $H_{u,v}^{1,\infty}$ (см. §2). Поэтому сформулируем функциональный критерий замкнутости $\operatorname{Im}\Lambda_\mu$. Он аналогичен [17, лемма 2], так что доказательство здесь опускаем.

Предложение 2. *Пусть μ — нетривиальный мультипликатор из $M(H^{1,\infty}_{u,v})$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i$_1$) $\operatorname{Im}\Lambda_\mu$ *замкнут в* $H^{1,\infty}_{u,v}$*;*

(i$_2$) $\Lambda_\mu : H^{1,\infty}_{u,v} \to H^{1,\infty}_{u,v}$ *— топологический изоморфизм «в»;*

(i$_3$) *если семейство* $B \subset H^{1,\infty}_{u,v}$ *таково, что* μB *содержится и ограничено в некотором* $H_{q_n u,\, nv}$*, то найдется* $m \in \mathbb{N}$ *такое, что* B *содержится и ограничено в* $H_{q_m u,\, mv}$*;*

(i$_4$) *для любого* $n \in \mathbb{N}$ *существуют* $m \in \mathbb{N}$ *и* $C > 0$ *такие, что*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{q_m u(z)+mv(\operatorname{Im} z)}} \leqslant C \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)\, f(z)|}{e^{q_n u(z)+nv(\operatorname{Im} z)}}, \quad f \in H^{1,\infty}_{u,v}.$$

Замечание. Так же, как в [17, лемма 1] и [18, лемма 1], проверяется, что в определении пространств $H^{1,\infty}_{u,v}$, $M(H^{1,\infty}_{u,v})$ и в условии (i_4) можно заменить $u(z)$ на $u(\operatorname{Re} z)$.

2. Основной результат

Прежде чем сформулировать основной результат работы, сделаем несколько предварительных замечаний. Как уже говорилось выше, в основе традиционного метода лежит процедура выметания масс субгармонической функции $v(\operatorname{Im} z)$ на границу круга $K_{0,R} = \{z : |z| \leqslant R\}$, результатом которой является функция

$$V(z) := \begin{cases} v(\operatorname{Im} z), & |z| \geqslant R, \\ \frac{R^2-r^2}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{v(R\sin\theta)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)}\, d\theta, & z = re^{i\varphi},\ r \in [0,R),\ \varphi \in [0,2\pi). \end{cases} \tag{2}$$

Функция $V(z)$ непрерывна и субгармонична в $\mathbb{C}$ и гармонична в $K_{0,R}$, причем $V(z) \geqslant v(\operatorname{Im} z)$ в $\mathbb{C}$.

При проведении исследований большое значение имеет «дефект субгармоничности» функции $v(\operatorname{Im} z)$, т. е. разность $V(z) - v(\operatorname{Im} z)$. До сих пор он всегда оценивался через $V(0)$. В случае пространств максимального типа (см. [7, 11]), поскольку константы перед весами можно увеличивать неограниченно, использовалась очень грубая оценка (см. [11, с. 48]):

$$V(z) - v(\operatorname{Im} z) \leqslant V(z) \leqslant \frac{1}{\delta}\, V(0) + \frac{C}{\delta}\,.$$

Здесь C и δ — некоторые положительные постоянные, не зависящие от R. Пространства нормального типа потребовали уже более точных оценок. В [17, лемма 3] для случая $v(t) = t$ было доказано, что имеет место неравенство

$$(\mathrm{A}_0)\ V(z) - v(\operatorname{Im} z) \leqslant V(0), \quad z \in K_{0,R}.$$

Предполагалось, что данная оценка справедлива и для других функций v. Это позволило бы распространить традиционную схему на более общие системы весов. Однако, как оказалось (см. § 3), это не так. В связи с этим в дальнейших исследованиях возможны два пути. Первый естественный путь обсуждается в настоящей работе и заключается в наложении дополнительных ограничений на функцию v, при которых удастся реализовать стандартный метод и установить для рассматриваемых пространств теорему деления. Именно, проведенный анализ показал, что даже для «тонкого» случая пространств нормального типа будет достаточно выполнения следующего, несколько более слабого, чем (A_0), условия:

(A) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $R_0 > 0$ такое, что при $R \geqslant R_0$ справедливо неравенство

$$V(z) - v(\operatorname{Im} z) \leqslant (1+\varepsilon)V(0), \quad z \in K_{0,R}.$$

Обсуждению условия (A) посвящен § 3.

