Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 4, С. 3–11

УДК **517.968**

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРАМИ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА НА ПОЛУОСИ[1]

С. Н. Асхабов

Методом монотонных операторов в комплексных пространствах Лебега доказываются теоремы о существовании, единственности и способах нахождения решения для различных классов нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала. Получены оценки норм решений и скорости сходимости к ним последовательных приближений пикаровского типа.

Ключевые слова: нелинейные интегральные уравнения, операторы типа потенциала, метод монотонных операторов.

Введение

Как известно [1, 2], нелинейные интегральные уравнения с ядрами типа потенциала в случае, когда интегрирование производится по ограниченной области, достаточно хорошо изучены в работах М. А. Красносельского, П. П. Забрейко, В. Б. Мороза и др. авторов. Такие уравнения в случае неограниченной области практически не исследованы (см., например, литературные указания в [1] и [2]). Отметим, в этой связи, работу [1], в которой в вещественных пространствах Лебега $L_p(\mathbb{R}^N)$ исследовано однородное нелинейное уравнение Гаммерштейна специального вида с ядром типа потенциала Рисса вариационным методом, основанном на переходе к изучению некоторого функционала Голомба, критическим точкам которого соответствуют решения исходного уравнения. Принципиальная трудность заключается в том, что при переходе к неограниченной области операторы, возникающие при исследовании нелинейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала, вообще говоря, теряют естественное для них в случае ограниченной области свойство компактности [1].

В монографии [2] в комплексных весовых пространствах $L_p(R)$ были изучены нелинейные уравнения, содержащие оператор типа потенциала

$$(B^\alpha u)(x) = \frac{\overline{b(x)}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_R \frac{b(t)\, u(t)\, dt}{|x-t|^{1-\alpha}},$$

где $0 < \alpha < 1$, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера, R — либо вся действительная ось, либо некоторая ее часть (полуось $[0,\infty)$ или отрезок $[a,b]$) и заданная функция $b(x) \neq 0$ почти всюду на $\mathbb{R}$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00422.

В данной работе в комплексных пространствах Лебега $L_p(0,\infty)$, $1<p<\infty$, рассмотрены основные классы нелинейных уравнений, содержащие оператор типа потенциала вида

$$(Q^\alpha u)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty \frac{\left[\overline{a(x)}b(t)-a(t)\overline{b(x)}\right]u(t)\,dt}{|x-t|^{1-\alpha}}.$$

Используя метод монотонных (по Браудеру — Минти) операторов, доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности, оценках и способах нахождения решений.

Важно отметить, что сингулярные интегральные операторы с подобными ядрами вида $\frac{a(x)\,b(t)-a(t)\,b(x)}{x-t}$ играют центральную роль в теории определителей Фредгольма и уравнения Пенлеве пятого рода, теории случайных матриц (модели случайно-матричного типа) и др. [3]. Нелинейные сингулярные интегральные уравнения с ядрами вида $\frac{\overline{a(x)}\,b(t)+a(t)\,\overline{b(x)}}{x-t}$ были изучены в [4, 5].

Заметим также, что оператор Q^α, в отличие от оператора B^α, не является строго положительным симметрическим оператором и значение функционала $\langle Q^\alpha u,u\rangle$ при $u(x)\in L_p(0,\infty)$, в отличие от $\langle B^\alpha u,u\rangle$, не является, вообще говоря, вещественным числом. Поэтому исследование нелинейных уравнений, содержащих оператор Q^α, вызывает дополнительные трудности по сравнению с исследованием уравнений, содержащих оператор B^α.

1. Непрерывность и положительность оператора типа потенциала

Рассмотрим вопрос о положительности оператора Q^α в комплексных пространствах $L_p(0,\infty)$. Для упрощения записей введем следующие обозначения:

$$L_p(0,\infty)=L_p,\quad p'=\frac{p}{p-1},\quad \langle u,v\rangle=\int\limits_0^\infty u(x)\,\overline{v(x)}\,dx,\quad (I^\alpha u)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty\frac{u(t)\,dt}{|x-t|^{1-\alpha}},$$

где $1<p<\infty$, $0<\alpha<1$. Напомним, что оператор A, действующий из L_p в $L_{p'}$, называется *положительным*, если $\mathrm{Re}\langle Au,u\rangle\geqslant 0$ для любого $u(x)\in L_p$, и *строго положительным*, если равенство нулю в последнем неравенстве возможно лишь при $u(x)=0$.

