Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 1, С. 23–29

УДК **511**

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ СПРАВЕДЛИВОСТИ ГИПОТЕЗЫ РИМАНА О НУЛЯХ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ

Ю. Ф. Коробейник

Дорогому Анатолию Георгиевичу
в знак искреннего уважения и приязни,
по случаю его шестидесятилетия

Выводится один критерий справедливости известной гипотезы Римана о нулях дзета-функции в критической полосе и обсуждаются перспективы его применения.

Ключевые слова: дзета-функция, гипотеза Римана, критическая полоса.

1. Как известно (см., например, [1, гл. II, п. 12, с. 40], дзета-функция Римана не имеет нулей на прямых $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Re} z = 1$ и допускает представление

$$\zeta(z) = \frac{e^{bz}}{z(z-1)\Gamma(z/2)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{z/z_k} = \frac{e^{bz}\Pi_0(z)}{z(z-1)\Gamma(z/2)}, \tag{1}$$

в котором $b = \ln 2\pi - 1 - \gamma/2$, постоянная γ, называемая константой Эйлера или Эйлера — Маскерони, равная приблизительно 0,5772 и, наконец, z_k — нули $\zeta(z)$, лежащие в вертикальной полосе $D := \{z = \sigma + i\lambda : 0 < \sigma < 1,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Среди чисел z_k могут встречаться и равные, так что функция $\zeta(z)$, возможно, имеет в D кратные нули.

Представим функцию $\Pi_0(z)$ в виде произведения двух сомножителей $\Pi_0(z) = \Pi_1(z) \cdot \Pi_2(z)$; в первый из этих двух сомножителей входят все множители $\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)e^{z/z_k}$, отвечающие тем нулям z_k кратности $n_k \geqslant 1$, которые лежат на «срединной» прямой $\operatorname{Re} z = 1/2$, а во второй — такие же множители, соответствующие всем остальным нулям $\zeta(z)$ из D (с учетом их кратностей).

При этом

$$\Pi_1(z) = \prod_{k \in \Phi_1} \left[1 + \frac{z(z-1)}{(1/4 + \lambda_k^2)}\right]^{n_k} e^{a_1 z},$$

где

$$\Phi_1 := \bigl\{k \geqslant 1 : z_k = 1/2 + i\lambda_k,\ 0 < \lambda_k < +\infty\bigr\}, \quad a_1 := \sum_{k \in \Phi_1} \frac{n_k}{(1/4 + \lambda_k^2)}.$$

Так как

$$(\forall\, \delta > 0) \quad \sum_{k \in \Phi_1} \frac{n_k}{(\lambda_k)^{1+\delta}} < +\infty,$$

то $\Pi_1(z) = \Psi_1(z)e^{a_1 z}$, причем $\Psi_1(z) \in A(\mathbb{C})$ и $\Psi_1(z) = \Psi_1(1-z)$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Заметим, что Харди еще в 1914 г. показал, что множество Φ_1 бесконечно (но счетно!). Однако, этот результат Харди в данной работе не используется.

Аналогично

$$\Pi_2(z) = \prod_{l\in\Phi_2}\left[\left(1-\frac{z}{\rho_l+i\tau_l}\right)\left(1-\frac{z}{\rho_l-i\tau_l}\right)\left(1-\frac{z}{1-\rho_l-i\tau_l}\right)\left(1-\frac{z}{1-\rho_l+i\tau_l}\right)\right]^{n_l}\cdot e^{a_2 z},$$

где

$$\Phi_2 := \left\{l \geqslant 1 :\, z_l = \rho_l + i\tau_l,\ 0<\rho_l<1/2,\ 0<\tau_l<+\infty\right\},$$

$$a_2 := 2\sum_{l\in\Phi_2} n_l\left[\frac{\rho_l}{\rho_l^2+\tau_l^2}+\frac{1-\rho_l}{(1-\rho_l)^2+\tau_l^2}\right] = 2\sum_{l\in\Phi_2} u_l.$$

При этом каждое слагаемое

$$u_l = \frac{\rho_l}{\rho_l^2+\tau_l^2}+\frac{1-\rho_l}{(1-\rho_l)^2+\tau_l^2}$$

положительно, и потому $a_2 = 0$ тогда и только тогда, когда множество Φ_2 пусто, т. е. когда $\Pi_2(z) \equiv 1$.