В качестве альтернативного метода возможен отказ от традиционной оценки дефекта субгармоничности через $V(0)$. В этом случае придется задействовать точку z_R в круге $K_{0,R}$, в которой дефект субгармоничности максимален. Исследования в данном направлении в настоящей работе и, насколько нам известно, в других работах не проводились.

Итак, основным результатом работы является следующая теорема деления для пространства $H^{1,\infty}_{u,v}$.

Теорема 1. *Пусть u и v — весовые функции, причем функция v обладает свойством (A); μ — нетривиальный мультипликатор пространства $H^{1,\infty}_{u,v}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *μ — делитель $H^{1,\infty}_{u,v}$;*

(ii) *образ $\operatorname{Im}\Lambda_\mu$ оператора умножения Λ_μ замкнут в $H^{1,\infty}_{u,v}$;*

(iii) $\forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, r_0 > 0 : \forall\, x \in \mathbb{R}$ *с* $|x| \geqslant r_0\ \exists\, w \in \mathbb{C}$:

$$|w - x| \leqslant \delta v^{-1}(u(x)) \quad \text{и} \quad |\mu(w)| \geqslant e^{-\varepsilon u(w)};$$

(iv) $\forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, r_0 > 0 \mid \forall\, x \in \mathbb{R}$ *с* $|x| \geqslant r_0\ \exists\, t \in \mathbb{R}$ (*с* $|t| > |x|$) :

$$|t - x| \leqslant \delta v^{-1}(u(x)) \quad \text{и} \quad |\mu(t)| \geqslant e^{-\varepsilon u(t)};$$

(v) $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, \delta_\varepsilon > 0 :\ \forall \delta \in (0, \delta_\varepsilon)\ \exists\, r_0 > 0,\ \exists\, L > 0,\ \exists c > 0$: *для любого $z \in \mathbb{C}$ с $|z| \geqslant r_0$ найдется окружность C_z, содержащая точку z внутри себя и обладающая следующими свойствами:*

(a) *если $|\operatorname{Im} z| \leqslant \delta v^{-1}(u(\operatorname{Re} z))$, то для всех $\zeta \in C_z$*

$$|\operatorname{Re}\zeta - \operatorname{Re} z| \leqslant 6\delta v^{-1}(u(\operatorname{Re} z)),\ |\operatorname{Im} z| \leqslant 6\delta v^{-1}(u(\operatorname{Re} z)) \ \text{ и } \ |\mu(\zeta)| \geqslant e^{-\varepsilon u(\operatorname{Re}\zeta)};$$

(b) *если $|\operatorname{Im} z| > \delta v^{-1}(u(\operatorname{Re} z))$, то для всех $\zeta \in C_z$*

$$|\operatorname{Re}\zeta - \operatorname{Re} z| \leqslant |\operatorname{Im} z|,\ |\operatorname{Im}\zeta - \operatorname{Im} z| \leqslant |\operatorname{Im} z| \ \text{ и } \ |\mu(\zeta)| \geqslant c\, e^{-Lv(\operatorname{Im}\zeta)}.$$

Как следует из результатов § 3, сформулированный результат является нетривиальным обобщением теоремы 2 из [17], установленной для случая $v(t) = t$. Доказательство, как и в [17], проводится по схеме (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i); импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) носит общий характер. При этом существенно отличается от [17] лишь доказательство утверждения (ii) $\Rightarrow$ (iii). Поэтому его мы приведем подробно, а остальное опустим.

Итак, пусть $\operatorname{Im}\Lambda_\mu$ замкнут в $H^{1,\infty}_{u,v}$. Предположим, что условие (iii) нарушено, т. е. что имеются $\varepsilon_0, \delta_0 \in (0,1)$ и последовательность $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ вещественных чисел с $|a_j| \uparrow +\infty$ такие, что для каждого $j \in \mathbb{N}$

$$|\mu(w)| < e^{-\varepsilon_0 u(w)} \quad \text{при всех } \ w \in \mathbb{C}:\ |w - a_j| \leqslant \delta_0 v^{-1}(u(a_j)). \tag{3}$$

Пусть для определенности $a_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$.