В силу леммы 9.1 [2], оператор I^α действует непрерывно из пространства $L_{2/(1+\alpha)}$ в сопряженное с ним пространство $L_{2/(1-\alpha)}$ и строго положителен, причем

$$\|I^\alpha u\|_{2/(1-\alpha)}\leqslant n(\alpha)\,\|u\|_{2/(1+\alpha)},\quad \langle I^\alpha u,u\rangle\geqslant 0\quad (\forall\, u(x)\in L_{2/(1+\alpha)}),\tag{1}$$

где $n(\alpha)$ означает норму оператора I^α, действующего ограниченно из $L_{2/(1+\alpha)}$ в $L_{2/(1-\alpha)}$ (так как I^α — самосопряженный оператор, то функционал $\langle I^\alpha u,u\rangle$ принимает только действительные значения и поэтому символ Re перед ним можно опустить).

Лемма 1. *Пусть $0<\alpha<1$, $2\leqslant p<\infty$ и $a(x),b(x)\in L_{2p/[p(1+\alpha)-2]}$. Тогда оператор Q^α действует непрерывно из L_p в $L_{p'}$ и положителен, причем*

$$\|Q^\alpha u\|_{p'}\leqslant 2\,n(\alpha)\,\|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|u\|_p,\tag{2}$$

$$\langle Q^\alpha u,u\rangle=2\,i\,\mathrm{Im}\langle b\,u,I^\alpha(a\,u)\rangle,\quad \mathrm{Re}\langle Q^\alpha u,u\rangle=0\quad(\forall\, u(x)\in L_p).\tag{3}$$

$\lhd$ Пусть $u(x)\in L_p$. Применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\|a\,u\|_{2/(1+\alpha)}\leqslant\|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|u\|_p,\quad \|b\,u\|_{2/(1+\alpha)}\leqslant\|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|u\|_p.\tag{4}$$

Следовательно, в силу первого неравенства из (1) $I^\alpha(a\,u), I^\alpha(b\,u) \in L_{2/(1-\alpha)}$, причем

$$\|I^\alpha(a\,u)\|_{2/(1-\alpha)} \leqslant n(\alpha)\,\|a\,u\|_{2/(1+\alpha)}, \quad \|I^\alpha(b\,u)\|_{2/(1-\alpha)} \leqslant n(\alpha)\,\|b\,u\|_{2/(1+\alpha)}. \tag{5}$$

Используя оценки (4), из (5) получаем

$$\begin{aligned} \|I^\alpha(a\,u)\|_{2/(1-\alpha)} &\leqslant n(\alpha)\,\|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\,\|u\|_p, \\ \|I^\alpha(b\,u)\|_{2/(1-\alpha)} &\leqslant n(\alpha)\,\|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\,\|u\|_p. \end{aligned} \tag{6}$$

Применяя неравенство Гёльдера, имеем $\|\overline{a}\,I^\alpha(b\,u)\|_{p'} \leqslant \|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|I^\alpha(b\,u)\|_{2/(1-\alpha)}$. Следовательно, в силу второй оценки из (6) справедливо неравенство

$$\|\overline{a}\,I^\alpha(b\,u)\|_{p'} \leqslant n(\alpha)\,\|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|u\|_p. \tag{7}$$

Аналогично доказывается, что

$$\|\overline{b}\,I^\alpha(a\,u)\|_{p'} \leqslant n(\alpha)\,\|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|u\|_p. \tag{8}$$

Так как $Q^\alpha u = \overline{a}I^\alpha(b\,u) - \overline{b}I^\alpha(a\,u)$, то учитывая оценки (7) и (8), получаем

$$\|Q^\alpha u\|_{p'} \leqslant \|\overline{a}\,I^\alpha(b\,u)\|_{p'} + \|\overline{b}\,I^\alpha(a\,u)\|_{p'} \leqslant 2\,n(\alpha)\,\|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\|u\|_p,$$

т. е. оператор Q^α действует непрерывно из L_p в $L_{p'}$ и выполнено неравенство (2).