Таким образом, дзета-функцию всегда можно представить в таком виде:

$$\zeta(z) = \frac{e^{hz}J(z)}{z(z-1)\Gamma(z/2)},$$

где $J(z) = \Pi_1(z)\cdot\Pi_2(z)$, $J(z) \in A(\mathbb{C})$, $J(z) = J(1-z)$ $(\forall\, z\in\mathbb{C})$, $h = b + a_1 + a_2$.

Из сказанного следует, что гипотеза Римана справедлива в том и только том случае, когда $\Pi_2(z) \equiv 1$, т. е. когда $a_2 = 0$. Далее, так как дзета-функция удовлетворяет функциональному уравнению Римана:

$$(\forall\, z\in\mathbb{C})\ \zeta(z) = a(z)\cdot\zeta(1-z),$$

то (при всех z из $\mathbb{C}$)

$$a(z) = \frac{\zeta(z)}{\zeta(1-z)} = \frac{e^{h(2z-1)}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma(z/2)},$$

откуда

$$e^{h(2z-1)} = \frac{a(z)\cdot\Gamma(z/2)}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)} = \frac{(2\pi)^z\pi^{-1}\sin\frac{\pi z}{2}\Gamma(1-z)\Gamma(z/2)}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)} = \frac{(2\pi)^z\Gamma(1-z)}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\Gamma(1-z/2)}.$$

По формуле удвоения Лежандра — Гаусса (см., например, [2, с. 21])

$$\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\Gamma(1-z/2) = \sqrt{\pi}\cdot 2^z\Gamma(1-z),$$

и, следовательно,

$$(\forall\, z\in\mathbb{C})\quad e^{h(2z-1)} = (\pi)^{z-1/2}.$$

Отсюда $h = \frac{1}{2}\ln\pi$. Но тогда

$$a_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = -b + \frac{1}{2}\ln\pi,$$

и справедлива

Теорема 1. *Гипотеза Римана верна тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k\in\Phi_1}\frac{n_k}{1/4+\lambda_k^2}=1+\frac{\gamma}{2}-\ln 2-\frac{1}{2}\ln\pi. \tag{2}$$

Замечание. Теорема 1 (по-видимому, уже раннее известная) следует и из несколько более общего результата, полученного примерно тем же методом в [3]. Разумеется, эту теорему нельзя считать эффективным критерием, но ее смысл заключается в том, что для проверки справедливости гипотезы Римана достаточно знать лишь величину $\sum_{k\in\Phi_1}\frac{n_k}{1/4+\lambda_k^2}$, определяемую значениями только тех корней $\zeta(z)$ (с учетом их кратностей), которые расположены на «срединной» прямой $\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}$.[1] $\triangleright$

2. Пусть $\eta\in(0,1/2)$, $P\in(0,+\infty)$ и $D_{\eta,P}$ — прямоугольник: $1/2-\eta<\operatorname{Re} z<1/2+\eta$, $-P<\operatorname{Im} z<+P$.

Выберем две последовательности положительных чисел $(\eta_k)_{k=1}^{\infty}$ и $(P_k)_{k=1}^{\infty}$ такие, что $0\downarrow\eta_l<1/2$; $0<P_l\uparrow+\infty$, и предположим, что все нули $\zeta(z)$ из $\overline{D_{\eta_l,P_l}}$ принадлежат отрезку $[1/2-iP_l,1/2+iP_l]$, если $l\geqslant 1$. По теореме 1 гипотеза Римана справедлива в том и только том случае, когда

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_{\eta_l,P_l}}\frac{\zeta'(z)\,dz}{\zeta(z)z(1-z)}=\left(1+\frac{\gamma}{2}-\ln 2-\frac{1}{2}\ln\pi\right). \tag{3}$$

