*Владикавказский математический журнал*
*2013, Том 15, Выпуск 3, С. 19–36*

*УДК* **519.635**

# АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1]

**М. Х. Бештоков**

В работе рассматриваются нелокальные краевые задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами в одномерном и многомерном случаях. Для нелокальных задач получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках. Из полученных оценок следуют единственность, устойчивость, а также сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи.

**Ключевые слова:** краевая задача, нелокальное условие, априорная оценка, разностная схема, устойчивость и сходимость разностных схем, гиперболическое уравнение третьего порядка, псевдопараболическое уравнение.

## Введение

В настоящее время весьма активно изучаются локальные и нелокальные краевые задачи для гиперболических уравнений третьего порядка. Указанный класс задач вызывает большой практический и теоретический интерес из-за того, что прикладные задачи физики, механики, биологии сводятся к таким уравнениям. Например, вопросы фильтрации жидкости в пористых средах [1, 2], передачи тепла в гетерогенной среде [3, 4], влагопереноса в почво-грунтах (см. [5], [6, с. 137]) приводят к модифицированным уравнениям диффузии, которые являются уравнениями в частных производных гиперболического типа третьего порядка:

$$L(u) \equiv (\eta(x,t)u_{xt})_x + (k(x,t)u_x)_x + r(x,t)u_x + d(x,t)u_t - q(x,t)u = f(x,t). \qquad (*)$$

Уравнение вида $(*)$ часто называют псевдопараболическим. Краевые задачи для различных уравнений третьего порядка псевдопараболического типа изучались, например, в работах [7–11].

В работе рассматриваются нелокальные краевые задачи третьего порядка для псевдопараболического типа с переменными коэффициентами в одномерном и многомерном случаях. Для нелокальных задач получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках. Из полученных оценок следуют единственность, устойчивость, а также сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи.

---



[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 1.6197.2011.

## 1. Постановка задачи

В замкнутом цилиндре $\bar{Q}_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу

$$u_t = (k(x,t)u_x)_x + (\eta(x,t)u_{xt})_x + r(x,t)u_x - q(x,t)u + f(x,t), \quad 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T, \tag{1.1}$$

$$\Pi(0,t) = \int\limits_0^l \beta(x,t)u(x,t)\,dx + \int\limits_0^t \rho(t,\tau)u(l,\tau)\,d\tau - \mu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.2}$$

$$\Pi(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.4}$$

где

$$r(0,t) = r_0 \leqslant 0, \quad r(l,t) = r_N \geqslant 0, \quad 0 < c_0 \leqslant \eta(x,t), \quad k(x,t) \leqslant c_1,$$
$$|\eta_t(x,t)|,\ |r(x,t)|,\ |q(x,t)|,\ |k_x|,\ |r_x|,\ |\beta(x,t)|,\ |\rho(t,\tau)| \leqslant c_2, \tag{1.5}$$

$$u \in C^{4,3}(Q_T), \quad \eta \in C^{3,2}(Q_T), \quad k \in C^{3,2}(Q_T), \quad r,q,f \in C^{2,2}(Q_T), \quad \beta(x,t) \in C[0,T],$$

$$Q_T = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T\}, \quad \Pi(x,t) = ku_x + \eta u_{xt}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t, \quad u_0(x) \in C^2[0,l],$$

$\rho(t,\tau)$ — функция, непрерывная на $[0,T]$, $c_0$, $c_1$, $c_2$ — положительные числа.

Заметим, что нелокальное условие (1.2) можно заменить условием

$$\Pi(0,t) = \int\limits_0^\alpha \beta(x,t)u(x,t)\,dx + \int\limits_0^t \rho(t,\tau)u(l,\tau)\,d\tau - \mu(t),$$

где $\alpha$ — глубина корнеобитаемого слоя [12] или активный слой почвы, который участвует в водоснабжении корневой системы, в процессах испарения и транспирации. Поставленные и исследованные в данной работе задачи характерны также тем, что содержат в краевых условиях нелокальность по времени, впервые изученный А. И. Кожановым [10].

По ходу изложения будем использовать положительные постоянные $M_i$, $i = 1, 2, \ldots$, зависящие только от входных данных задачи (1.1)–(1.4).

## 2. Априорная оценка в дифференциальной трактовке

Допуская существование решения дифференциальной задачи (1.1)–(1.4) в замкнутом цилиндре $\bar{Q}_T$, получим априорную оценку для ее решения. Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Умножим уравнение (1.1) скалярно на $u$:

$$\big(u_t, u\big) = \big((ku_x)_x, u\big) + \big((\eta u_{xt})_x, u\big) + \big(r(x,t)u_x, u\big) - \big(q(x,t)u, u\big) + \big(f(x,t), u\big), \tag{2.1}$$

где $\big(u,v\big) = \int_0^l uv\,dx$, $\|u\|_0^2 = (u,u)$.

Пользуясь неравенством Коши с $\varepsilon$, из (2.1) получим

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\|u\|_0^2 + \frac{d}{dt}\int\limits_0^l \eta u_x^2\,dx + 2\int\limits_0^l k(x,t)u_x^2\,dx \\ \leqslant 2\Big(\Pi(l,t)u(l,t) - \Pi(0,t)u(0,t)\Big) + 3c_2\|u_x\|_0^2 + (3c_2+1)\|u\|_0^2 + \|f\|_0^2.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Имеет место оценка [13, с. 124]

$$u^2(l,t) \leqslant \varepsilon\|u_x\|_0^2 + c_\varepsilon\|u\|_0^2, \tag{2.3}$$

где $\varepsilon > 0$, $c_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{l}$.

Оценим первое и второе слагаемое в правой части неравенства (2.2), пользуясь неравенством Коши с $\varepsilon$ и граничными условиями (1.3) и (1.4),

$$\begin{aligned} -\Pi(0,t)u(0,t) &= -u(0,t)\Bigg(\int\limits_0^l \beta(x,t)u(x,t)\,dx + \int\limits_0^t \rho(t,\tau)u(l,\tau)\,d\tau - \mu(t)\Bigg) \\ &\leqslant M_1\left[u^2(0,t) + \Bigg(\int\limits_0^l \beta(x,t)u(x,t)\,dx\Bigg)^2\right] + \frac{1}{2}\,\mu^2(t) + M_2\int\limits_0^t u^2(l,\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Из (2.4), пользуясь (2.3) и неравенством Буняковского, получим

$$\Pi(l,t)u(l,t) - \Pi(0,t)u(0,t) \leqslant M_3\Big(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\Big) + M_4\int\limits_0^t \Big(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\Big)\,d\tau + \frac{1}{2}\,\mu^2(t). \tag{2.5}$$

Учитывая (2.5), из (2.2) находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|u\|_0^2 + \frac{d}{dt}\int\limits_0^l \eta u_x^2\,dx + c_0\|u_x\|_{2,Q_t}^2 &\leqslant M_5\Big(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\Big) \\ + 2M_4\int\limits_0^t \Big(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\Big)\,d\tau &+ \mu^2(t) + \|f\|_0^2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Проинтегрировав (2.6) по $\tau$ от 0 до $t$, тогда получим

$$\begin{aligned} &\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u_x\|_{2,Q_t}^2 \\ &\leqslant M_6\int\limits_0^t \Big(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\Big)\,d\tau + M_7\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau \Big(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\Big)d\tau_1\,d\tau \\ &+ M_8\Bigg(\int\limits_0^t \Big(\|f\|_0^2 + \mu^2(\tau)\Big)\,d\tau + \|u_0(x)\|_0^2 + \|u_0'(x)\|_0^2\Bigg), \end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$\|u_x\|_{2,Q_t}^2 = \int\limits_0^t \|u_x\|_0^2\,d\tau.$$

Второе слагаемое в правой части (2.7) оценим следующим образом:

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau \Big(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\Big)d\tau_1\,d\tau \leqslant T\int\limits_0^t \Big(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\Big)\,d\tau. \tag{2.8}$$

В силу (2.8) из (2.7) находим

$$\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\leqslant M_9\int\limits_0^t\Big(\|u_x\|_0^2+\|u\|_0^2\Big)\,d\tau$$
$$+M_8\bigg(\int\limits_0^t\Big(\|f\|_0^2+\mu^2(\tau)\Big)\,d\tau+\|u_0(x)\|_0^2+\|u_0'(x)\|_0^2\bigg). \tag{2.9}$$

Применяя к неравенству (2.9) лемму Гронуолла (см. [13, с. 152]), из (2.7) с учетом (2.8) получим

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+\|u_x\|^2_{2,Q_t}\leqslant M(t)\bigg(\int\limits_0^t\Big(\|f\|_0^2+\mu^2(\tau)\Big)\,d\tau+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\bigg), \tag{2.10}$$

где $M(t)$ — зависит только от входных данных задачи (1.1)–(1.4).