Докажем положительность оператора Q^α. Используя свойство симметричности оператора I^α, для любого $u(x) \in L_p$, имеем

$$\begin{aligned} \langle Q^\alpha u, u\rangle &= \langle \overline{a}\,I^\alpha(b\,u), u\rangle - \langle \overline{b}\,I^\alpha(a\,u), u\rangle = \langle I^\alpha(b\,u), a\,u\rangle - \langle I^\alpha(a\,u), b\,u\rangle \\ &= \langle b\,u, I^\alpha(a\,u)\rangle - \overline{\langle b\,u, I^\alpha(a\,u)\rangle} = 2\,i\,\mathrm{Im}\,\langle b\,u, I^\alpha(a\,u)\rangle, \end{aligned}$$

т. е. выполнено первое равенство из (3). Второе равенство из (3) является прямым следствием первого. $\triangleright$

Аналогично доказывается следующая лемма, двойственная лемме 1.

Лемма 2. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $1 < p \leqslant 2$ *и* $a(x), b(x) \in L_{2p/[2-p(1-\alpha)]}$. *Тогда оператор* Q^α *действует непрерывно из* $L_{p'}$ *в* L_p *и положителен, причем*

$$\|Q^\alpha u\|_p \leqslant 2\,n(\alpha)\,\|a\|_{2p/[2-p(1-\alpha)]}\|b\|_{2p/[2-p(1-\alpha)]}\|u\|_{p'}, \tag{9}$$

$$\langle Q^\alpha u, u\rangle = 2\,i\,\mathrm{Im}\langle b\,u, I^\alpha(a\,u)\rangle, \quad \mathrm{Re}\langle Q^\alpha u, u\rangle = 0 \quad (\forall\, u(x) \in L_{p'}). \tag{10}$$

2. Теоремы существования и единственности в $L_p(0,\infty)$

В этом пункте доказываются теоремы о существовании, единственности и оценках решения для различных классов нелинейных уравнений, содержащих оператор Q^α.

Приведем необходимые определения и обозначения. Пусть X — комплексное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, а X^* — сопряженное с ним пространство с нормой $\|\cdot\|_*$. Обозначим через $\langle y, x\rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$. Пусть $u, v \in X$ — произвольные элементы. Оператор $A : X \to X^*$ называется *монотонным*, если $\mathrm{Re}\,\langle Au - Av, u - v\rangle \geqslant 0$; *строго монотонным*, если $\mathrm{Re}\,\langle Au - Av, u - v\rangle > 0$ при $u \neq v$; *коэрцитивным*, если $\lim_{\|u\|_p\to\infty} \frac{\mathrm{Re}\,\langle Au,u\rangle}{\|u\|_p} = \infty$.

Обозначим через $\mathbb{C}$ множество всех комплексных чисел, а через L_p^+ — множество всех неотрицательных функций из L_p. Выпишем для удобства ссылок все ограничения, накладываемые ниже на комплекснозначную функцию $F(x,z):[0,\infty)\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, удовлетворяющую условиям Каратеодори (она определена при $x\in[0,\infty)$, $z\in\mathbb{C}$, измерима по x при всех z и является непрерывной по z при каждом фиксированном x) и определяющую нелинейность исследуемых нами интегральных уравнений.

Именно, в зависимости от рассматриваемого класса нелинейных уравнений, будем накладывать на нелинейность $F(x,z)$ либо условия 1)–3):

1) существуют $c(x)\in L_{p'}^+$ и $d_1>0$ такие, что для почти всех $x\in[0,\infty)$ и любого $z\in\mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$|F(x,z)|\leqslant c(x)+d_1|z|^{p-1};$$

2) для почти всех $x\in[0,\infty)$ и всех $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}\Big\{[F(x,z_1)-F(x,z_2)]\cdot\overline{[z_1-z_2]}\Big\}\geqslant 0;$$

3) существуют $D(x)\in L_1^+$ и $d_2>0$ такие, что для почти всех $x\in[0,\infty)$ и любого $z\in\mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}\{F(x,z)\cdot\overline{z}\}\geqslant d_2|z|^p-D(x),$$

либо условия 4)–6):

4) существуют $g(x)\in L_p^+$ и $d_3>0$ такие, что для почти всех $x\in[0,\infty)$ и любого $z\in\mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$|F(x,z)|\leqslant g(x)+d_3|z|^{1/(p-1)};$$