Вычисление интеграла в левой части (3) сталкивается с определенными трудностями, обусловленными необходимостью знания значений функции $\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}$ на границе прямоугольников D_{η_l,P_l}. Эти трудности можно обойти, например, с помощью целой функции $\zeta_1(z):=(1-2^{1-z})\zeta(z)$, которая представляется в виде ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^z}$, сходящегося в полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$. При этом, если

$$(\forall\, n\geqslant 1)\quad v_n(z):=\frac{1}{(2n-1)^z}-\frac{1}{(2n)^z}$$

и $z=\sigma+i\lambda$ и $0<\sigma<1$, $\lambda\in\mathbb{R}$, то

$$|v_n(z)|\leqslant\frac{A}{n^{\sigma+1}}\quad(\forall\, n\geqslant 1).$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(z)$, представляющий $\zeta_1(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$, сходится абсолютно в любой замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z\geqslant\delta>0$. Кроме того,

$$(\forall\, l\geqslant 1)\quad\int\limits_{\partial D_{\eta_l,P_l}}\frac{\zeta_1'(z)\,dz}{\zeta_1(z)z(1-z)}=\int\limits_{\partial D_{\eta_l,P_l}}\frac{b'(z)\,dz}{b(z)z(1-z)}+\int\limits_{\partial D_{\eta_l,P_l}}\frac{\zeta'(z)\,dz}{\zeta(z)z(1-z)},$$

где $b(z):=1-2^{1-z}$. Так как первый интеграл в правой части последнего равенства равен нулю по интегральной теореме Коши, то гипотеза Римана верна тогда и только тогда, когда

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_{\eta_l,P_l}}\frac{\zeta_1'(z)\,dz}{\zeta_1(z)z(1-z)}=\left(1+\frac{\gamma}{2}-\ln 2-\frac{1}{2}\ln\pi\right). \tag{4}$$

[1] Пользуясь случаем, отметим одну затрудняющую чтение описку в [3]. Именно, множитель π в левой части равенства, стоящего на четвертой снизу строке страницы 63 в [3], следует опустить, так как в предыдущих этому равенству выкладках он сократился.

Вычисление интегралов в левой части (4) при нынешнем уровне развития вычислительной техники не представляет непреодолимых трудностей, и, таким образом, проверка справедливости соотношения (4) может дать ответ на вопрос о верности гипотезы Римана. Однако, при этом, конечно, надо иметь ввиду, что константы γ, $\ln 2$, $\ln\pi$ в правой части (4) также, как и интегралы в левой части, могут быть вычислены лишь приблизительно (хотя и с как угодно высокой степенью точности). Поэтому скорее всего соотношение (4) можно будет эффективно использовать в случае, когда предел слева в (4) (легко заметить, что он всегда существует и равен $\sum_{k\in\Phi_1}\frac{n_k}{1/4+\lambda_k^2}$) отличен от числа $1+1/2\cdot\gamma-\ln 2-1/2\ln\pi$, стоящего в правой части (4).

Тогда равенство (4) будет невозможно, и гипотеза Римана будет неверна.

3. Пусть $\eta\in(0,1/2)$, $T\in[1,+\infty)$ и $D_{\eta,T}$ — прямоугольник

$$D_{\eta,T}:=\bigl\{z=\sigma+i\lambda:\ 1/2-\eta<\sigma<1/2+\eta,\ -T<\lambda<+T\bigr\}.$$

Допустим, что граница $\partial D_{\eta,T}$ этого прямоугольника, состоящая из четырех прямоугольных участков, не содержит нулей $\zeta(z)$. Тогда по теореме о вычетах

$$J_{\eta,T}:=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_{\eta,T}}\frac{\zeta'(z)\,dz}{\zeta(z)z(1-z)}=\sum_{k=1}^{N_1(T)}\frac{n_k}{1/4+\lambda_k^2}+2\sum_{l=1}^{N_2(T,\eta)}\frac{m_l[\rho_l(1-\rho_l)+\mu_l^2]}{[\rho_l^2+\mu_l^2][(1-\rho_l)^2+\mu_l^2]},\qquad(5)$$