Из априорной оценки (2.10) следует единственность решения исходной задачи (1.1)–(1.4), а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных на каждом временном слое в норме пространства $W_2^1(0,l)$.

## 3. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Для решения задачи (1.1)–(1.4) применим метод конечных разностей. Для этого в замкнутом цилиндре $\bar{Q}_T$ введем равномерную сетку [14]:

$$\bar\omega_{h\tau}=\bar\omega_h\times\bar\omega_\tau=\big\{(x_i,t_j),\ x\in\bar\omega_h,\ t\in\bar\omega_\tau\big\},$$
$$\bar\omega_h=\big\{x_i=ih,\ i=0,1,\ldots,N,\ Nh=l\big\},$$
$$\bar\omega_\tau=\big\{t_j=j\tau,\ j=0,1,\ldots,m,\ m\tau=T\big\}.$$

На сетке $\bar\omega_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1)–(1.4) поставим в соответствие разностную схему:

$$y_{t,i}=\widetilde\Lambda(\bar t)y_i^{(\sigma)}+\delta y+\varphi_i,\quad (x,t)\in\omega_{h\tau}, \tag{3.1}$$

$$a_1\chi_0 y^{(\sigma)}_{x,0}+\gamma_1 y_{xt,0}=\sum_{\bar s=0}^{N}\beta_{\bar s}y_{\bar s}^{(\sigma)}\hbar+\sum_{s=0}^{j}\bar\tau\rho_{s,j}y^{(\sigma)}_{s,N}-\mu+\frac h2\Big(y_{t,0}+d_0y_0^{(\sigma)}-\varphi_0\Big),\quad t\in\bar\omega_\tau, \tag{3.2}$$

$$-\Big(a_N\chi_N y^{(\sigma)}_{\bar x,N}+\gamma_N y_{\bar xt,N}\Big)=\frac h2\Big(y_{t,N}+d_Ny_N^{(\sigma)}-\varphi_N\Big),\quad t\in\bar\omega_\tau, \tag{3.3}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\bar\omega_h, \tag{3.4}$$

где

$$\widetilde\Lambda(\bar t)y_i^{(\sigma)}=\chi_i\big(ay^{(\sigma)}_{\bar x}\big)_{x,i}+b_i^+a_{i+1}y^{(\sigma)}_{x,i}+b_i^-a_iy^{(\sigma)}_{\bar x,i}-d_iy_i^{(\sigma)},$$

$$\delta y=\big(\gamma y_{\bar xt}\big)_{x,i},\quad y^{(\sigma)}=\sigma\hat y+(1-\sigma)y,\quad y=y_i^j=y(x_i,t_j),\quad r=r^++r^-,\quad b^\pm=\frac{r^\pm}{k}+O(h^2),$$

$$|r|=r^+-r^-,\quad r^+=0.5\,(r+|r|)\geqslant0,\quad r^-=0.5\,(r-|r|)\leqslant0,$$
$$a_i=k(x_{i-0.5},\bar t),\quad \gamma_i=\eta(x_{i-0.5},\bar t),\quad d_i=q(x_i,\bar t),\quad \varphi_i=f(x_i,\bar t),$$

$$\bar{t} = t_{j+0.5} = t_j + 0.5\tau, \quad x_{i-0.5} = x_i - 0.5h, \quad h,\ \tau \text{ — шаги сетки.}$$

$$\chi = \frac{1}{1+R}, \quad R = \frac{0.5h|r|}{k} \text{ — разностное число Рейнольдса,}$$

$$\chi_0 = \frac{1}{1+\frac{0.5\,h|r_0|}{k_{0.5}}}, \text{ если } r_0 \leqslant 0, \quad \chi_N = \frac{1}{1+\frac{0.5h|r_N|}{k_{N-0.5}}}, \text{ если } r_N \geqslant 0,$$

$$\bar{\tau} = \begin{cases} \frac{\tau}{2}, \text{ если } s=0,\ s=j; \\ \tau, \text{ если } s=1,\ldots,j-1, \end{cases} \qquad \hbar = \begin{cases} \frac{h}{2}, \text{ если } \bar{s}=0,\ \bar{s}=N; \\ h, \text{ если } \bar{s}=1,\ldots,N-1. \end{cases}$$

Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Тогда задачу (3.1)–(3.4) перепишем в другой форме

$$y_{t,i} = \chi_i\big(a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big)_{x,i} + \big(\gamma y_{\bar{x}t}\big)_{x,i} + b_i^{+} a_{i+1} y_{x,i}^{(\sigma)} + b_i^{-} a_i y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} - d_i y_i^{(\sigma)} + \varphi_i, \tag{3.5}$$

$$y_{t,0} = \frac{a_1\chi_0 y_{x,0}^{(\sigma)} - 0.5hd_0 y_0^{(\sigma)} - \sum\limits_{\bar{s}=0}^{N} \beta_{\bar{s}} y_{\bar{s}}^{(\sigma)} \hbar - \sum\limits_{s=0}^{j} \bar{\tau}\rho_{s,j} y_{s,N}^{(\sigma)} + \mu}{0.5h} + \frac{\gamma_1 y_{xt,0}}{0.5h}, \tag{3.6}$$

$$y_{t,N} = \frac{-a_N\chi_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - 0.5hd_N y_N^{(\sigma)}}{0.5h} - \frac{\gamma_N y_{\bar{x}t,N}}{0.5h}, \tag{3.7}$$

$$y(x,0) = u_0(x). \tag{3.8}$$

Полагая $\sigma = 0.5$ и обозначая $\hat{y} + y = Y$, перепишем задачу (3.5)–(3.8)

$$y_t = 0.5\widetilde{\Lambda}^*(\bar{t})Y + \bar{\delta}y + \Phi, \tag{3.9}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \tag{3.10}$$

где

$$\widetilde{\Lambda}^*(\bar{t})Y = \begin{cases} \widetilde{\Lambda}Y = \chi_i\big(aY_{\bar{x}}\big)_{x,i} + b_i^{+}a_{i+1}Y_{x,i} + b_i^{-}a_iY_{\bar{x},i} - d_iY_i, & \text{при } x \in \omega_h; \\ \Lambda^{-}Y = \frac{a_1\chi_0Y_{x,0} - 0.5hd_0Y_0 - \sum\limits_{\bar{s}=0}^{N}\beta_{\bar{s}}y_{\bar{s}}^{(\sigma)}\hbar - \sum\limits_{s=0}^{j}\bar{\tau}\rho_{s,j}Y_{s,N}}{0.5h}, & \text{при } x = 0; \\ \Lambda^{+}Y = \frac{-a_N\chi_NY_{\bar{x},N} - 0.5hd_NY_N}{0.5h}, & \text{при } x = l, \end{cases}$$

$$\bar{\delta}y = \begin{cases} \delta y = \big(\gamma y_{\bar{x}t}\big)_{x,i}, & \text{при } x \in \omega_h; \\ \delta^{-}y = \frac{\gamma_1 y_{xt,0}}{0.5h}, & \text{при } x = 0; \\ \delta^{+}y = -\frac{\gamma_N y_{\bar{x}t,N}}{0.5h}, & \text{при } x = l, \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{cases} \varphi = \varphi_i, & \text{при } x \in \omega_h; \\ \varphi^{-} = \frac{\mu}{0.5h}, & \text{при } x = 0; \\ \varphi^{+} = 0, & \text{при } x = l, \end{cases}$$

$$\bar{\chi} = \begin{cases} \chi = \left(1 + \frac{h|r|}{2k}\right)^{-1}, & \text{при } x \in \omega_h; \\ \chi^{-} = \left(1 + \frac{h|r_0|}{2k_{0.5}}\right)^{-1}, & \text{при } x = 0, \quad r_0 \leqslant 0; \\ \chi^{+} = \left(1 + \frac{h|r_N|}{2k_{N-0.5}}\right)^{-1}, & \text{при } x = l, \quad r_N \geqslant 0. \end{cases}$$

Введем скалярное произведение

$$\big[u,v\big]=\sum_{i=0}^{N}u_iv_i\hbar,\quad \hbar=\begin{cases}\frac{h}{2}, & i=0,\ i=N,\\ h, & i=1,\dots,N-1,\end{cases}$$