5) для почти всех $x\in[0,\infty)$ и всех $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}\Big\{[F(x,z_1)-F(x,z_2)]\cdot\overline{[z_1-z_2]}\Big\}>0;$$

6) существуют $D(x)\in L_1^+$ и $d_4>0$ такие, что для почти всех $x\in[0,\infty)$ и любого $z\in\mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}\{F(x,z)\cdot\overline{z}\}\geqslant d_4|z|^{p/(p-1)}-D(x).$$

Простейшим примером функции $F(x,z)$, удовлетворяющей условиям 1)–3), является $F(x,z)=|z|^{p-2}\cdot z$, где $p\geqslant 2$ — любое число. Обозначим через F оператор, порожденный функцией $F(x,z)$.

Доказательство следующей теоремы основано на теореме Браудера — Минти (основной теореме теории монотонных операторов) [6, 7].

Теорема 1. *Пусть* $0<\alpha<1$, $2\leqslant p<\infty$ *и* $a(x),b(x)\in L_{2p/[p(1+\alpha)-2]}$. *Если выполнены условия* 1)–3), *то уравнение*

$$F(x,u(x))+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty\frac{\Big[\overline{a(x)}\,b(t)-a(t)\,\overline{b(x)}\Big]\,u(t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\,dt=f(x)\tag{11}$$

имеет решение $u^*(x)\in L_p$ *при любом* $f(x)\in L_{p'}$. *Решение единственно, если выполнено условие* 5). *Кроме того, если условие* 3) *выполнено при* $D(x)=0$, *то справедлива оценка* $\|u^*\|_p\leqslant\big(d_2^{-1}\|f\|_{p'}\big)^{1/(p-1)}$.

$\lhd$ Запишем данное уравнение (11) в операторном виде: $Au = f$, где $Au = Fu + Q^\alpha u$. Из условий 1)–3) вытекает, что оператор F действует из L_p в $L_{p'}$ непрерывен, монотонен и коэрцитивен. В силу леммы 1 оператор Q^α действует из L_p в $L_{p'}$ непрерывен и положителен. Следовательно, оператор A действует из L_p в $L_{p'}$, непрерывен, монотонен и коэрцитивен, причем он строго монотонен, если выполнено условие 5). Значит, по теореме Браудера — Минти, уравнение $Au = f$, а с ним и данное уравнение (11), имеет решение $u^*(x) \in L_p$, причем это решение единственно, если выполнено условие 5).

Осталось доказать оценку нормы решения $u^*(x)$. Так как $Au^* = f$, то используя условие 3) при $D(x) = 0$ и второе равенство из (3), имеем

$$d_2 \cdot \|u^*\|_p^p \leqslant \operatorname{Re}\langle Fu^*, u^*\rangle = \operatorname{Re}\langle Fu^* + Q^\alpha u^*, u^*\rangle = \operatorname{Re}\langle f, u^*\rangle \leqslant \|f\|_{p'} \cdot \|u^*\|_p,$$

откуда легко получаем доказываемую оценку. $\rhd$

Рассмотрим теперь другой класс нелинейных уравнений с ядрами типа потенциала, соответствующий случаю, когда нелинейность находится под знаком интеграла. В данном случае применить непосредственно теорему Браудера — Минти нельзя, поскольку произведение монотонных операторов не является, вообще говоря, монотонным оператором и поэтому требуется другой подход к исследованию таких классов уравнений.

Теорема 2. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $1 < p \leqslant 2$ *и* $a(x), b(x) \in L_{2p/[2-p(1-\alpha)]}$. *Если нелинейность* $F(x,z)$ *удовлетворяет условиям* 1), 3) *и* 5), *то уравнение*

$$u(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{[\overline{a(x)}b(t) - a(t)\overline{b(x)}]\, F(t, u(t))\, dt}{|x-t|^{1-\alpha}} = f(x) \tag{12}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p$ *при любом* $f(x) \in L_p$. *Кроме того, если условия* 1) *и* 3) *выполнены при* $c(x) = D(x) = 0$, *то* $\|u^*\|_p \leqslant d_1\, d_2^{-1}\, \|f\|_p$.