где n_k ($\forall\,k\geqslant 1$) — кратность любого из двух корней $1/2\pm i\lambda_k$, принадлежащих интервалу $(1/2-iT,1/2+iT)$ «срединной» прямой, а m_l, $l\geqslant 1$, — кратность любого из четырех нулей $\zeta(z)$ вида $\rho_l\pm i\mu_l$, $1-\rho_l\pm\mu_l i$, $\rho_l\in(0,1/2)$, $\rho_l\neq 1/2$ и $\mu_l\in(0,T)$; каждая такая четверка при $l\leqslant N_2(T,\eta)$ лежит внутри $D_{\eta,T}$, и все эти четыре корня имеют одну и ту же кратность m_l. Зафиксируем какое-либо $\eta_0\in(0,1/2)$ и положим

$$S_1(T):=\sum_{k=1}^{N_1(T)}\frac{n_k}{1/4+\lambda_k^2};$$

$$S_2^{\eta_0}(T):=2\sum_{l=1}^{N_2(T,\eta_0)}\frac{m_l[\rho_l(1-\rho_l)+\mu_l^2]}{[\rho_l^2+\mu_l^2][(1-\rho_l)^2+\mu_l^2]}.$$

Тогда

$$J_{\eta_0,T}=S_1(T)+S_2^{\eta_o}(T);$$

при этом обе функции справа не убывают по T, и существуют пределы

$$\beta_1:=\lim_{T\to+\infty}S_1(T),\quad \beta_2(\eta_0):=\lim_{T\to+\infty}S_2^{\eta_0}(T).$$

Следовательно, если $\beta(\eta_0):=\lim\limits_{T\to\infty}J_{\eta_0,T}$, то этот предел существует, причем

$$\beta(\eta_0)=\beta_1+\beta_2(\eta_0),$$

и все эти функции не возрастают по η_0, когда $\eta_0\downarrow 0$. Очевидно, что $\beta(\eta_0)>\beta$, тогда и только тогда, когда $\beta_2(\eta_0)>0$, т. е. тогда и только тогда, когда в D_{η_0,T_0} (и в любом $D_{\eta_0,T}$ при $T>T_0$) найдется «неправильный» (т. е. не лежащий на «срединной» прямой) нетривиальный корень $\zeta(z)$. Допустим теперь, что гипотеза Римана верна, но в интервале $(0,1/2)$ найдется хотя бы одно значение η_1 такое, что

$$\beta(\eta_1)>1+\frac{\gamma}{2}-\ln 2-\frac{1}{2}\ln\pi.$$

Тогда $\beta_2(\eta_1) > 0$, и в силу сказанного выше, в каждом прямоугольнике $D_{\eta_1,T}$ при любом достаточно большом T найдутся по крайней мере четыре «неправильных» корня $\zeta(z)$, что противоречит сделанному раннее допущению о справедливости гипотезы Римана. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Если хотя бы при одном η_0 из $(0, 1/2)$ имеет место неравенство*

$$\beta(\eta_0) > 1 + \frac{\gamma}{2} - \ln 2 - \frac{1}{2}\ln\pi,$$

то гипотеза Римана неверна.

Следствие. *Если гипотеза Римана справедлива, то*

$$(\forall\,\eta \in (0, 1/2)) \quad \beta(\eta) \leqslant 1 + \frac{\gamma}{2} - \ln 2 - \frac{1}{2}\ln\pi.$$

4. Теорему 1 можно переформулировать несколько иным образом. С этой целью, зафиксировав номер $l \geqslant 1$ и число $T_l > 1$, выберем число η_l из $(0, 1/2)$ настолько малым, чтобы все нули $\zeta(z)$, принадлежащие замкнутому прямоугольнику, ограниченному контуром $A_l B_l C_l D_l A_l$, где

$$A_l := 1/2 - \eta_l - iT_l, \quad B_l := 1/2 + \eta_l - iT_l, \quad C_l := 1/2 + \eta_l + iT_l, \quad D_l := 1/2 - \eta_l + iT_l,$$

лежали бы на интервале $(1/2 - iT_l, 1/2 + iT)$ «срединной» прямой. Положим еще

$$F_l := 3/2 + \eta_l - iT_l, \quad E_l := 3/2 + \eta_l + iT_l, \quad H_l := 3/2 + \eta_l + T_l, \quad O := 1/2,$$