и норму

$$|[u]|^2=[u,u],\quad \|u]|^2=\sum_{i=1}^{N}u_i^2\hbar=(u,u].$$

Умножим теперь разностное уравнение (3.9) скалярно на $Y=\hat{y}+y$ :

$$\big[y_t,Y\big]=0.5\big[\widetilde{\Lambda}^*(\bar{t})Y,Y\big]+\big[\,\bar{\delta}y,Y\big]+\big[\,\Phi,Y\big]. \tag{3.11}$$

Преобразуем суммы, входящие в (3.11):

$$\big[y_t,Y\big]=\left[\frac{1}{\tau}(\hat{y}-y),(\hat{y}+y)\right]=\frac{\big[1,\hat{y}^2\big]-\big[1,y^2\big]}{\tau}=\big[1,y^2\big]_t, \tag{3.12}$$

$$\begin{gathered}\big[\widetilde{\Lambda}^*(\bar{t})Y,Y\big]=\big(\widetilde{\Lambda}Y,Y\big)+0.5hY_0\Lambda^-Y_0+0.5\,hY_N\Lambda^+Y_N\\ =-(a\chi,Y_{\bar{x}}^2\,]-(aY,\chi_{\bar{x}}Y_{\bar{x}})+(b^+a^{+1}Y_x,Y)+(b^-aY_{\bar{x}},Y)\\ -\big[d,Y^2\big]-Y_0\sum_{\bar{s}=0}^{N}\beta_{\bar{s}}Y_{\bar{s}}\hbar-Y_0\sum_{s=0}^{j}\bar{\tau}\rho_{s,j}Y_N^s,\end{gathered} \tag{3.13}$$

$$\big[\,\bar{\delta}y,Y\big]=(\delta y,Y)+0.5\,hY_0\delta^-y+0.5\,hY_N\delta^+y=-\big(\gamma y_{\bar{x}t},Y_{\bar{x}}\big], \tag{3.14}$$

$$\big[\,\Phi,Y\big]=(\varphi,Y)+0.5h\varphi^-Y_0+0.5\,h\varphi^+Y_N=(\varphi,Y)+\mu Y_0. \tag{3.15}$$

Учитывая (3.12)–(3.15), из (3.11) находим

$$\begin{gathered}\big[1,y^2\big]_t=-0.5\,(a\chi,Y_{\bar{x}}^2\,]-\big(\gamma y_{\bar{x}t},Y_{\bar{x}}\big]-0.5\,(a\chi_{\bar{x}}Y,Y_{\bar{x}})+0.5\,(b^+a^{+1}Y_x,Y)\\ +0.5\,(b^-aY_{\bar{x}},Y)-0.5\,[d,Y^2]-0.5\,Y_0\sum_{\bar{s}=0}^{N}\beta_{\bar{s}}Y_{\bar{s}}\hbar-0.5\,Y_0\sum_{s=0}^{j}\bar{\tau}\rho_{s,j}Y_N^s+(\varphi,Y)+\mu Y_0.\end{gathered} \tag{3.16}$$

Оценим суммы, входящие в (3.16):

$$[1,y^2]_t=\big(|[y]|^2\big)_t, \tag{3.17}$$

$$(a\chi,Y_{\bar{x}}^2\,]\geqslant M_1(1,Y_{\bar{x}}^2]=M_1\|Y_{\bar{x}}]|^2, \tag{3.18}$$

$$(\gamma y_{\bar{x}t},Y_{\bar{x}}]=(1,\gamma(y_{\bar{x}}^2)_t]=(1,(\gamma y_{\bar{x}}^2)_t]-(1,\gamma_t\hat{y}_{\bar{x}}^2], \tag{3.19}$$

$$-(a\chi_{\bar{x}}Y,Y_{\bar{x}})+(b^+a^{+1}Y,Y_x)+(b^-aY,Y_{\bar{x}})\leqslant M_2\|Y_{\bar{x}}]|\,|[Y]|\leqslant M_3\Big(\|Y_{\bar{x}}]|^2+|[Y]|^2\Big), \tag{3.20}$$

$$-[d,Y^2]\leqslant c_2[1,Y^2]=c_2|[Y]|^2, \tag{3.21}$$

$$[\varphi,Y]\leqslant\frac{1}{2}\Big(|[Y]|^2+|[\varphi]|^2\Big). \tag{3.22}$$

Справедлива следующая

**Лемма** [15]. *Для любой функции $y(x)$, заданной на сетке $\bar\omega_h$, справедливо неравенство*

$$\max_{x\in\bar\omega_h} y^2(x) \leqslant \varepsilon\|y_{\bar x}]|^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{l}\right)|[y]|^2,$$

*где $\varepsilon$ — произвольная положительная постоянная, $l$ — длина интервала, на котором введена сетка $\bar\omega_h$.*

С помощью этой леммы и неравенства Коши получаем оценку

$$\begin{gathered}-Y_0\sum_{\bar s=0}^{N}\beta_{\bar s}Y_{\bar s}\hbar - Y_0\sum_{s=0}^{j}\bar\tau\rho_{js}Y_N^s+\mu Y_0\\ \leqslant \frac{\mu^2}{2}+M_4\Big(\|Y_{\bar x}]|^2+|[Y]|^2\Big)+M_5\sum_{s=0}^{j}\Big(\|Y_{\bar x}]|^2+|[Y]|^2\Big)\bar\tau.\end{gathered}\tag{3.23}$$

Учитывая оценки (3.17)–(3.23), из (3.16) находим:

$$\begin{gathered}\Big(|[y]|^2\Big)_t+(1,(\gamma y_{\bar x}^2)_t]+M_1\|Y_{\bar x}]|^2\leqslant c_1|[\hat y_x]|^2+M_6\Big(|[Y]|^2+\|Y_{\bar x}]|^2\Big)\\ +M_5\sum_{s=0}^{j}\Big(|[Y]|^2+\|Y_{\bar x}]|^2\Big)\bar\tau+M_7\Big(|[\varphi]|^2+\mu^2\Big).\end{gathered}\tag{3.24}$$

Умножим обе части (3.24) на $\tau$ и просуммируем по $j\,'$ от 0 до $j$ :

$$\begin{gathered}|[y^{j+1}]|^2+\|y_{\bar x}^{j+1}]|^2+\sum_{j\,'=0}^{j}\|Y_{\bar x}^{j\,'}]|^2\tau\\ \leqslant M_8\sum_{j\,'=0}^{j}|[\hat y_x]|^2\tau+M_9\Bigg(\sum_{j\,'=0}^{j}\Big(|[Y^{j\,'}]|^2+\|Y_{\bar x}^{j\,'}]|^2\Big)\tau\\ +\sum_{j\,'=0}^{j}\sum_{s=0}^{j}\Big(|[Y^{j\,'}]|^2+\|Y_{\bar x}^{j\,'}]|^2\Big)\bar\tau\tau\Bigg)+M_{10}\Bigg(\sum_{j\,'=0}^{j}\Big(|[\varphi]|^2+\mu^2\Big)\tau+|[y^0]|^2+\|y_{\bar x}^0]|^2\Bigg).\end{gathered}\tag{3.25}$$

Обозначая $F(t_j)=M_{10}\Big(\sum_{j\,'=0}^{j}\Big(|[\varphi]|^2+\mu^2\Big)\tau+|[y^0]|^2+\|y_{\bar x}^0]|^2\Big)$, из (3.25) получим

$$\begin{gathered}|[y^{j+1}]|^2+\|y_{\bar x}^{j+1}]|^2\tau+\sum_{j\,'=0}^{j}\|Y_{\bar x}^{j\,'}]|^2\tau\leqslant M_8\sum_{j\,'=0}^{j}|[\hat y_x]|^2\tau\\ +M_9\left(\sum_{j\,'=0}^{j}\Big(|[Y^{j\,'}]|^2+\|Y_{\bar x}^{j\,'}]|^2\Big)\tau+\sum_{j\,'=0}^{j}\sum_{s=0}^{j}\Big(|[Y^{j\,'}]|^2+\|Y_{\bar x}^{j\,'}]|^2\Big)\bar\tau\tau\right)+F(t_j).\end{gathered}\tag{3.26}$$

