Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 1, С. 65–70

УДК **516.642.7**

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ[1]

Ш. С. Хубежты, А. О. Цуцаев

Посвящается А. Г. Кусраеву в связи с его шестидесятилетием

Исследуется вопрос о возможности построения приближенных схем повышенной точности для численного решения интегральных уравнений теории рассеяния. С применением нулей присоединенной функции Лежандра второго рода достигается указанная точность.

Ключевые слова: сингулярный интеграл, нуклон-нуклонное рассеяние, вычислительная схема, оценка погрешности.

1. Постановка задачи

На сегодня имеется достаточное количество работ [1–3] по численному решению известной задачи рассеяния [4, 5] современной физики, приводящей к уравнению с фиксированной особенностью

$$T(x,x_0)+\lambda\int\limits_0^\infty \frac{K(x,y)\,T(y,x_0)}{y^2-x_0^2}\,dy = K(x,x_0), \quad 0\leqslant x<\infty,\ 0<x_0<\infty, \tag{1.1}$$

где сингулярный интеграл рассматривается в смысле главного значения Коши. Это уравнение описывает задачу рассеяния в квантовой теории поля и называется уравнением Липпмана — Швингера [4]. Пусть $K(x,y)$ — заданная функция, определяемая потенциалом взаимодействия частиц. Через решения $T(x,x_0)$ известным образом определяется искомая фаза нуклон-нуклонного рассеяния.

Ее вычисляют по формуле

$$\Theta_0 = -\arctan\frac{T(x_0,x_0)}{x_0}. \tag{1.2}$$

В частности, определенный интерес представляет случай, когда в (1.1)

$$K(x,y)=\ln\frac{(x+y)^2+\eta^2}{(x-y)^2+\eta^2},$$

$\lambda=\frac{\pi}{2}$ и $\eta=0.7$. Этот случай соответствует однопионно-обменному потенциалу Юкавы [4].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 11-01-00419-а.

Благодаря вполне определенному практическому значению таких уравнений, вопрос о построении и обосновании эффективных по точности вычислительных схем для численного решения представляет значительный интерес. Тем не менее, решение этого вопроса затрудняется, главным образом, из-за ряда характерных структурных свойств ядер (потенциалов) $K(x,y)$, используемых в уравнениях вида (1.1). К таким можно отнести и сравнительно простые на первый взгляд потенциалы с выражениями (1.3) (потенциал Юкавы), а так же потенциал Рида [4, 5], так как они имеют очень слабые дифференциальные свойства (очевидно, что при $x = y \to \infty$, $K(x,y) \to \infty$).

Первые шаги относительно численного решения уравнения (1.1) были сделаны в 1970 г. М. И. Хартелем и Ф. Табакиным, которые для получения заданной точности брали больше 24 узлов. Но на практике такое количество узлов не удовлетворяло физиков-атомщиков из-за того, что при исследовании ядерных реакторов количество узлов в аппроксимации интеграла (1.1) — это количество дорогостоящих испытаний.

Далее были попытки улучшения точности численного решения уравнения (1.1) и в [3] найден новый подход построения вычислительных схем с применением нулей присоединенной функции Лежандра второго рода [6]. Но не сделан анализ численных результатов. Ниже мы будем заниматься указанными вопросами.

2. Дискретизации уравнения Липмана — Швингера

В теории квадратурных формул для сингулярных интегралов известен такой факт:

Теорема 1. *Квадратурная формула для сингулярных интегралов имеет наивысшую алгебраическую точность $2n$, если параметр сингулярности x интеграла*

$$S(\varphi, x) \equiv \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{t-x}\, dt \tag{2.1}$$

является корнем присоединенной функции Лежандра второго рода [7], т. е. если x удовлетворяет уравнению

$$Q_n(x) \equiv \int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)}{t-x}\, dt = 0, \tag{2.2}$$

где $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots,$ — ортогональные многочлены Лежандра.