Сделаем несколько предварительных замечаний. Условие (ζ) позволяет считать, что

$$u(t) \leqslant Av(t), \quad t \geqslant 0,$$

при некотором $A > 1$. В силу вогнутости v^{-1}, из этого следует, что

$$v^{-1}(u(t)) \leqslant v^{-1}(Av(t)) \leqslant At, \quad t \geqslant 0. \tag{4}$$

Предполагаем сразу δ_0 настолько малым, что $\delta_0 A < \frac{1}{2}$.

Далее, так как имеют место условие (α_1) и равенства (1), то найдутся $K > 0$, $t_0 > 0$ и $C_1 > 0$ такие, что при всех $t \geqslant t_0$ выполняются неравенства

$$u(t) \leqslant \Big(1 + \frac{\varepsilon_0}{8}\Big) u\big((1-\delta_0 A)t\big);$$

$$u(t+1) \leqslant \Big(1 + \frac{\varepsilon_0}{4}\Big) u(t) + C_1, \quad v(t+1) \leqslant 2v(t) + C_1\,; \tag{5}$$

$$v\Big(\frac{\delta_0}{\pi}\, t\Big) > Kv(t)\,. \tag{6}$$

Будем предполагать, что $a_1 > t_0$ и $a_{j+1} > 3a_j$. Тогда, во-первых,

$$u(a_j) \leqslant \Big(1 + \frac{\varepsilon_0}{8}\Big)\, u\big((1-\delta_0 A)a_j\big), \quad j \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

А во-вторых, круги $|w - a_j| \leqslant \delta_0 v^{-1}(u(a_j))$ попарно не пересекаются, так как на основании (4)

$$\begin{aligned} &\big[a_{j+1} - \delta_0 v^{-1}(u(a_{j+1}))\big] - \big[a_j + \delta_0 v^{-1}(u(a_j))\big] \\ &\geqslant (a_{j+1} - a_j) - \delta_0 A\,(a_{j+1} + a_j) \geqslant \frac{1}{2}(a_{j+1} - 3a_j) > 0. \end{aligned}$$

Пусть числа R_j, $j \in \mathbb{N}$, определяются равенствами

$$\frac{2}{\pi K} \int\limits_0^{\pi/2} v(R_j \sin\theta)\, d\theta = u(a_j).$$

Очевидно, можно считать, что $R_1 > t_0$. Используя интегральное неравенство Йенсена и оценку (6), имеем:

$$u(a_j) \geqslant \frac{1}{K}\, v\Bigg(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} R_j \sin\theta\, d\theta\Bigg) = \frac{1}{K}\, v\Big(\frac{2R_j}{\pi}\Big) = \frac{1}{K}\, v\Big(\frac{2R_j}{\delta_0}\frac{\delta_0}{\pi}\Big) > v\Big(\frac{2R_j}{\delta_0}\Big),$$

откуда $2R_j < \delta_0 v^{-1}(u(a_j))$.

1) Осуществим процедуру выметания масс для функции $\frac{1}{K}\, v(\operatorname{Im} z)$ и круга $K_{a_j, R_j} = \{z : |z - a_j| < R_j\}$. В результате получим функцию $V_j(z)$, непрерывную и субгармоническую в $\mathbb{C}$, гармоническую в K_{a_j, R_j}. При этом

$$V_j(z) = \frac{1}{K}\, v(\operatorname{Im} z), \quad \text{если } |z - a_j| \geqslant R_j;\ \ V_j(a_j) = u(a_j);$$

$$V_j(z) \leqslant \Big(1 + \frac{\varepsilon_0}{8}\Big) u(a_j) + \frac{1}{K}\, v(\operatorname{Im} z), \quad \text{если } |z - a_j| < R_j.$$

Последнее неравенство выполнено в силу свойства (A) функции v (в случае необходимости R_1 или, что то же самое, a_1 можно увеличить). Для $z \in \mathbb{C}$ с $|z - a_j| < R_j$ на основании (4) и (7) имеем:

$$\begin{aligned} \Big(1 + \frac{\varepsilon_0}{8}\Big) u(z) &\geqslant \Big(1 + \frac{\varepsilon_0}{8}\Big) u(a_j - R_j) \geqslant \Big(1 + \frac{\varepsilon_0}{8}\Big) u\big(a_j - \delta_0 v^{-1}(u(a_j))\big) \\ &\geqslant \Big(1 + \frac{\varepsilon_0}{8}\Big) u((1-\delta_0 A)a_j) \geqslant u(a_j). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$V_j(z) \leqslant \Big(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\Big)u(z)+\frac{1}{K}\,v(\operatorname{Im} z), \quad z\in\mathbb{C}. \tag{8}$$