и обозначим символом Γ_l замкнутый многоугольный контур с вершинами в точках D_l, B_l, F_l, H_l, E_l. Будем считать, что

$$\zeta(z) \neq 0 \quad (\forall\, z \in \Gamma_l,\ \forall\, l \geqslant 1).$$

По интегральной теореме Коши

$$\sum_{k=1}^{6} J_{k,l} = \sum_{m=1}^{N_1(T)} \frac{n_m}{1/4 + \lambda_m^2} + \sum_{s=1}^{N_2(T_l,\eta_l)} m_s \left[\frac{1}{\rho_s + i\mu_s} + \frac{1}{\rho_s - i\mu_s}\right],$$

где $1/2 \pm i\lambda_k$, $0 < \lambda_k < T_l$, — нули $\zeta(z)$ кратности n_k из интервала $(1/2 - iT_l, 1/2 + iT_l)$; $\rho_s \pm i\mu_s$ — гипотетические комплексные корни $\zeta(z)$ кратности m_s, которые (в случае, если они вообще существуют) лежат в области Q, симметричной относительно вещественной оси и ограниченной контуром $C_l B_l F_l H_l E_l C_l$. При этом

$$(\forall\, s,\ 1 \leqslant s \leqslant N_2(T_l, \eta_l)) \quad u_s := m_s \left[\frac{1}{\rho_s + i\mu_s} + \frac{1}{\rho_s - i\mu_s}\right] = \frac{2\rho_s m_s}{\rho_s^2 + \mu_s^2} > 0.$$

Наконец, при

$$\Phi(z) := \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z) z(1-z)},$$

$$J_{1,l} := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{D_l O} \frac{a'(z)\,dz}{a(z) z(1-z)}, \quad J_{2,l} := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{B_l F_l} \Phi(z)\,dz,$$

$$J_{3,l} := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{F_l H_l} \Phi(z)\,dz, \quad J_{4,l} := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{H_l E_l} \Phi(z)\,dz,$$

$$J_{5,l} := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{E_l C_l} \Phi(z)\,dz, \quad J_{6,l} := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_l D_l} \Phi(z)\,dz.$$

Займемся теперь интегралами $J_{k,l}$, где $2 \leqslant k \leqslant 6$. Имеем для любого $z \in [F_l H_l]$

$$|z(1-z)| > \frac{T_l^2}{2}, \qquad \left|\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right| \leqslant M < +\infty,$$

откуда

$$|J_{3,l}| \leqslant \frac{2M}{T_l^2}\cdot T_l\sqrt{2} < \frac{4M}{T_l}.$$

Такая же оценка получается для $|J_{4,l}|$, и из нее следует, что

$$\lim_{l\to+\infty} J_{3,l} = \lim_{l\to+\infty} J_{4,l} = 0.$$

Переходя к другим интегралам $J_{k,l}$ заметим, что

$$J_{2,l} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{3/2+\eta_l}^{1/2+\eta_l} \frac{\zeta'(x-iT_l)\,dx}{\zeta(x-iT_l)(x-iT_l)(1-x+iT_l)};$$

$$J_{5,l} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{3/2+\eta_l}^{1/2+\eta_l} \frac{\zeta'(x+iT_l)\,dx}{\zeta(x+iT_l)(x+iT_l)(1-x+iT_l)}.$$

Отсюда

$$J_{2,l} + J_{5,l} = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\int\limits_{3/2+\eta_l}^{1/2+\eta_l} \frac{\zeta'(x+iT_l)\,dx}{\zeta(x+iT_l)(x+iT_l)(1-x-iT_l)}.$$

Но

$$\int\limits_{3/2+\eta_l}^{1/2+\eta_l} \frac{\zeta'(x+iT_l)\,dx}{\zeta(x+iT_l)(x+iT_l)(1-x-iT_l)}$$

$$= \frac{\ln\zeta(x+iT_l)}{(x+iT_l)(1-x-iT_l)}\Bigg|_{3/2+\eta_l}^{1/2+\eta_l} + \int\limits_{3/2+\eta}^{1/2+\eta_l} \frac{(1-2iT_l-2x)\ln\zeta(x+iT_l)\,dx}{(x+iT_l)^2(1-x-iT_l)^2}.$$