Третье слагаемое в правой части (3.26) преобразуем следующим образом

$$\sum_{j\,'=0}^{j}\sum_{s=0}^{j}\Big(|[Y^{j\,'}]|^2+\|Y_{\bar x}^{j\,'}]|^2\Big)\bar\tau\tau\leqslant T\sum_{j\,'=0}^{j}\Big(|[Y^{j\,'}]|^2+\|Y_{\bar x}^{j\,'}]|^2\Big)\tau.\tag{3.27}$$

В силу (3.27) из (3.26) находим

$$
\begin{gathered}
|[y^{j+1}]|^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}]|^2 + \sum_{j'=0}^{j} \|Y_{\bar{x}}^{j'}]|^2\tau \\
\leqslant M_8 \sum_{j'=0}^{j} |[\hat{y}_x]|^2\tau + M_{11} \sum_{j'=0}^{j} \Big(|[Y^{j'}]|^2 + \|Y_{\bar{x}}^{j'}]|^2\Big)\tau + F(t_j).
\end{gathered} \tag{3.28}
$$

Учитывая неравенство $|[y^{j'+1} + y^{j'}]|^2 \leqslant 2\,|[y^{j'+1}]|^2 + 2\,|[y^{j'}]|^2$, преобразуем выражение $M_8 \sum_{j'=0}^{j} |[\widehat{y}_x]|^2\tau + M_{11} \sum_{j'=0}^{j} \Big(|[Y^{j'}]|^2 + \|Y_{\bar{x}}^{j'}]|^2\Big)\tau$. Тогда

$$
\begin{gathered}
M_8 \sum_{j'=0}^{j} |[\widehat{y}_x]|^2\tau + M_{11} \sum_{j'=0}^{j} \Big(|[Y^{j'}]|^2 + \|Y_{\bar{x}}^{j'}]|^2\Big)\tau \\
= M_{11} \sum_{j'=0}^{j} \Big(|[y^{j'+1} + y^{j'}]|^2 + \|y_{\bar{x}}^{j'+1} + y_{\bar{x}}^{j'}]|^2\Big)\tau \\
+ M_8 \sum_{j'=0}^{j} |[y_x^{j'+1}]|^2\tau \leqslant M_{12}\Big(|[y^{j+1}]|^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}]|^2\Big)\tau \\
+ M_{13} \sum_{j'=1}^{j} \Big(|[y^{j'}]|^2 + \|y_{\bar{x}}^{j'}]|^2\Big)\tau + M_{14}\Big(|[y^0]|^2 + \|y_{\bar{x}}^0]|^2\Big)\tau.
\end{gathered} \tag{3.29}
$$

Подставляя (3.29) в (3.28), получим

$$
\begin{gathered}
|[y^{j+1}]|^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}]|^2 + \sum_{j'=0}^{j} \|\big(y^{j'+1} + y^{j'}\big)_{\bar{x}}]|^2\tau \\
\leqslant M_{12}\Big(|[y^{j+1}]|^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}]|^2\Big)\tau + M_{15} \sum_{j'=1}^{j} \Big(|[y^{j'}]|^2 + \|y_{\bar{x}}^{j'}]|^2\Big)\tau + \widetilde{F}(t_j).
\end{gathered} \tag{3.30}
$$

Выбирая $\tau$ таким образом, что для всех $\tau \leqslant \tau_0$, $\tau_0 = \frac{1}{2M_{12}}$, и обозначая через $\widetilde{F}(t_j) = M_{16}\Big(\sum_{j'=0}^{j} \Big(|[\varphi^{j'}]|^2 + \mu_1^{j'\,2} + \mu_2^{j'\,2}\Big)\tau + |[y^0]|^2 + \|y_{\bar{x}}^0]|^2\Big)$, из (3.30) получим

$$
|[y^{j+1}]|^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}]|^2 \leqslant M_{17} \sum_{j'=1}^{j} \Big(|[y^{j'}]|^2 + |[y_{\bar{x}}^{j'}]|^2\Big)\tau + M_{18}\widetilde{F}(t_j). \tag{3.31}
$$

Оценивая первое слагаемое в правой части (3.31) с помощью леммы 4 из [16, с. 171], из (3.28) с учетом (3.29), (3.30) получим априорную оценку

$$
\begin{gathered}
|[y^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,\,l)} + \sum_{j'=0}^{j} \|\big(y^{j'+1} + y^{j'}\big)_{\bar{x}}]|^2\tau \\
\leqslant M\bigg(\sum_{j'=0}^{j} \Big(|[\varphi^{j'}]|^2 + \mu^{j'\,2}\Big)\tau + |[y^0]|^2_{W_2^1(0,\,l)}\bigg),
\end{gathered} \tag{3.32}
$$

где $M$ — положительная постоянная, не зависящая от $h$ и $\tau$.

Из полученной априорной оценки следует

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия* (1.5). *Тогда при* $\sigma = 0.5$ *существует такое* $\tau_0$, *что если* $\tau \leqslant \tau_0$, *то для решения разностной задачи* (3.9)–(3.10) *справедлива априорная оценка*

$$|[y^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)} + \sum_{j'=0}^{j} \|\big(y^{j'+1} + y^{j'}\big)_{\bar{x}}]|^2\tau \leqslant M\left(\sum_{j'=0}^{j}\Big(|[\varphi^{j'}]|^2 + \mu^{j'2}\Big)\tau + |[y^0]|^2_{W_2^1(0,l)}\right),$$

*где* $M$ *— положительная постоянная, не зависящая от* $h$ *и* $\tau$.

Таким образом, доказана устойчивость решения разностной задачи (3.9)–(3.10) по начальным данным и правой части в сеточной норме $|[y^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)}$ на слое.

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (3.1)–(3.4), $y_i^j$ — решение разностной задачи (3.5)–(3.8). Обозначим через $z = y - u$ погрешность. Подставляя $y = z + u$ в (3.5)–(3.8) и считая $u(x,t)$ заданной функцией, получим задачу для $z$:

$$z_{t,i} = \chi_i\big(az_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big)_{x,i} + \big(\gamma z_{\bar{x}t}\big)_{x,i} + b_i^+ a_{i+1} z_{x,i}^{(\sigma)} + b_i^- a_i z_{\bar{x},i}^{(\sigma)} - d_i z_i^{(\sigma)} + \psi_i, \tag{3.33}$$

$$a_1\chi_0 z_{x,0}^{(\sigma)} + \gamma_1 z_{xt,0} = \sum_{\bar{s}=0}^{N} \beta_{\bar{s}} z_{\bar{s}}^{(\sigma)} \hbar + \sum_{s=0}^{j} \bar{\tau}\rho_{s,j} z_{s,N}^{(\sigma)} + \frac{h}{2}\Big(z_{t,0} + d_0 z_0^{(\sigma)}\Big) - \nu_1, \tag{3.34}$$

$$-\Big(a_N\chi_N z_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + \gamma_N z_{\bar{x}t,N}\Big) = \frac{h}{2}\Big(z_{t,N} + d_N z_N^{(\sigma)}\Big) - \nu_2, \tag{3.35}$$

$$z(x,0) = 0, \tag{3.36}$$

$\psi_i = O(h^2 + \tau^2)$, $\nu_1 = O(h^2 + \tau^2)$, $\nu_2 = O(h^2 + \tau^2)$ — погрешности аппроксимации на решении исходной задачи при каждом фиксированном $t$, в силу построения оператора $\widetilde{\Lambda}$ при $\sigma = 0.5$.

Применяя априорную оценку (3.32) к задаче для погрешности, при $\sigma = 0.5$ получаем оценку

$$|[z^{j+1}]|^2 + \|z_{\bar{x}}^{j+1}]|^2 + \sum_{j'=0}^{j} \|\big(z^{j'+1} + z^{j'}\big)_{\bar{x}}]|^2\tau \leqslant M\sum_{j'=0}^{j}\Big(|[\Psi^{j'}]|^2 + \nu_1^{j'2} + \nu_2^{j'2}\Big)\tau,$$

где $M$ — положительная постоянная, не зависящая от $h$ и $\tau$.

Из полученной априорной оценки следует сходимость схемы (3.33)–(3.36) при $\sigma = 0.5$ со скоростью $O(h^2 + \tau^2)$ на слое.