$\lhd$ Из условий 1), 3) и 5) следует, что оператор F отображает L_p на $L_{p'}$, непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит [2], существует обратный оператор F^{-1}, отображающий $L_{p'}$ на L_p, хеминепрерывный, строго монотонный и коэрцитивный. Поэтому, с учетом леммы 2, имеем, что оператор $A = F^{-1} + Q^\alpha$ удовлетворяет условиям теоремы Браудера — Минти, т. е. он действует из $L_{p'}$ в L_p, хеминепрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит, уравнение $F^{-1}v + Q^\alpha v = f$ имеет единственное решение $v^* \in L_{p'}$. Но тогда $u^* = F^{-1}v^* \in L_p$ является решением уравнения $u + Q^\alpha Fu = f$, т. е. данного уравнения (12). В самом деле, так как $F^{-1}v^* + Q^\alpha v^* = f$ и $F\,F^{-1}\psi = \psi$ $(\forall\, \psi \in L_{p'})$, то $u^* + Q^\alpha Fu^* = F^{-1}v^* + Q^\alpha F\, F^{-1}v^* = F^{-1}v^* + Q^\alpha v^* = f$.

Докажем единственность решения уравнения (12). В самом деле, если допустить, что уравнение (12) имеет два различных решения u_1 и u_2, т. е. $u_1 + Q^\alpha Fu_1 = f$ и $u_2 + Q^\alpha Fu_2 = f$, то придем к противоречию:

$$\begin{aligned} 0 = \operatorname{Re}\big\langle u_1 + Q^\alpha Fu_1 - u_2 - Q^\alpha Fu_2, Fu_1 - Fu_2\big\rangle = \operatorname{Re}\big\langle u_1 - u_2, Fu_1 - Fu_2\big\rangle \\ + \operatorname{Re}\big\langle Q^\alpha(Fu_1 - Fu_2), Fu_1 - Fu_2\big\rangle = \operatorname{Re}\big\langle u_1 - u_2, Fu_1 - Fu_2\big\rangle > 0, \end{aligned}$$

так как в силу условия 5) оператор F является строго монотонным.

Осталось доказать оценку нормы решения. Используя условия 1) и 3) при $c(x) = D(x) = 0$, второе равенство из (10), равенство $u^* + Q^\alpha Fu^* = f$ и неравенство Гёльдера, имеем

$$d_2 \cdot \|u^*\|_p^p \leqslant \operatorname{Re}\big\langle u^*, Fu^*\big\rangle = \operatorname{Re}\big\langle u^* + Q^\alpha Fu^*, Fu^*\big\rangle = \operatorname{Re}\big\langle f, Fu^*\big\rangle \leqslant d_1 \cdot \|f\|_p \cdot \|u^*\|_p^{p-1},$$

откуда легко получаем доказываемую оценку. $\rhd$

Рассмотрим, наконец, уравнение, в которое оператор типа потенциала входит нелинейно. Обратим внимание на то, что для таких уравнений ограничения на нелинейность подбираются таким образом, чтобы нелинейный оператор F действовал непрерывно из сопряженного пространства $L_{p'}$ в исходное пространство L_p, в котором разыскиваются решения, и был строго монотонным и коэрцитивным. А именно, в отличие от теорем 1 и 2, в следующей теореме предполагается, что нелинейность F удовлетворяет условиям 4)–6), а не условиям 1)–3).

Теорема 3. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $2 \leqslant p < \infty$ *и* $a(x), b(x) \in L_{2p/[p(1+\alpha)-2]}$. *Если нелинейность* $F(x, z)$ *удовлетворяет условиям* 4)–6), *то уравнение*

$$u(x) + F\left(x, \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{[\overline{a(x)}b(t) - a(t)\overline{b(x)}]\, u(t)\, dt}{|x-t|^{1-\alpha}}\right) = f(x) \tag{13}$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p$ *при любом* $f(x) \in L_p$. *Кроме того, если в условиях* 4) *и* 6) $g(x) = 0$ *и* $D(x) = 0$, *то справедлива оценка*

$$\|u^* - f\|_p \leqslant \left[d_3^p\, d_4^{-1}\, n(\alpha)\, \|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\, \|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\, \|f\|_p\right]^{1/(p-1)}.$$