В (1.1) сделаем такую подстановку $y = c(-1 + \frac{1}{\tau^2})$, $x = c(-1 + \frac{1}{t^2})$, где c — пока произвольная постоянная. Тогда (1.1) примет вид

$$T_1(t, x_0) + 2c\lambda \int_{0}^{1} \frac{K_1(t,\tau)T_1(\tau, x_0)}{\left(c\left(-1+\frac{1}{\tau^2}\right)\right)^2 - x_0^2}\frac{d\tau}{\tau^3} = K_1(t, x_0), \tag{2.3}$$

где $T_1(t,x_0) \equiv T\big(c\big(-1+\frac{1}{t^2}\big), x_0\big)$, $K_1(t,\tau) \equiv K\big(c\big(-1+\frac{1}{t^2}\big), c\big(-1+\frac{1}{\tau^2}\big)\big)$.

Используя тождество

$$\int_{0}^{1} f(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(|t|)\, dt,$$

(2.3) можно переписать в виде

$$T_1(t,x_0) + 2c\lambda \int_{-1}^{1} \frac{K_1(t,|\tau|)\, T_1(|\tau|,x_0)}{\left(\left(c\left(-1+\frac{1}{|\tau|^2}\right)\right)^2 - x_0^2\right)|\tau|^3}\, d\tau = K_1(t,x_0). \tag{2.4}$$

В свою очередь (2.4) сводится к уравнению

$$T_1(t,x_0) + \frac{\lambda}{c+x_0} \int_{-1}^{1} \frac{|\tau| K_1(t,|\tau|)\, T_1(|\tau|,x_0)}{\left(|\tau| - \sqrt{\frac{c}{c+x_0}}\right)\left(|\tau| + \sqrt{\frac{c}{c+x_0}}\right)\left(\left(1-\frac{x_0}{c}\right)|\tau|^2 - 1\right)}\, d\tau = K_1(t,x_0). \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) является сингулярным интегральным уравнением с параметром сингулярности $\sqrt{\frac{c}{c+x_0}}$. Теперь указанный параметр можно выбрать как корень присоединенной функции Лежандра второго рода. Обозначим его через t_{k_0}, т. е. $t_{k_0} = \sqrt{\frac{c}{c+x_0}}$ — корень уравнения (2.2). Этого мы добьемся благодаря произвольности c. Очевидно для любого значения параметра $x_0 > 0$ можно выбрать c таким образом, что

$$c = \frac{t_{k_0}^2 x_0}{1 - t_{k_0}^2}. \tag{2.6}$$

Но здесь возникают вопросы:

1) Существуют ли нули функции Лежандра второго рода?

2) Находятся ли они в интервале $(-1,1)$?

3) Не совпадают ли они с узлами квадратурной формулы Гаусса, т. е. не совпадают ли эти нули с корнями многочлена Лежандра.

На эти вопросы существует положительный ответ [6]. А именно, справедлива

Теорема 2. *Функция $Q_n(x) = Q_n(\cos\theta)$ имеет ровно $n+1$ нулей в промежутке $0 < \theta < \pi$ $(-1 < x < 1)$, которые лежат в промежутках $\nu/\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi < \theta < \left(\nu+\frac{1}{2}\right)/\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, $\nu = 0,1,\ldots,n$, или $\cos\frac{2\nu+1}{2n+1}\pi < x_\nu < \cos\frac{2\nu}{2n+1}\pi$, $x_\nu = \cos\Theta_\nu$. Геометрически это означает, что между корнями многочлена Лежандра находится ровно один корень функции Лежандра.*

В [6, с. 163] указано «функция $Q_n(x)$ имеет $n+1$ нулей внутри промежутка $(-1,+1)$, которые перемежаются с нулями x_ν $(\nu = 1,2,\ldots,n)$ многочлена Лежандра $P_n(x)$ и $\operatorname{sign} Q_n(x_\nu) = (-1)^\nu$ $(\nu = 1,2,\ldots,n)$», т. е. они не совпадают.

3. Анализ численных результатов

Возникает еще одна проблема: «Как найти нули присоединенной функции Лежандра второго рода?» Нам удалось решить эту задачу с помощью метода численного решения уравнений с использованием пакета «Maple».

Ниже приводятся многочлены Лежандра и соответствующие функции с положительными корнями для различных значений n.