## 4. Априорная оценка решения задачи в многомерной области

В замкнутом цилиндре $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0,T]$, основанием которого является $p$-мерный прямоугольный параллелепипед $\bar{G} = \{x = (x_1, \ldots, x_p) : 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$ с границей $\Gamma$, $\bar{G} = G \cup \Gamma$ рассматривается нелокальная краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{4.1}$$

$$\Pi_\alpha(x,t)=\int\limits_0^{l_\alpha}\beta_{-\alpha}(x,t)u(x,t)\,dx_\alpha$$
$$+\int\limits_0^{t}\rho_{-\alpha}(t,\tau)u(x_1,\ldots,x_{\alpha-1},l_\alpha,x_{\alpha+1},\ldots,x_p,\tau)\,d\tau-\mu_{-\alpha}(x,t),\quad x_\alpha=0,\tag{4.2}$$
$$\Pi_\alpha(x,t)=0,\quad x_\alpha=l_\alpha,\tag{4.3}$$
$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\bar{G},\tag{4.4}$$

где $Lu=\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha u$,

$$\begin{gathered}L_\alpha u=\big(k_\alpha(x,t)u_{x_\alpha}\big)_{x_\alpha}+\big(\eta_\alpha(x,t)u_{x_\alpha t}\big)_{x_\alpha}+r_\alpha(x,t)u_{x_\alpha}-q_\alpha(x,t)u,\\ Q_T=G\times[0<t\leqslant T],\quad 0<c_0\leqslant\eta_\alpha(x,t),k_\alpha(x,t)\leqslant c_1,\\ |\eta_{t\alpha}|,\ |r_\alpha|,\ |q_\alpha|,\ |\beta_{-\alpha}(x,t)|,\ |\rho_{-\alpha}(t,\tau)|\leqslant c_2,\end{gathered}\tag{4.5}$$

$\Pi_\alpha(x,t)=k_\alpha(x,t)u_{x_\alpha}+\eta_\alpha(x,t)u_{x_\alpha t}$ — полный поток, $0\leqslant\tau\leqslant t$, $c_0$, $c_1$, $c_2$ — положительные постоянные, $\alpha=\overline{1,p}$.

Относительно коэффициентов задачи (4.1)–(4.4) предположим, что они обладают таким количеством непрерывных производных, которое необходимо для обеспечения нужной гладкости решения $u(x,t)$ в цилиндре $Q_T$.

Допуская существование решения дифференциальной задачи (4.1)–(4.4) в цилиндре $\bar{Q}_T$, получим априорную оценку для ее решения, воспользовавшись методом энергетических неравенств.

В дальнейшем изложении будем пользоваться скалярным произведением и нормой

$$\big(u,v\big)=\int\limits_G uv\,dx,\quad (u,u)=\|u\|_0^2,\quad \|u\|_0^2=\int\limits_G u^2\,dx,\quad u_x^2=\sum_{\alpha=1}^{p}u_{x_\alpha}^2,$$
$$\|u\|^2_{L_2(0,l_\alpha)}=\int\limits_0^{l_\alpha}u^2(x,t)\,dx_\alpha.$$

Умножим уравнение (4.1) скалярно на $u$:

$$\begin{gathered}\big(u_t,u\big)=\bigg(\sum_{\alpha=1}^{p}\big(k_\alpha(x,t)u_{x_\alpha}\big)_{x_\alpha},u\bigg)+\bigg(\sum_{\alpha=1}^{p}\big(\eta_\alpha(x,t)u_{x_\alpha t}\big)_{x_\alpha},u\bigg)\\ +\bigg(\sum_{\alpha=1}^{p}r_\alpha(x,t)u_{x_\alpha},u\bigg)-\bigg(\sum_{\alpha=1}^{p}q_\alpha(x,t)u,u\bigg)+\big(f(x,t),u\big).\end{gathered}\tag{4.6}$$

Преобразуем интегралы, входящие в (4.6):

$$\big(u_t,u\big)=\int\limits_G u_tu\,dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_0^2,\tag{4.7}$$

$$\begin{gathered}\bigg(\sum_{\alpha=1}^{p}\big(k_\alpha u_{x_\alpha}\big)_{x_\alpha},u\bigg)=\int\limits_G\sum_{\alpha=1}^{p}\big(k_\alpha u_{x_\alpha}\big)_{x_\alpha}u\,dx\\ =\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G_\alpha}k_\alpha uu_{x_\alpha}\big|_0^{l_\alpha}\,dx'-\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_G k_\alpha\big(u_{x_\alpha}\big)^2\,dx,\end{gathered}\tag{4.8}$$

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\eta_\alpha u_{x_\alpha t}\right)_{x_\alpha}, u\right) = \int\limits_G \sum_{\alpha=1}^{p}\left(\eta_\alpha u_{x_\alpha t}\right)_{x_\alpha} u\,dx = \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G_\alpha} u\eta_\alpha u_{x_\alpha t}\Big|_0^{l_\alpha} dx'$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_G \eta_{t\alpha}\left(u_{x_\alpha}\right)^2 dx - \frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_G \frac{\eta_\alpha}{2}\left(u_{x_\alpha}\right)^2 dx. \tag{4.9}$$

Далее для оценки слагаемых в правой части применим неравенство Коши с $\varepsilon$

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{p} r_\alpha(x,t)u_{x_\alpha}, u\right) = \int\limits_G \sum_{\alpha=1}^{p} r_\alpha(x,t)u_{x_\alpha} u\,dx$$
$$\leqslant \frac{c_2}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_G \left(u_{x_\alpha}\right)^2 dx + \frac{c_2}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_G u^2\,dx, \tag{4.10}$$

$$-\left(\sum_{\alpha=1}^{p} q_\alpha(x,t)u, u\right) = -\int\limits_G \sum_{\alpha=1}^{p} q_\alpha(x,t)u^2\,dx \leqslant c_2\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_G u^2\,dx, \tag{4.11}$$

$$\Big(f(x,t), u\Big) = \int\limits_G f(x,t)u\,dx \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_0^2 + \frac{1}{2}\|u\|_0^2, \tag{4.12}$$

где

$$G_\alpha = \Big\{x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \ldots, x_p):\ 0 < x_k < l_k,$$
$$k = 1, 2, \ldots, \alpha-1, \alpha+1, \ldots, p\Big\}, \quad dx' = dx_1 dx_2 \ldots dx_{\alpha-1}dx_{\alpha+1}\ldots dx_p.$$

Подставляя (4.7)–(4.12) в (4.6), получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\|u\|_0^2 + \frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_G \eta_\alpha\left(u_{x_\alpha}\right)^2 dx + \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_G k_\alpha\left(u_{x_\alpha}\right)^2 dx$$
$$\leqslant 2\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G_\alpha} u\left(k_\alpha u_{x_\alpha} + \eta_\alpha u_{x_\alpha t}\right)\Big|_0^{l_\alpha} dx'$$
$$+\,3\,c_2\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G \left(u_{x_\alpha}\right)^2 dx + (3pc_2+1)\|u\|_0^2 + \|f\|_0^2. \tag{4.13}$$

Первое слагаемое в правой части (4.13), пользуясь теоремой 6.5 [13], краевыми условиями (4.2), (4.3) и неравенством Коши с $\varepsilon$, оценим так:

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G_\alpha} u\left(k_\alpha u_{x_\alpha} + \eta_\alpha u_{x_\alpha t}\right)\Big|_0^{l_\alpha} dx'$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{p}\int\limits_{G_\alpha}\Big(\Pi_\alpha(x,t)u(x,t)|_{x_\alpha=l_\alpha} - \Pi_\alpha(x,t)u(x,t)|_{x_\alpha=0}\Big)\,dx'$$
$$= -\,u(x,t)\Bigg(\int\limits_0^{l_\alpha} \beta_{-\alpha}(x,t)u(x,t)\,dx_\alpha$$

$$+\int\limits_0^t \rho_{-\alpha}(t,\tau)u(x_1,\ldots,x_{\alpha-1},l_\alpha,x_{\alpha+1},\ldots,x_p,\tau)\,d\tau-\mu_{-\alpha}(x,t)\Big)\Big]\Big|_{x_\alpha=0} dx'$$
$$\leqslant M_1\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)+M_2\int\limits_0^t\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)d\tau+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^p\int\limits_{G_\alpha}\mu_{-\alpha}^2 dx'. \tag{4.14}$$

Тогда из (4.13), с учетом (4.14), находим

$$\frac{d}{dt}\|u\|_0^2+\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^p\int\limits_G\eta_\alpha\big(u_{x_\alpha}\big)^2\,dx+\sum_{\alpha=1}^p\int\limits_G k_\alpha\big(u_{x_\alpha}\big)^2dx\leqslant M_3\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)$$
$$+M_4\int\limits_0^t\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)\,d\tau+\sum_{\alpha=1}^p\int\limits_{G_\alpha}\mu_{-\alpha}^2\,dx'+\|f\|_0^2. \tag{4.15}$$