$\lhd$ Из леммы 1 и условий 4)–6) вытекает, соответственно, что оператор $Q^\alpha : L_p \to L_{p'}$ непрерывен и положителен, а оператор $F : L_{p'} \to L_p$ непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит [2], существует хеминепрерывный, строго монотонный, коэрцитивный обратный оператор $F^{-1} : L_p \to L_{p'}$. Запишем уравнение (13) в операторном виде: $u + F\, Q^\alpha u = f$. Полагая в нем $u = f - v$ и применяя затем к обеим частям получающегося уравнения оператор F^{-1}, приходим к уравнению:

$$\Phi v = Q^\alpha f, \quad \Phi v \equiv F^{-1} v + Q^\alpha v. \tag{14}$$

Поскольку оператор Φ удовлетворяет всем требованиям теоремы Браудера — Минти, то уравнение (14) имеет единственное решение $v^* \in L_p$. Но тогда данное уравнение (13) имеет решение $u^* = f - v^* \in L_p$. Покажем, что это решение единственно. Допустим противное, что уравнение (13) имеет два разных решения u_1 и u_2: $u_1 + FQ^\alpha u_1 = f$ и $u_2 + FQ^\alpha u_2 = f$. Тогда приходим к противоречию:

$$\begin{gathered} 0 = \operatorname{Re}\big\langle u_1 + F\, Q^\alpha u_1 - u_2 - F\, Q^\alpha u_2, Q^\alpha u_1 - Q^\alpha u_2\big\rangle = \operatorname{Re}\big\langle u_1 - u_2, Q^\alpha(u_1 - u_2)\big\rangle \\ + \operatorname{Re}\big\langle F\, Q^\alpha u_1 - F\, Q^\alpha u_2, Q^\alpha u_1 - Q^\alpha u_2\big\rangle = \operatorname{Re}\big\langle F\, Q^\alpha u_1 - F\, Q^\alpha u_2, Q^\alpha u_1 - Q^\alpha u_2\big\rangle > 0, \end{gathered}$$

так как в силу условия 5) оператор F является строго монотонным.

Осталось доказать оценку нормы $\|u^* - f\|_p$. Воспользуемся доказанными равенствами $u^* + F\, Q^\alpha u^* = f$ и $F^{-1} v^* + Q^\alpha v^* = Q^\alpha f$, где $u^* = f - v^*$. Положим $\psi = F^{-1} v^*$. Тогда $F\psi = v^*$. Используя условия 4) и 6) при $g(x) = D(x) = 0$, соотношения (2) и (3), и неравенство Гёльдера, имеем

$$\begin{gathered} d_4\, \|\psi\|_{p'}^{p'} \leqslant \operatorname{Re}\langle F\psi, \psi\rangle = \operatorname{Re}\langle v^*, F^{-1} v^*\rangle = \operatorname{Re}\langle v^*, F^{-1} v^*\rangle + \operatorname{Re}\langle v^*, Q^\alpha v^*\rangle \\ = \operatorname{Re}\langle v^*, Q^\alpha f\rangle \leqslant \|v^*\|_p\, \|Q^\alpha f\|_{p'} \leqslant \|v^*\|_p\, n(\alpha)\, \|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\, \|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\, \|f\|_p \\ = n(\alpha)\, \|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\, \|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\, \|f\|_p\, \|F\psi\|_p \\ \leqslant n(\alpha)\, \|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\, \|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\, \|f\|_p\, d_3\, \|\psi\|_{p'}^{p'-1}, \end{gathered}$$

откуда $\|\psi\|_{p'} \leqslant d_3\, d_4^{-1}\, n(\alpha)\, \|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\, \|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\, \|f\|_p$. Так как $\|f - u^*\|_p = \|v^*\|_p = \|F\psi\|_p \leqslant d_3\, \|\psi\|_{p'}^{p'-1}$, то, используя предыдущую оценку, получаем

$$\|u^* - f\|_p \leqslant d_3 \left[d_3\, d_4^{-1}\, n(\alpha)\, \|a\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\, \|b\|_{2p/[p(1+\alpha)-2]}\, \|f\|_p\right]^{1/(p-1)},$$

что равносильно доказываемой оценке.