2) Используя [20, лемма 4], [21, лемма 1], по функции $V_j(z)$ и точке a_j строим целую функцию f_j такую, что

$$f_j(a_j)=e^{V_j(a_j)}=e^{u(a_j)}; \tag{9}$$

$$|f_j(z)| \leqslant \widetilde{A}\big(1+|z|^2\big)^2 e^{V_j^1(z)}, \quad z\in\mathbb{C}. \tag{10}$$

Здесь $V_j^1(z) := \sup\{V_j(z+w) : |w|\leqslant 1\}$, а $\widetilde{A}$ — абсолютная постоянная, которая от j не зависит.

В силу условия (γ) на вес u, найдется $C_2>0$ такое, что

$$\big(1+|z|^2\big)^2 \leqslant C_2 e^{\frac{\varepsilon_0}{8}\,u(z)}, \quad z\in\mathbb{C}. \tag{11}$$

Продолжим теперь оценку (10), рассматривая отдельно случаи $|z-a_j|\geqslant 2R_j$, $|z-a_j|<2R_j$.

а) Если $|z-a_j|\geqslant 2R_j$, то для всех w с $|w|\leqslant 1$ точка $z+w$ находится вне K_{a_j,R_j}, так что на основании (5)

$$V_j(z+w)=\frac{1}{K}\,v(\operatorname{Im} z+\operatorname{Im} w)\leqslant \frac{1}{K}\,v(|\operatorname{Im} z|+1)\leqslant \frac{2}{K}\,v(\operatorname{Im} z)+\frac{C_1}{K}.$$

Подставляя эту оценку и (11) в (10), получаем, что в этом случае

$$|f_j(z)|\leqslant C_2\widetilde{A}\,e^{\frac{C_1}{K}}\cdot e^{\frac{\varepsilon_0}{8}\,u(z)+\frac{2}{K}\,v(\operatorname{Im} z)}. \tag{12}$$

б) Если $|z-a_j|<2R_j$, то в силу (8) и (5) для всех w с $|w|\leqslant 1$ справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} V_j(z+w) &\leqslant \Big(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\Big)u(|z|+1)+\frac{1}{K}\,v(|\operatorname{Im} z|+1)\\ &\leqslant \Big(1+\frac{3\varepsilon_0}{4}\Big)u(z)+\frac{2}{K}\,v(\operatorname{Im} z)+\Big(2+\frac{1}{K}\Big)C_1. \end{aligned}$$

Следовательно, возвращаясь к (10), для рассматриваемых z имеем:

$$|f_j(z)|\leqslant C_2\widetilde{A}\,e^{(2+\frac{1}{K})C_1}\cdot e^{\left(1+\frac{7\varepsilon_0}{8}\right)u(z)+\frac{2}{K}\,v(\operatorname{Im} z)}. \tag{13}$$

3) Покажем теперь, что для семейства $\{f_j : j\in\mathbb{N}\}$ нарушается условие (i_3) критерия замкнутости $\operatorname{Im}\Lambda_\mu$ в $H_{u,v}^{1,\infty}$. Действительно, из (12), очевидно, вытекает, что $f_j\in H_{u,v}^{1,\infty}$, $j\in\mathbb{N}$. При этом в силу (9)

$$\|f_j\|_{q_n u,\,nv}\geqslant \frac{|f_j(a_j)|}{e^{q_n u(a_j)}}=e^{(1-q_n)u(a_j)}\to\infty, \quad j\to\infty,$$

так что семейство $\{f_j : j\in\mathbb{N}\}$ не ограничено ни в одном $H_{q_n u,\,nv}$.