Проинтегрировав (4.15) по $\tau$ от 0 до $t$, получаем

$$\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2+\|u_x\|_{2,Q_t}^2$$
$$\leqslant M_5\int\limits_0^t\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)d\tau+M_6\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)d\tau_1 d\tau$$
$$+M_7\Bigg(\int\limits_0^t\Bigg(\|f\|_0^2+\sum_{\alpha=1}^p\int\limits_{G_\alpha}\mu_{-\alpha}^2dx'\Bigg)d\tau+\|u_0(x)\|_0^2+\|u_0'(x)\|_0^2\Bigg). \tag{4.16}$$

Оценим второе слагаемое в правой части (4.16) следующим образом:

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)\,d\tau_1\,d\tau\leqslant T\int\limits_0^t\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)\,d\tau. \tag{4.17}$$

С помощью (4.17) из (4.16) находим

$$\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\leqslant M_8\int\limits_0^t\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)\,d\tau$$
$$+M_7\Bigg(\int\limits_0^t\Bigg(\|f\|_0^2+\sum_{\alpha=1}^p\int\limits_{G_\alpha}\mu_{-\alpha}^2dx'\Bigg)\,d\tau+\|u_0(x)\|_0^2+\|u_0'(x)\|_0^2\Bigg). \tag{4.18}$$

На основании леммы Гронуолла из (4.18) получаем неравенство

$$\int\limits_0^t\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)\,d\tau$$
$$\leqslant M(t)\Bigg(\int\limits_0^t\Bigg(\|f\|_0^2+\sum_{\alpha=1}^p\int\limits_{G_\alpha}\mu_{-\alpha}^2dx'\Bigg)\,d\tau+\|u_0(x)\|_0^2+\|u_0'(x)\|_0^2\Bigg). \tag{4.19}$$

Учитывая неравенство (4.17)–(4.19), из (4.16) получаем априорную оценку

$$\|u\|^2_{W_2^1(G)} + \|u_x\|^2_{2,Q_t} \leqslant M(t)\left(\int\limits_0^t \left(\|f\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^p \int\limits_{G_\alpha} \mu^2_{-\alpha} dx'\right) d\tau + \|u_0(x)\|^2_{W_2^1(G)}\right), \qquad (4.20)$$

где $M$ — зависит только от входных данных задачи (4.1)–(4.4).

Из априорной оценки (4.20) следует единственность решения исходной задачи (4.1)–(4.4), а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных на каждом временном слое в норме пространства $W_2^1(G)$.

## 5. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Для решения задачи (4.1)–(4.4) применим метод конечных разностей. В замкнутом цилиндре $\bar{Q}_T$ введем равномерную сетку [14]:

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \big\{(x_i, t_j),\ x \in \bar{\omega}_h,\ t \in \bar{\omega}_\tau\big\},$$

$$\bar{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^p \bar{\omega}_{h_\alpha}, \quad \bar{\omega}_{h_\alpha} = \big\{x_\alpha^{i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha,\ N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\big\},$$

$$\bar{\omega}_\tau = \big\{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots, m,\ m\tau = T\big\}.$$

На сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (4.1)–(4.4) поставим в соответствие разностную схему, порядка аппроксимации $O\big(|h| + \tau\big)$:

$$y_t = \Lambda(t)y + \delta(t)y + \varphi, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}, \qquad (5.1)$$

$$a_{-\alpha}^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha} + \gamma_{-\alpha}^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha t} = \sum_{\bar{s}=0}^N \beta_{-\alpha,\bar{s}} y_{\bar{s}} \hbar + \sum_{s=0}^j \rho_{-\alpha,s,j} y_\alpha^{(N_\alpha)} \bar{\tau} - \mu_{-\alpha}, \quad x_\alpha = 0, \qquad (5.2)$$

$$-\big(a_{+\alpha} y_{\bar{x}_\alpha} + \gamma_{+\alpha} y_{\bar{x}_\alpha t}\big) = 0, \quad x_\alpha = l_\alpha, \qquad (5.3)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \qquad (5.4)$$

где

$$\Lambda(t) = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha(t), \quad \delta(t) = \sum_{\alpha=1}^p \delta_\alpha(t),$$

$$\Lambda_\alpha(t) y_{(\alpha)} = \big(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}\big)_{x_\alpha} + r_\alpha^+ y_{x_\alpha} + r_\alpha^- y_{\bar{x}_\alpha} - d_\alpha y, \quad \delta_\alpha(t) y_{(\alpha)} = \big(\gamma_\alpha y_{\bar{x}_\alpha t}\big)_{x_\alpha},$$

$$y_{\bar{x}_\alpha} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_\alpha}, \quad y_{x_\alpha} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_\alpha}, \quad y_t = \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau}, \quad y = y^j, \quad \hat{y} = y^{j+1},$$

$$r_\alpha = r_\alpha^+ + r_\alpha^-, \quad |r_\alpha| = r_\alpha^+ - r_\alpha^-, \quad r_\alpha^+ = 0.5(r_\alpha + |r_\alpha|) \geqslant 0,$$

$$r_\alpha^- = 0.5\,(r_\alpha - |r_\alpha|) \leqslant 0, \quad t_j = j\tau, \quad t_j + \tau = (j+1)\tau,$$

где $\tau$, $h$ — шаги сетки, $i_\alpha = 1, \ldots, N_\alpha$,

$$a_\alpha = k_\alpha(x^{-0.5\alpha}, t_j), \quad \gamma_\alpha = \eta_\alpha(x^{-0.5\alpha}, t_j), \quad d_\alpha = q_\alpha(x_i, t), \quad \varphi_i = f(x_i, t_j),$$

$$x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, \quad x_i = \Big(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, \ldots, x_\alpha^{(i_\alpha)}, \ldots, x_p^{(i_p)}\Big),$$

$$x^{-0.5\alpha} = x_1, \ldots, x_{\alpha-1}, x_\alpha - 0.5\,h_\alpha, x_{\alpha+1}, \ldots, x_p,\ x_\alpha^{(0)} = 0,$$

$$y_\alpha^{(0)} = \Big(x_1, x_2, \ldots, x_\alpha^{(0)}, \ldots, x_p, \tau\Big), \quad y_\alpha^{(N_\alpha)} = \Big(x_1, x_2, \ldots, x_\alpha^{(N_\alpha)}, \ldots, x_p, \tau\Big),$$

$$x_\alpha^{(N_\alpha)} = N_\alpha h_\alpha = l_\alpha.$$

Для решения задачи (5.1)–(5.4) получим априорную оценку, воспользовавшись методом энергетических неравенств. В пространстве функций определим норму следующим образом:

$$(u,u)=\|u\|^2,\quad (u,u]=\|u]|^2,$$

$$(u,v]=\sum_{\alpha=1}^{p}(u,v]_\alpha,\quad \|Y_{\bar{x}}]|^2=\sum_{\alpha=1}^{p}\|Y_{\bar{x}_\alpha}]|^2.$$

Умножим тогда разностное уравнение (5.1) скалярно на $2\tau\hat{y}$ :

$$2\tau(y_t,\hat{y})=2\tau(\Lambda(t)\hat{y},\hat{y})+2\tau(\delta(t)y,\hat{y})+2\tau(\varphi,\hat{y}). \tag{5.5}$$

Преобразуем суммы, входящие в (5.5), с учетом условий (5.2), (5.3) и формулы $2\hat{y}y_t=(y^2)_t+\tau(y_t)^2$:

$$2\tau(y_t,\hat{y})=(1,\hat{y}^2)-(1,y^2)+\tau^2(1,y_t^2), \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}\big(\Lambda(t)\hat{y},\hat{y}\big)+\big(\delta(t)y,\hat{y}\big)&=\Bigg(\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha(t)\hat{y},\hat{y}\Bigg)+\Bigg(\sum_{\alpha=1}^{p}\delta_\alpha(t)y,\hat{y}\Bigg)\\&=\sum_{\alpha=1}^{p}\Big(\Lambda_\alpha(t)\hat{y},\hat{y}\Big)+\sum_{\alpha=1}^{p}\Big(\delta_\alpha(\bar{t})y,\hat{y}\Big)\\&=\sum_{\alpha=1}^{p}\Big(\big((a_\alpha\hat{y}_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha},\hat{y}\big)+\big((\gamma_\alpha y_{\bar{x}_\alpha t})_{x_\alpha},\hat{y}\big)+\big(r_\alpha^+\hat{y}_{x_\alpha},\hat{y}\big)+\big(r_\alpha^-\hat{y}_{\bar{x}_\alpha},\hat{y}\big)-\big(d_\alpha\hat{y},\hat{y}\big)\Big).\end{aligned} \tag{5.7}$$