3. Приближенное решение уравнений в $L_2(0,\infty)$

Теоремы 1–3 предоставляют условия, при которых существуют и единственны решения рассматриваемых уравнений в комплексных пространствах L_p, однако они не содержат информации о том, как можно найти эти решения. В этой связи представляют интерес следующие теоремы, доказательство которых основано на комбинировании метода монотонных операторов и принципа сжимающих отображений, что возможно лишь при $p = 2$. В этих теоремах предполагается, что нелинейность $F(x,z)$ почти при каждом $x \in [0,\infty)$ и всех $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям:

7) $|F(x,z_1) - F(x,z_2)| \leqslant M \cdot |z_1 - z_2|$;

8) $\mathrm{Re}\{(F(x,z_1) - F(x,z_2)) \cdot \overline{(z_1 - z_2)}\} \geqslant m \cdot |z_1 - z_2|^2$, где $M > 0$ и $m > 0$ ($m \leqslant M$).

Из условия 7) вытекает, что оператор F действует из L_2 в L_2, равномерно непрерывен и ограничен, а из условия 8) следует, что он является сильно монотонным. Более того, при этих условиях [2] существует обратный оператор $F^{-1} : L_2 \to L_2$, причем для любых $u, v \in L_2$ выполняются неравенства:

$$\|F^{-1}u - F^{-1}v\|_2 \leqslant \frac{1}{m}\, \|u - v\|_2, \quad \mathrm{Re}\left(F^{-1}u - F^{-1}v, u - v\right) \geqslant \frac{m}{M^2}\, \|u - v\|_2^2. \tag{15}$$

Из следующих теорем вытекает, что при выполнении условий 7) и 8) каждое из уравнений (11), (12) и (13) имеет в комплексном пространстве L_2 единственное решение и (основной результат) это решение можно найти методом последовательных приближений пикаровского типа.

Теорема 4. *Пусть $a(x), b(x) \in L_{2/\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, а $F(x,z)$ удовлетворяет условиям 7) и 8). Тогда при любом $f(x) \in L_2$ уравнение (11) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2$. Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле:*

$$u_n = u_{n-1} - \mu_1 \left(F u_{n-1} + Q^\alpha u_{n-1} - f\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

причем справедлива оценка погрешности:

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \mu_1\, \frac{\alpha_1^n}{1 - \alpha_1}\, \|F u_0 + Q^\alpha u_0 - f\|_2, \tag{17}$$

где $\mu_1 = m/(M + n(\alpha)\, \|a\|_{2/\alpha} \|b\|_{2/\alpha})^2$, $\alpha_1 = \sqrt{1 - m\,\mu_1} < 1$, $u_0(x) \in L_2$ — произвольная функция.

Теорема 5. *Пусть $a(x), b(x) \in L_{2/\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, а $F(x,z)$ удовлетворяет условиям 7) и 8). Тогда при любом $f(x) \in L_2$ уравнение (12) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2$. Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле:*

$$u_n = F^{-1} v_n, \quad v_n = v_{n-1} - \mu_2\, \left(Q^\alpha v_{n-1} + F^{-1} v_{n-1} - f\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{18}$$

где $\mu_2 = m/[M\,(m^{-1} + n(\alpha)\,\|a\|_{2/\alpha}\|b\|_{2/\alpha})]^2$, F^{-1} *есть оператор обратный к* F. *При этом справедлива оценка погрешности:*

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \frac{\mu_2}{m}\,\frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2}\,\|Q^\alpha v_0 + F^{-1}v_0 - f\|_2, \tag{19}$$

где $\alpha_2 = \sqrt{1 - m\,\mu_2/M^2}$, *а* $v_0(x) \in L_2$ *— произвольная функция.*

Теорема 6. *Пусть* $a(x), b(x) \in L_{2/\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, *а* $F(x,z)$ *удовлетворяет условиям* 7) *и* 8). *Тогда при любом* $f(x) \in L_2$ *уравнение* (13) *имеет единственное решение* $u^*(x) \in L_2$. *Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле:*

$$u_n = u_{n-1} + \mu_2\left(F^{-1}(f - u_{n-1}) - Q^\alpha u_{n-1}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{20}$$

где $\mu_2 = m/[M\,(m^{-1} + n(\alpha)\,\|a\|_{2/\alpha}\|b\|_{2/\alpha})]^2$, F^{-1} *есть оператор обратный к* F. *При этом справедлива оценка погрешности:*

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \mu_2\,\frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2}\,\|F^{-1}(f - u_0) - Q^\alpha u_0\|_2, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

где $\alpha_2 = \sqrt{1 - m\,\mu_2/M^2}$, *а* $u_0(x) \in L_2$ *— произвольная функция.*

Доказательство теорем 4–6 проводится точно так же, как и доказательство соответствующих теорем 9.7–9.9 из [2].