Рассмотрим теперь семейство $\{\mu f_j : j\in\mathbb{N}\}$. Так как $\mu\in M(H_{u,v}^{1,\infty})$, то найдутся $l_0>0$ и $C_3>0$ такие, что

$$|\mu(z)|\leqslant C_3\,e^{\frac{\varepsilon_0}{4}\,u(z)+l_0 v(\operatorname{Im} z)}, \quad z\in\mathbb{C}.$$

Обозначим $l := \frac{2}{K}+l_0$, $C := C_2C_3\widetilde{A}\,e^{(2+\frac{1}{K})C_1}$. Тогда в случае $|z-a_j|\geqslant 2R_j$ на основании (12) имеем:

$$|\mu(z)f_j(z)|\leqslant C\,e^{\frac{\varepsilon_0}{2}\,u(z)+lv(\operatorname{Im} z)}.$$

Если же $|z-a_j|<2R_j<\delta_0 v^{-1}(u(a_j))$, то с учетом (3) и (13)

$$|\mu(z)f_j(z)|\leqslant C\,e^{(1-\frac{\varepsilon_0}{8})u(z)+lv(\operatorname{Im} z)}.$$

Таким образом, семейство $\{\mu f_j : j\in\mathbb{N}\}$ будет ограничено в $H_{q_n u,nv}$, если $q_n>1-\frac{\varepsilon_0}{8}$. Значит, условие ($\mathrm{i}_3$) нарушено, что противоречит замкнутости $\operatorname{Im}\Lambda_\mu$. Тем самым импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii), а вместе с ней и вся теорема, доказана.

3. Выметание масс субгармонической функции $v(\operatorname{Im} z)$

Настоящий параграф посвящен изучению ограничения (A) на дефект субгармоничности функции $v(\operatorname{Im} z)$, при котором установлен основной результат работы. Итак, пусть $V(z)$ — гармоническое продолжение функции $v(\operatorname{Im} z)$ в круг $K_{0,R}$, определяемое формулой (2). Сначала приведем некоторые общие свойства функции $V(z)$.

Лемма 1. *Имеют место соотношения:*
1) $V(re^{i\varphi})=V(re^{i(\pi\pm\varphi)})=V(re^{i(2\pi-\varphi)}),\ \ 0\leqslant r<R,\ \ \varphi\in[0,2\pi)$;
2) $V(\pm r)\leqslant V(0),\ \ 0\leqslant r<R$.

$\lhd$ 1) Первое утверждение легко проверяется непосредственно.
2) Для $r\in[0,R]$ запишем функцию $V(r)$ в виде

$$V(r)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}\,v(R\sin\theta)\,d\theta.$$

Продифференцировав по r, сделав в полученном интеграле замену $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=t$ и обозначив $\frac{R-r}{R+r}=\lambda\in[0,1]$, получим, что

$$V'(r)=\frac{4R}{\pi(R+r)^2}\Bigg[\int\limits_0^\lambda \frac{\lambda^2-t^2}{(\lambda^2+t^2)^2}\,v\bigg(\frac{2Rt}{t^2+1}\bigg)\,dt-\int\limits_\lambda^\infty \frac{t^2-\lambda^2}{(t^2+\lambda^2)^2}\,v\bigg(\frac{2Rt}{t^2+1}\bigg)\,dt\Bigg].$$

Во втором интеграле проводим замену $\frac{\lambda^2}{t}=x$, в результате будем иметь, что

$$V'(r)=\frac{4R}{\pi(R+r)^2}\int\limits_0^\lambda \frac{\lambda^2-t^2}{(\lambda^2+t^2)^2}\bigg[v\bigg(\frac{2Rt}{t^2+1}\bigg)-v\bigg(\frac{2Rt}{t^2+1}\cdot\frac{\lambda^2(t^2+1)}{t^2+\lambda^4}\bigg)\bigg]\,dt. \tag{14}$$

Функция $\psi(t):=\frac{\lambda^2(t^2+1)}{t^2+\lambda^4}$ убывает на $[0,\lambda]$, так что $\min\{\psi(t) : t\in[0,\lambda]\}=\psi(\lambda)=1$. Из этого следует, что в интеграле (14) выражение в квадратных скобках отрицательно при всех $t\in[0,\lambda)$, так что $V'(r)<0$ при $r\in(0,R)$. Значит, $V(r)$ убывает на $[0,R]$ и $V(r)\leqslant V(0)$ при всех $r\in[0,R]$. $\rhd$

Перейдем теперь к обсуждению ограничений (A_0) и (A).