Применяя первую разностную формулу Грина в (5.7) и подставляя преобразованные таким образом выражения в (5.5), с учетом (5.6), получаем

$$\begin{aligned}&(1,\hat{y}^2)-(1,y^2)+\tau^2(1,y_t^2)+\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\Big(1,(\gamma_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^2)_t\Big]_\alpha+\tau^2\sum_{\alpha=1}^{p}\Big(\gamma_\alpha,(y_{\bar{x}_\alpha t})^2\Big]_\alpha\\&=-2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\Big(a_\alpha,y_{\bar{x}_\alpha}^2\Big]_\alpha-\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\Big(\gamma_{t\alpha},\hat{y}_{\bar{x}_\alpha}^2\Big]_\alpha+2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\big(r_\alpha^+y_{x_\alpha},y\big)+2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\big(r_\alpha^-y_{\bar{x}_\alpha},y\big)\\&-2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\big(d_\alpha,y^2\big)-2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}y_\alpha^{(0)}\sum_{\bar{s}=0}^{N}\beta_{-\alpha,\bar{s}}y\hbar+2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\mu_{-\alpha}y_\alpha^{(0)}\\&-2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}y_\alpha^{(0)}\sum_{s=0}^{j}\rho_{-\alpha,s,j}y_\alpha^{(N_\alpha),s+1}\bar{\tau}+2\tau\big(\varphi,y\big).\end{aligned} \tag{5.8}$$

Оценим суммы, входящие в (5.8):

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\big(a_\alpha,y_{\bar{x}_\alpha}^2\,\big]_\alpha\geqslant c_1\sum_{\alpha=1}^{p}\big(1,y_{\bar{x}_\alpha}^2\,\big]_\alpha=c_1\big(1,y_{\bar{x}}^2\,\big]=c_1\|y_{\bar{x}}]|^2, \tag{5.9}$$

$$\tau^2\sum_{\alpha=1}^{p}\big(\gamma_\alpha,(y_{\bar{x}_\alpha t})^2\,\big]_\alpha\geqslant\tau^2c_0\|y_{\bar{x}t}]|^2, \tag{5.10}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\big(r_\alpha^+y_{x_\alpha},y\big)+\sum_{\alpha=1}^{p}\big(r_\alpha^-y_{\bar{x}_\alpha},y\big)\leqslant 2c_2\|y_{\bar{x}}]|\,\|y\|\leqslant c_2\big(\|y\|^2+\|y_{\bar{x}}]|^2\big), \tag{5.11}$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{p}(d_\alpha, y^2) \leqslant c_2\sum_{\alpha=1}^{p}(1,y^2) = c_2\|y\|^2, \tag{5.12}$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{p} y_\alpha^{(0)}\sum_{\bar s=0}^{N}\beta_{-\alpha,\bar s}y_{\bar s}\hbar \leqslant \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\left[\left(y_\alpha^{(0)}\right)^2 + \left(\sum_{\bar s=0}^{N}\beta_{-\alpha,\bar s}y_{\bar s}\hbar\right)^2\right] \leqslant M_1\big(\|y_{\bar x}]|^2 + \|y\|^2\big), \tag{5.13}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\mu_{-\alpha}y_\alpha^{(0)} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\Big(\mu_{-\alpha}^2 + \big(y_\alpha^{(0)}\big)^2\Big) \leqslant \frac{1}{2}\Big(\varepsilon\|y_{\bar x}]|^2 + c(\varepsilon)\|y\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\mu_{-\alpha}^2\Big), \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}
-\sum_{\alpha=1}^{p} y_\alpha^{(0)}\sum_{s=0}^{j}\rho_{-\alpha,s,j}y_\alpha^{(N_\alpha),s+1}\bar\tau &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\Big(\sum_{s=0}^{j}\rho_{-\alpha,s,j}y_\alpha^{(N_\alpha),s+1}\bar\tau\Big)^2 + \big(y_\alpha^{(0)}\big)^2\right)\\
&\leqslant \frac{1}{2}\Big(\varepsilon\|y_{\bar x}]|^2 + c(\varepsilon)\|y\|^2\Big) + M_2\sum_{s=0}^{j}\Big(\varepsilon\|y_{\bar x}^{s+1}]|^2 + c(\varepsilon)\|y^{s+1}\|^2\Big)\bar\tau,
\end{aligned} \tag{5.15}$$

$$(\varphi, y) \leqslant \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|^2. \tag{5.16}$$

Учитывая оценки (5.9)–(5.16), после несложных преобразований из (5.8) находим:

$$\begin{aligned}
&\|\hat y\|^2 - \|y\|^2 + c_0\|\hat y_{\bar x}]|^2 - c_0\|y_{\bar x}]|^2 + \tau^2\|\hat y_t]|^2 + \tau^2 c_0\|\hat y_{\bar x\,t}]|^2 + 2\tau c_1\|\hat y_{\bar x}]|^2\\
&\leqslant M_3\Big(\|\hat y\|^2 + \|\hat y_{\bar x}]|^2\Big)\tau + M_4\sum_{s=0}^{j}\Big(\|y^{s+1}\|^2 + \|y_{\bar x}^{s+1}]|^2\Big)\bar\tau\tau + M_5\Big(\|\varphi\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\mu_{-\alpha}^2\Big)\tau.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Просуммируем (5.17) по $j\,'$ от 0 до $j$ :

$$\begin{aligned}
&\|y^{j+1}\|^2 + \|y_{\bar x}^{j+1}]|^2 + \sum_{j\,'=0}^{j}\Big(\|y_t^{j\,'+1}]|^2\tau + \|y_{\bar x\,t}^{j\,'+1}]|^2\tau + \|y_{\bar x}^{j\,'+1}]|^2\Big)\tau\\
&\leqslant M_6\sum_{j\,'=0}^{j}\Big(\|y^{j\,'+1}\|^2 + \|y_{\bar x}^{j\,'+1}]|^2\Big)\tau + M_7\sum_{j\,'=0}^{j}\sum_{s=0}^{j\,'}\Big(\|y^{s+1}\|^2 + \|y_{\bar x}^{s+1}]|^2\Big)\bar\tau\tau\\
&\qquad + M_8\Big(\sum_{j\,'=0}^{j}\Big(\|\varphi^{j\,'}\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\mu_{-\alpha}^2\Big)\tau + \|y^0\|^2 + \|y_{\bar x}^0]|^2\Big).
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Оценим второе слагаемое в правой части (5.18)

$$\sum_{j\,'=0}^{j}\sum_{s=0}^{j\,'}\Big(\|y^{s+1}\|^2 + \|y_{\bar x}^{s+1}]|^2\Big)\bar\tau\tau \leqslant T\sum_{j\,'=0}^{j}\Big(\|y^{j\,'+1}\|^2 + \|y_{\bar x}^{j\,'+1}]|^2\Big)\tau. \tag{5.19}$$

В силу (5.19) из (5.18) имеем

$$
\begin{gathered}
\|y^{j+1}\|^2+\|y_{\bar{x}}^{j+1}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\Big(\|y_t^{j'+1}]|^2\tau+\|y_{\bar{x}t}^{j'+1}]|^2\tau+\|y_{\bar{x}}^{j'+1}]|^2\Big)\tau\\
\leqslant M_9\sum_{j'=0}^{j}\Big(\|y^{j'+1}\|^2+\|y_{\bar{x}}^{j'+1}]|^2\Big)\tau\\
+M_8\bigg(\sum_{j'=0}^{j}\Big(\|\varphi^{j'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\mu_{-\alpha}^{j'2}\Big)\tau+\|y^0\|^2+\|y_{\bar{x}}^0]|^2\bigg)\\
=M_9\Big(\|y^{j'+1}\|^2+\|y_{\bar{x}}^{j'+1}]|^2\Big)\tau+M_9\sum_{j'=1}^{j}\Big(\|y^{j'}\|^2+\|y_{\bar{x}}^{j'}]|^2\Big)\tau\\
+M_{10}\bigg(\sum_{j'=0}^{j}\Big(\|\varphi^{j'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\mu_{-\alpha}^{j'2}\Big)\tau+\|y^0\|^2+\|y_{\bar{x}}^0]|^2\bigg).
\end{gathered}
\tag{5.20}
$$