Заключение

Применение метода монотонных (по Браудеру — Минти) операторов позволяет получить глобальные теоремы о существовании, единственности и способах нахождения решений для различных классов нелинейных интегральных уравнений без ограничений на абсолютную величину параметров (см., например, [8–10]) и область существования решений. Поскольку, согласно леммам 1 и 2, оператор типа потенциала Q^α, подобно сингулярным интегральным операторам [4, 5], [8–10], обладает свойством $\mathrm{Re}\langle Q^\alpha u, u\rangle = 0$, то утверждения, например, теорем 1–3 о существовании и единственности решения сохраняются, соответственно, для уравнений

$$F(x,u(x)) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{\left[\,\overline{a(x)}\,b(t) - a(t)\,\overline{b(x)}\,\right]u(t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\,dt = f(x),$$

$$u(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{\left[\,\overline{a(x)}b(t) - a(t)\overline{b(x)}\,\right]F(t,u(t))\,dt}{|x-t|^{1-\alpha}} = f(x),$$

$$u(x) + \lambda\cdot F\left(x, \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{\left[\,\overline{a(x)}b(t) - a(t)\overline{b(x)}\,\right]u(t)\,dt}{|x-t|^{1-\alpha}}\right) = f(x)$$

при любом (не обязательно «малом») $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Полученные в данной работе результаты могут послужить основой для исследования подобных уравнений в случае, когда параметр λ может принимать комплексные значения.

Литература

1. *Мороз В. Б.* Уравнения Гаммерштейна с ядрами типа потенциала Рисса // Тр. междунар. конф. «Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление».—Беларусь: Минск, 1996.—С. 249–254.
2. *Асхабов С. Н.* Нелинейные уравнения типа свертки.—М.: Физматлит, 2009.—304 с.
3. *Tracy C. A., Widom H.* Fredgolm determinantes, differential equations and matrix models // Communications in Math. Physics.—1994.—Vol. 163, № 2.—P. 33–72.
4. *Askhabov S. N.* Singular integral equations with monotone nonlinearity in complex Lebesgue spaces // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen.—1992.—Vol. 11, № 1.—P. 77–84.
5. *Askhabov S. N.* Nonlinear singular integral equations in Lebesgue spaces // J. Math. Sci.—2011.—Vol. 173, № 2.—P. 155–171.
6. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.—М.: Мир, 1978.—336 с.
7. *Дубинский Ю. А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Современные проблемы математики.—М., 1976.—Т. 9.—С. 5–130.—(Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР).
8. *Асхабов С. Н.* Применение метода монотонных операторов к некоторым нелинейным уравнениям типа свертки и сингулярным интегральным уравнениям // Изв. высших учебных заведений. Математика.—1981.—№ 9.—С. 64–66.
9. *Асхабов С. Н., Мухтаров Х. Ш.* Оценки решений некоторых нелинейных уравнений типа свертки и сингулярных интегральных уравнений // Докл. АН СССР.—1986.—Т. 288, № 2.—С. 275–278.
10. *Асхабов С. Н., Мухтаров Х. Ш.* Об одном классе нелинейных интегральных уравнений типа свертки // Диф. уравнения.—1987.—Т. 23, № 3.—С. 512–514.

Статья поступила 28 декабря 2012 г.

Асхабов Султан Нажмудинович
Чеченский государственный университет,
декан факультета математики и компьютерных технологий
РОССИЯ, 364037, Грозный, ул. Киевская, 33
E-mail: `askhabov@yandex.ru`

NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS WITH POTENTIAL TYPE KERNELS ON A SEMIAXIS

Askhabov S. N.

In complex Lebesgue spaces, by method of monotone operators, theorems on existence, uniqueness and methods of finding solutions are proved for some classes of nonlinear integral equations with potential type kernels. Some estimations for the norms of solution and the rate of convergence of the Picard type successive approximations are obtained.

Key words: nonlinear integral equations, potential type operators, method of monotone operators.