$n = 4$, $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 15x^2 + 3)$,
$Q_4(x) = 0$, $x_1 = 0.9804291141$, $x_2 = 0.6390033629$;

$n = 6$, $P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$,
$Q_6(x) = 0$, $x_1 = 0.9905839159$, $x_2 = 0.8206431284$,
$x_3 = 0.4633742425$;

$n=8,\quad P_8(x)=\frac{1}{128}(6435x^8-3003x^6+3465x^4-315x^2+35),$
$Q_8(x)=0,\ x_1=0.9944856230,\ x_2=0.8936701684,$
$x_3=0.6725479447,\ x_4=0.3606231752;$
$n=10,\quad P_{10}(x)=\frac{1}{256}(46189x^{10}-109395x^8+45045x^6-15015x^4+3465x^2-63),$
$Q_{10}(x)=0,\ x_1=0.9963836912,\ x_2=0.9298548462,$
$x_3=0.7809572439,\ x_4=0.5626867666,\ x_5=0.2944231929;$
$n=12,\quad P_{12}(x)=\frac{1}{1024}(676039x^{12}-1939938x^{10}+2078505x^8-255255x^6+225225x^4-$
$-18018x^2+231),$
$Q_{12}(x)=0,\ x_1=0.9974473127,\ x_2=0.9503214396;$
$x_3=0.8436611861,\ x_4=0.6840035620;$
$x_5=0.4813703639,\ x_6=0.2484918472;$
$n=14,\quad P_{14}(x)=\frac{1}{2048}(5014575x^{14}-16900975x^{12}+22309287x^{10}-14549535x^8+$
$+484984x^6-765765x^4+45045x^2-429),$
$Q_{14}(x)=0,\ x_1=0.9981024707,\ x_2=0.9629962806,$
$x_3=0.8829932889,\ x_4=0.7617120603,$
$x_5=0.6048161441,\ x_6=0.4196404176,\ x_7=0.2148430646.$

Теперь в уравнении (2.5) заменим интеграл через квадратурную формулу Гаусса, получим следующее дискретное уравнение

$$T_1(t,x_0)+\frac{\lambda}{c+x_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k|t_k|K_1(t,|t_k|)T_1(|t_k|,x_0)}{\big(|t_k|-t_{k_0}\big)\big(|t_k|+t_{k_0}\big)\Big(\Big(1-\frac{x_0}{c}\Big)|t_k|^2-1\Big)}=K_1(t,x_0), \tag{3.1}$$

где t_k — корни многочлена Лежандра, A_k — коэффициенты квадратурной формулы Гаусса [8, с. 158–159], t_{k_0} — корень функции Лежандра, c — постоянная, определенная формулой (2.6). Подставляя $t=t_j$, $j=1,2,\ldots,\frac{n}{2}$, из (3.1) имеем

$$T_1(t_j,x_0)+\frac{2\lambda}{c+x_0}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\frac{A_k|t_k|K_1(t_j,|t_k|)T_1(|t_k|,x_0)}{(|t_k|-t_{k_0})(|t_k|+t_{k_0})\Big(\Big(1-\frac{x_0}{c}\Big)|t_k|^2-1\Big)}=K_1(t_j,x_0) \tag{3.2}$$

$\big(j=1,2,\ldots,\frac{n}{2}\big)$.

Как было отмечено в [3] остаток погрешности в случае потенциала Юкавы имеет оценку $O\big(\frac{\ln n}{n^2}\big)$ $(n\to\infty)$.

$T(x_0,x_0)$ найдется из (3.2) с помощью естественной аппроксимации вида

$$T(x_0,x_0)=K(x_0,x_0)-\frac{2\lambda}{c+x_0}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\frac{A_k|t_k|K_1(t_j,|t_k|)\,T_1(|t_k|,x_0)}{(|t_k|-t_{k_0})(|t_k|+t_{k_0})((1-\frac{x_0}{c})|t_k|^2-1)}. \tag{3.3}$$

Составлена программа на языке Паскаль и для $T(x_0,x_0)$ получены следующие результаты:

1. *Тестовая задача:* $K(x,y)=1$, решением является $T(x_0,x_0)=1$.