Выбирая $\tau$ таким образом, что для всех $\tau\leqslant\tau_0$, $\tau_0=\frac{1}{2M_9}$, из (5.20) получим

$$
\begin{gathered}
\|y^{j+1}\|^2+\|y_{\bar{x}}^{j+1}]|^2\leqslant M_{11}\sum_{j'=1}^{j}\Big(\|y^{j'}\|^2+\|y_{\bar{x}}^{j'}]|^2\Big)\tau\\
+M_{12}\bigg(\sum_{j'=0}^{j}\Big(\|\varphi^{j'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\mu_{-\alpha}^{j'2}\Big)\tau+\|y^0\|^2+\|y_{\bar{x}}^0]|^2\bigg).
\end{gathered}
\tag{5.21}
$$

Оценивая первое слагаемое в правой части (5.21) с помощью леммы Гронуолла для сеточной функций [17], из (5.18) с учетом (5.19), (5.20) получим априорную оценку

$$
\begin{gathered}
\|y^{j+1}\|^2+\|y_{\bar{x}}^{j+1}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\Big(\|y_t^{j'+1}]|^2\tau+\|y_{\bar{x}t}^{j'+1}]|^2\tau+\|y_{\bar{x}}^{j'+1}]|^2\Big)\tau\\
\leqslant M\bigg(\sum_{j'=0}^{j}\Big(\|\varphi^{j'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\mu_{-\alpha}^{j'2}\Big)\tau+\|y^0\|^2+\|y_{\bar{x}}^0]|^2\bigg).
\end{gathered}
\tag{5.22}
$$

Тогда справедлива следующая

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия (4.5). Тогда существует такое $\tau_0$, что если $\tau\leqslant\tau_0$, для решения разностной задачи (5.1)–(5.4) справедлива априорная оценка*

$$
\begin{gathered}
\|y^{j+1}\|^2_{W_2^1(G)}+\sum_{j'=0}^{j}\Big(\|y_{\bar{t}}^{j'+1}]|^2\tau+\|y_{\bar{x}\bar{t}}^{j'+1}]|^2\tau+\|y_{\bar{x}}^{j'+1}]|^2\Big)\tau\\
\leqslant M\bigg(\sum_{j'=0}^{j}\Big(\|\varphi^{j'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\mu_{-\alpha}^{j'2}\Big)\tau+\|y^0\|^2_{W_2^1(G)}\bigg),
\end{gathered}
$$

*где $M$ — положительная постоянная, не зависящая от $|h|$ и $\tau$.*

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (4.1)–(4.4), $y(x_i,t_j)=y_i^j$ — решение разностной задачи (5.1)–(5.4). Обозначим через $z_i^j=y_i^j-u_i^j$ погрешность. Тогда, подставляя $y=z+u$

в (5.1)–(5.4), получим задачу для $z$:

$$z_t = \Lambda(t)z + \delta(t)z + \Psi, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}, \tag{5.23}$$

$$a_{-\alpha}^{(+1_\alpha)} z_{x_\alpha} + \gamma_{-\alpha}^{(+1_\alpha)} z_{x_\alpha t} = \sum_{\bar{s}=0}^{N} \beta_{-\alpha,\bar{s}} z_{\bar{s}} \hbar + \sum_{s=0}^{j} \rho_{-\alpha,s,j} z_\alpha^{(N_\alpha)} \bar{\tau} - \nu_{-\alpha}, \quad x_\alpha = 0, \tag{5.24}$$

$$-\Big(a_{+\alpha} z_{\bar{x}_\alpha} + \gamma_{+\alpha} z_{\bar{x}_\alpha t}\Big) = -\nu_{+\alpha}, \quad x_\alpha = l_\alpha, \tag{5.25}$$

$$z(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \tag{5.26}$$

где $\Psi = O\big(|h| + \tau\big)$, $\nu_{-\alpha} = O\big(|h| + \tau\big)$, $\nu_{+\alpha} = O\big(|h| + \tau\big)$ — погрешности аппроксимации на решении задачи (4.1)–(4.4).

Применяя априорную оценку (5.24) к решению задачи (5.23)–(5.26), получим оценку

$$\|z^{j+1}\|^2_{W_2^1(G)} + \sum_{j'=0}^{j} \Big( \|z_{\bar{t}}^{j'+1}]|^2 \tau + \|z_{\bar{x}\bar{t}}^{j'+1}]|^2 \tau + \|z_{\bar{x}}^{j'+1}]|^2 \Big) \tau$$
$$\leqslant M \sum_{j'=0}^{j} \Big( \|\Psi^{j'}\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \big(\nu_{-\alpha}^{j'2} + \nu_{+\alpha}^{j'2}\big) \Big) \tau,$$

где $M$ — положительная постоянная, не зависящая от $|h|$ и $\tau$.

Из полученной априорной оценки следует сходимость схемы (5.23)–(5.26) со скоростью $O(|h| + \tau)$ в сеточной норме $W_2^1(G)$.

Замечание. Полученные результаты имеют место и в случае, когда уравнение имеет вид:

$$u_t = (k(x,t)u_x)_x + (\eta(x,t)u_x)_{xt} + r(x,t)u_x - q(x,t)u + f(x,t), \quad 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T,$$

если условия (1.5) дополнить условием $\eta \in C^{3,2}(Q_T)$.

## Литература


1. *Баренблат Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика.—1960.—Т. 25, вып. 5.—С. 852–864.
2. *Дзекцер Е. С.* Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // Докл. АН СССР.—1975.—Т. 220, № 3.—С. 540–543.
3. *Рубинштейн Л. И.* К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Изв. АН СССР. Сер. геогр.—1948.—Т. 12, № 1.—С. 27–45.
4. *Ting T., Cooling A.* Process according to two temperature theory of heat conduction // J. Math. Anal. Appl.—1974.—Т. 45, № 9.—P. 23–31.
5. *Hallaire M.* L'eau et la production vegetable // Institut National de la Recherche Agronomique.—1964.—№ 9.
6. *Чудновский А. Ф.* Теплофизика почв.—М.: Наука, 1976.—352 с.
7. *Colton D. L.* Pseudoparabolic equations in one space variable // J. Dif. Eq.—1972.—Vol. 12.—P. 559–565.
8. *Ахиев С. С., Гусейнов О. М.* О фундаментальном решении одной краевой задачи для гиперболического уравнения третьего порядка.—Баку: Азерб. ун-т, 1983.—9 с.
9. *Водахова В. А.* Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Диф. уравнения.—1982.—Т. 18, № 2.—С. 280–285.
10. *Кожанов А. И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Диф. уравнения.—2004.—Т. 40, № 6.—С. 763–774.

11. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Диф. уравнения.—1982.—Т. 18, № 4.—С. 689–699.
12. *Чудновский А. Ф.* Некоторые коррективы в постановке и решении задач тепло- и влагопереноса в почве // Сб. тр. по агрофизике.—1969.—Вып. 23.—С. 41–54.
13. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики.—М.: Наука, 1973.—407 с.
14. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1983.—616 с.
15. *Андреев В. Б.* О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.—1968.—Т. 8, № 6.—С. 1218–1231.
16. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем.—М.: Наука, 1973.—416 с.
17. *Самарский А. А.* Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений параболического типа // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.—1963.—Т. 3, № 2.—С. 266–298.

*Статья поступила 14 мая 2012 г.*

Бештоков Мурат Хамидбиевич
Кабардино-Балкарский госуниверситет им. Х. М. Бербекова,
*доцент кафедры вычислительной математики*
РОССИЯ, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 175
E-mail: beshtokov_murat@rambler.ru

# A PRIORI ESTIMATES OF THE SOLUTIONS OF NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A PSEUDO-PARABOLIC EQUATION

Beshtokov M. H.

In this paper we consider nonlocal boundary value problems for a third order pseudo-parabolic equation with variable coefficients in the one-dimensional and multidimensional cases. For nonlocal problems a priori estimates in differential and difference treatment are obtained. These estimates imply uniqueness, stability and convergence of the solution of the difference problem to the solution of the differential problem.

**Key words:** boundary value problem, nonlocal condition, a priori estimate, difference scheme, stability and convergence of difference schemes, hyperbolic equation of the third order, pseudo-parabolic equation.