Здесь $\ln\zeta(x+iT_l) = \ln|\zeta(x+iT_l)| + i\arg\zeta(x+iT_l)$, где $|\zeta(x+iT_l)| \leqslant d\cdot T_l$, а функция $|\arg\zeta(x+iT_l)|$ оценивается сверху по лемме из п. 4 главы IX книги [1] (см. [1, с. 210–211]). В итоге получаем, что $\lim\limits_{l\to+\infty} J_{2,l} = \lim\limits_{l\to+\infty} J_{5,l} = 0$. Аналогично показывается, что $\lim\limits_{l\to+\infty} J_{6,l} = 0$. Таким образом, для любого $l \geqslant 1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1/2-\eta_l+iT_l}^{1/2} \frac{a'(z)\,dz}{a(z)z(1-z)} + o_l(1) = \sum_{k=1}^{N_1(T_l)} \frac{n_k}{1/4+\lambda_k^2} + 2\sum_{s=1}^{N_2(T_l,\eta_l)} \frac{\rho_s\cdot m_s}{\rho_s^2+\mu_s^2}, \tag{6}$$

где $\lim_{l\to+\infty} o_l(1) = 0$, а последовательности целых чисел $(N_1(T_l))_{l=1}^{\infty}$ и $N_2(T_l,\eta_l))_{l=1}^{\infty}$ не убывают с ростом l (и потому стремятся к (конечным или бесконечным) пределам). Переходя к пределу при $l\to\infty$ в (6), получим

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1/2}^{1/2+i\infty}\frac{a'(z)\,dz}{a(z)z(1-z)} = \sum_{k=1}^{N_1(\infty)}\frac{n_k}{1/4+\lambda_k^2} + 2\sum_{s=1}^{N_2(\infty,0)}\frac{\rho_s\cdot m_s}{\rho_s^2+\mu_s^2}. \tag{7}$$

При этом в (7) $1\leqslant N_1(\infty), N_2(\infty,0)\leqslant+\infty$. Учитывая, что для любого $s\geqslant 1$, $\rho_s>0$, из (7) находим:

Теорема 3. *Гипотеза Римана верна тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=1}^{N_1(\infty)}\frac{n_k}{1/4+\lambda_k^2} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1/2}^{1/2+i\infty}\frac{a'(z)\,dz}{a(z)z(1-z)}.$$

Учитывая еще теорему 2, получаем

Следствие. *Если гипотеза Римана о нулях дзета-функции справедлива, то*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1/2}^{1/2+i\infty}\frac{a'(z)\,dz}{a(z)z(1-z)} = \ln 2+\frac{1}{2}\ln\pi-\frac{\gamma}{2}-1. \tag{8}$$

Вопрос об обращении этого следствия, т. е. вопрос о достаточности равенства (8) для справедливости гипотезы Римана, остается открытым.

Литература

1. *Титчмарш Е. К.* Теория дзета функции Римана.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953.—407 с.
2. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Ч. II. Трансцендентные функции.—М.: ГИФМЛ, 1963.—515 с.
3. *Коробейник Ю. Ф.* О дзета-подобных функциях и вещественном следе корней дзета-функции Римана // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, вып. 4.—С. 63–66.

Статья поступила 30 октября 2012 г.

Коробейник Юрий Федорович
Южный федеральный университет,
профессор каф. математического анализа
РОССИЯ, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
главный научный сотрудник отдела математического анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: kor@math.rsu.ru

SOME REMARKS ON THE RIEMANN CONJECTURE ABOUT THE ZEROS OF THE ZETA-FUNCTION

Korobeinik Yu. F.

A criterion of validity of the celebrated Riemann conjecture on the zeros of the ζ-function in the strip $0<\operatorname{Re} z<1$ is derived and some aspects of application of this criterion are discussed.

Key words: zeta-function, Riemann conjecture, critical strip.