Лемма 2. *Для $v(t)=t^2$ выполнено условие (A_0).*

$\lhd$ Пусть $v(t)=t^2$. Прямой подсчет показывает, что в этом случае

$$V(0)=\frac{R^2}{2};\quad V(re^{i\varphi})=\frac{R^2}{2}-\frac{r^2}{2}\cos 2\varphi,\quad r\in[0,R),\ \varphi\in[0,2\pi).$$

Таким образом, для $z = re^{i\varphi}$

$$V(z) - v(\operatorname{Im} z) = \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\cos 2\varphi - \frac{r^2}{2}\sin^2\varphi = \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\cos^2\varphi \leqslant V(0). \ \rhd$$

Лемма 3. *Для функции $v(t) = t^3$ условие (A) нарушено.*

$\lhd$ Пусть $v(t) = t^3$. Заметим сразу, что $V(0) = \frac{4R^3}{3\pi}$. Рассмотрим получающуюся функцию $V(z)$ на отрезке мнимой оси. Снова прямым подсчетом получаем, что

$$V(ir) = \frac{R^3}{2\pi}\biggl(- \frac{R^4 - r^4}{R^2 r^2} + \frac{(R^2 + r^2)^3}{2R^3 r^3}\operatorname{arctg}\frac{2Rr}{R^2 - r^2}\biggr).$$

Соответствующий дефект субгармоничности

$$\Delta := V(ir) - r^3 = \frac{R^3}{2\pi}\biggl(- \frac{R^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{2}\Bigl(\frac{R}{r} + \frac{r}{R}\Bigr)^3 \operatorname{arctg}\frac{2\frac{r}{R}}{1 - (\frac{r}{R})^2} - 2\pi\Bigl(\frac{r}{R}\Bigr)^3\biggr).$$

Введем новую функцию

$$g(x) := -\frac{1}{x^2} + x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + x\right)^3 \operatorname{arctg}\frac{2x}{1 - x^2} - 2\pi x^3, \quad x \in (0, 1).$$

Возьмем точку $x = 0.35$, близкую к точке локального максимума функции g. Для нее $g(0,35) \approx 2.796$. Поэтому, если $r = 0.35R$, то $\frac{\Delta}{V(0)} = \frac{3}{8}\,g(0) > \frac{3}{8}\cdot 2.79 > 1.04$. Таким образом, утверждение (A) нарушено. $\rhd$

Аналогично можно пытаться проверять выполнение условия (A) для других модельных весов и, в частности, для весов вида t^ρ, $\rho \geqslant 1$. В заключение приведем результат, позволяющий распространять справедливость условия (A) с веса $v(t) = t^\rho$ на более широкий класс весов. Напомним, что положительная функция $w(t)$, определенная на $[0, \infty)$, называется *правильно меняющейся порядка* ρ на бесконечности, если для всех $\lambda > 0$ $\lim_{t\to\infty}\frac{w(\lambda t)}{w(t)} = \lambda^\rho$. При этом функция $w(t)$ имеет представление $w(t) = t^\rho L(t)$, где $L(t)$ — медленно меняющаяся функция, т. е. функция, удовлетворяющая условию:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{L(\lambda t)}{L(t)} = 1, \quad \lambda > 0.$$

Теорема 2. *Если вес $v(t) = t^\rho$, $\rho \geqslant 1$, обладает свойством (A), то этим же свойством обладают и правильно меняющиеся порядка ρ веса $\widetilde{v}(t) = t^\rho L(t)$, где $L(t)$ — неубывающая медленно меняющаяся функция.*

$\lhd$ Пусть $V(z)$ и $\widetilde{V}(z)$ — соответствующие весам v и $\widetilde{v}$ функции, построенные по формуле (2).

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу условия (A) на функцию v, найдется $R_0 > 0$ такое, что при всех $R \geqslant R_0$

$$V(re^{i\varphi}) \leqslant (1 + \varepsilon)V(0) + r^\rho \sin^\rho\varphi, \quad 0 \leqslant r < R, \quad \varphi \in \Bigl[0, \frac{\pi}{2}\Bigr]. \tag{15}$$

За счет леммы 1 другие φ рассматривать не нужно. При этом

$$V(0) = \frac{2R^\rho}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^\rho\theta\, d\theta = \frac{R^\rho}{\pi}B\Bigl(\frac{\rho + 1}{2}, \frac{1}{2}\Bigr),$$

где $B(\alpha, \beta)$ — функция Эйлера.

Выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\int\limits_{\arcsin\delta}^{\pi/2} \sin^\rho\theta\,d\theta > (1-\varepsilon)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^\rho\theta\,d\theta. \tag{16}$$

Считаем сразу δ настолько маленьким, что

$$\frac{R^\rho\delta^\rho}{V(0)} = \frac{\delta^\rho\pi}{B\left(\frac{\rho+1}{2},\frac{1}{2}\right)} < \varepsilon. \tag{17}$$

Далее, поскольку $L(t)$ — медленно меняющаяся функция, $\lim_{t\to\infty}\frac{L(t)}{L(\delta t)} = 1$, так что, увеличив при необходимости R_0, можно считать, что

$$\frac{L(t)}{L(\delta t)} \leqslant 1+\varepsilon, \quad t \geqslant R_0. \tag{18}$$

Наша задача — установить аналог неравенства (15) для функции $\widetilde{V}$. Проведем сначала две вспомогательные оценки. С учетом (16) имеем:

$$\begin{gathered}\widetilde{V}(0) = \frac{2R^\rho}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^\rho\theta\cdot L(R\sin\theta)\,d\theta \\ \geqslant \frac{2R^\rho}{\pi}\int\limits_{\arcsin\delta}^{\pi/2}\sin^\rho\theta\cdot L(R\sin\theta)\,d\theta \geqslant (1-\varepsilon)L(R\delta)V(0).\end{gathered} \tag{19}$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\widetilde{V}(re^{i\varphi}) \leqslant L(R)V(re^{i\varphi}), \quad r\in[0,R),\ \varphi\in\Big[0,\frac{\pi}{2}\Big]. \tag{20}$$

Пусть теперь $R \geqslant R_0$, $r\in[0,R)$, $\varphi\in\big[0,\frac{\pi}{2}\big]$. Рассмотрим отдельно два случая.

1. $r\sin\varphi \leqslant R\delta$. Тогда на основании (20), (19), (18), (15) и (17)

$$\begin{gathered}\frac{\widetilde{V}(re^{i\varphi})}{\widetilde{V}(0)} \leqslant \frac{L(R)V(re^{i\varphi})}{(1-\varepsilon)L(R\delta)V(0)} \leqslant \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\left(1+\varepsilon+\frac{r^\rho\sin^\rho\varphi}{V(0)}\right) \\ \leqslant \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\left(1+\varepsilon+\frac{R^\rho\delta^\rho}{V(0)}\right) < \frac{(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)}{1-\varepsilon}\,.\end{gathered}$$

2. Если же $r\sin\varphi > R\delta$, то, применяя последовательно (20), (18), (15), (19) и учитывая, что $V(R) = v(R) = R^\rho$, получим

$$\begin{gathered}\widetilde{V}(re^{i\varphi}) - r^\rho\sin^\rho\varphi\cdot L(r\sin\varphi) \leqslant L(R)V(re^{i\varphi}) - L(R\delta)r^\rho\sin^\rho\varphi \\ \leqslant L(R\delta)\big[(1+\varepsilon)V(re^{i\varphi}) - r^\rho\sin^\rho\varphi\big] \leqslant L(R\delta)\big[(1+\varepsilon)V(0)+\varepsilon V(re^{i\varphi})\big] \\ \leqslant L(R\delta)\big[(1+\varepsilon)V(0)+\varepsilon V(R)\big] = L(R\delta)\left[(1+\varepsilon)V(0)+\frac{\varepsilon\pi}{B\left(\frac{\rho+1}{2},\frac{1}{2}\right)}\,V(0)\right] \\ \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\left[1+\varepsilon+\frac{\varepsilon\pi}{B\left(\frac{\rho+1}{2},\frac{1}{2}\right)}\right]\widetilde{V}(0)\,.\end{gathered}$$