Таблица 1. Тестовая задача

n	корни функции Лежандра	$x_0=1$	$x_0=10$	$x_0=100$
4	0,63900	0,96561	0,99656	0,99966
6	0,46337	0,95499	0,99550	0,99955
8	0,36062	0,95048	0,99505	0,99951
10	0,56268	0,98995	0,99899	0,99990
12	0,48137	0,98908	0,99890	0,99989
14	0,41964	0,98850	0,99885	0,99989

2. *Потенциал Юкавы:* $K(x,y) = \ln\frac{(x+y)^2+\eta^2}{(x-y)^2+\eta^2}$, значения $T(x_0, x_0)$ см. в табл. 2.

Таблица 2. Потенциал Юкавы

n	корни функции Лежандра	$x_0 = 1$	$x_0 = 10$	$x_0 = 100$
4	0,63900	2,69402	6,71252	11,31006
6	0,46337	2,21517	6,70655	11,31000
8	0,36062	2,21520	6,70610	11,31000
10	0,56268	2,21586	6,70614	11,31000
12	0,48137	2,21586	6,70607	11,31000
14	0,41964	2,21520	6,70605	11,31000

Численные результаты показывают эффективность изложенного метода. Абсолютная точность тестовой задачи: $\varepsilon = 0{,}001$ при $x_0 = 1$, $\varepsilon = 0{,}0001$ при $x_0 = 10$ и $\varepsilon = 0{,}00001$ при $x_0 = 100$ (табл. 1), т. е. если $x \to \infty$, точность улучшается.

Оценка точности для $T(x_0, x_0)$ и потенциала Юкавы: $\varepsilon = 0{,}001$ при $x_0 = 1$, $\varepsilon = 0{,}0001$ при $x_0 = 10$ и $\varepsilon = 0{,}00001$ при $x_0 = 100$ (табл. 2), т. е. если $x \to \infty$, точность улучшается.

Замечание. Наблюдается закономерность: оптимальное приближение достигается на нулях присоединенной функции Лежандра второго рода близких к центру интервала $(0, 1)$ (см. таблицы 1 и 2).

Литература

1. *Саникидзе Д. Г.* Применение приближенных формул для интегралов с ядром Коши для численного решения задач рассеяния // Тр. XIII междунар. симпозиума (МДОЗМФ–2007).—Харьков–Херсон, 2007.—С. 254–257.
2. *Саникидзе Д. Г., Хубежты Ш. С.* О вычислительной схеме повышенной точности для решения одного класса сингулярных уравнений // Тр. XIV междунар. симпозиума (МДОЗМФ–2009). Ч. 1.—Харьков–Херсон, 2009.—С. 164–167.
3. *Хубежты Ш. С.* Численное решение одной задачи рассеяния с применением нулей Функции Лежандра // Владикавк. мат. журн.—2011.—Т. 13, вып. 1.—С. 71–77.
4. *Тейлор Дж.* Теория рассеяния.—М.: Мир, 1975.—566 с.
5. *Hartel M. I., Tabakin F.* Nuclear saturation and smoothness of nucleon-nucleon potentials // Nuclear Physics. A158.—1970.—P. 1–42.
6. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены.—М.: Физматиз, 1962.—500 с.
7. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.—М.: ТОО «Янус», 1995.—520 с.
8. *Крылов В. И., Шульгин Л. Т.* Справочная книга по численному интегрированию.—М.: Наука, 1966.—370 с.

Статья поступила 31 июля 2012 г.

Хубежты Шалва Соломонович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
вед. науч. сотр. отдела математического моделирования
РОССИЯ, 362040, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

Цуцаев Арсен Олегович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
аспирант отдела мат. моделирования
РОССИЯ, 362040, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `arsenstudio@mail.ru`

ON NUMERICAL SOLUTION OF A SCATTERING PROBLEM. ANALYSIS OF NUMERICAL RESULTS

Khubezhty Sh. S., Tsutsaev A. O.

Numerical results for the Lippmann–Schwinger equation obtained with the application of the associated second kind Legendre function are described and analyzed. The effectiveness of the constructed computational scheme is illustrated.

Key words: singular integral, nucleon-nucleon dispersion, computational scheme, error estimate.