Тем самым теорема доказана. $\rhd$

Литература

1. *Беренстейн К., Струппа Д.* Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. направления.—М.: ВИНИТИ, 1989.—Т. 54.—С. 5–111.
2. *Ehrenpreis L.* Solution of some problems of division // Amer. J. Math.—1960.—Vol. 82.—P. 522–588.
3. *Hörmander L.* On the range of convolution operators // Ann. Math.—1962.—Vol. 76.—P. 148–170.
4. *Коробейник Ю. Ф.* О решениях некоторых функциональных уравнений в классах функций, аналитических в выпуклых областях // Мат. сб.—1968.—Т. 75, № 2.—С. 225–234.
5. *Епифанов О. В.* Разрешимость уравнения свертки в выпуклых областях // Мат. заметки.—1974.—Т. 15, № 5.—С. 787–796.
6. *Ткаченко В. А.* Уравнения типа свертки в пространствах аналитических функционалов // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1977.—Т. 41, № 2.—С. 378–392.
7. *Meise R., Taylor B. A., Vogt D.* Equivalence of slowly decreasing conditions and local Fourier expansions // Indiana Univ. Math. J.—1987.—Vol. 36, № 4.—P. 729–756.
8. *Коробейник Ю. Ф.* Разрешимость уравнений свертки в некоторых классах аналитических функций // Мат. заметки.—1991.—Т. 49, № 2.—С. 76–83.
9. *Напалков В. В., Рудаков И. А.* Оператор свертки в пространстве вещественно аналитических функций // Мат. заметки.—1991.—Т. 49, № 3.—С. 57–65.
10. *Momm S.* Division problems in spaces of entire functions of finite order // Lecture Notes in Pure and Appl. Math.—N. Y.: Dekker, 1994.—Vol. 150.—P. 435–457.
11. *Momm S.* Closed principal ideals in nonradial Hörmander algebras // Arch. Math.—1992.—Vol. 58.—P. 47–55.
12. *Meyer T.* Surjectivity of convolution operators on spaces of ultradifferentiable functions of Roumieu type // Stud. Math.—1997.—Vol. 125, № 2.—P. 101–129.
13. *Roumieu C.* Ultra-distributions définies sur $\mathbb{R}^n$ et sur certaines classes de variétés différentiables // J. Anal. Math.—1962/1963.—Vol. 10.—P. 153–192.
14. *Björck G.* Linear partial differential operators and generalized distributions // Ark. Mat.—1965.—Vol. 6.—P. 351–407.
15. *Braun R. W., Meise R., Taylor B. A.* Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Results Math.—1990.—Vol. 17.—P. 206–237.
16. *Abanina D. A.* On Borel's theorem for spaces of ultradifferentiable functions of mean type // Results Math.—2003.—Vol. 44.—P. 195–213.
17. *Абанин А. В., Абанина Д. А.* Теорема деления в некоторых весовых пространствах целых функций // Владикавк. мат. журн.—2010.—Т. 12, вып. 3.—С. 3–21.
18. *Абанина Д. А.* Разрешимость уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на интервале // Сиб. мат. журн.—2012.—Т. 53, № 3.—С. 477–494.
19. *Жаринов В. В.* Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 34, № 4.—С. 97–131.
20. *Абанин А. В.* О некоторых признаках слабой достаточности // Мат. заметки.—1986.—Т. 47, № 3.—С. 485–500.
21. *Абанин А. В.* Густые пространства и аналитические мультипликаторы // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки.—1994.—№ 4.—С. 3–10.

Статья поступила 19 октября 2012 г.

Абанина Дарья Александровна
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
научный сотрудник отдела мат. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

Южный федеральный университет,
доцент кафедры математического анализа
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: `abanina@math.rsu.ru`

Кузьминова Алина Витальевна
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
стажер-исследователь отдела мат. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `kuzminova.alina@rambler.ru`

ON DIVISION PROBLEM IN NONRADIAL WEIGHTED SPACES OF ENTIRE FUNCTIONS

Abanina D. A., Kuzminova A. V.

We study the inductive weighted space $H^{1;\infty}_{u,v}$ of entire functions defined by a sequence of nonradial two-part weights $\{q_n u(|z|) + nv(|\operatorname{Im} z|)\}_{n=1}^{\infty}$, $0 < q_n \uparrow 1$. Under an additional assumption on the function v, we establish the division theorem in $H^{1;\infty}_{u,v}$. We also obtain some results about sweeping out the masses of the subharmonic function $v(|\operatorname{Im} z|)$.

Key words: spaces of entire function, division theorem, subharmonic function.