Владикавказский математический журнал
2014, Том 16, Выпуск 2, С. 3–13

УДК **519.633**

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРВОГО РОДА

А. К. Баззаев

В работе рассматриваются локально-одномерные схемы для уравнения диффузии дробного порядка с дробной производной в младших членах с граничными условиями первого рода. С помощью принципа максимума получена априорная оценка для решения разностной задачи в равномерной метрике. Доказаны устойчивость и сходимость построенных локально-одномерных схем.

Ключевые слова: локально-одномерная схема, уравнение диффузии дробного порядка, дробная производная Капуто, граничные условия первого рода, принцип максимума, априорная оценка, устойчивость, сходимость.

1. Введение

Дробные интегро-дифференциальные уравнения находят множество применений во многих областях физики, механики, прикладной математики, математической биологии и т. д. Дробное математическое исчисление является мощным инструментом для получения динамических моделей, в которых интегро-дифференциальные операторы по времени и координатам описывают степенную долгосрочную память и пространственную нелокальность сложных сред и процессов [1, 2].

Дифференциальные уравнения дробного порядка возникают также в задачах классической механики (обратные задачи), гидродинамики (движение тела в вязкой жидкости), теплопроводности (динамика тепловых потоков), диффузии (электрохимический анализ поверхностей электродов), при изучении физических процессов стохастического переноса [3], при использовании концепции фрактала в физике конденсированных сред [4] и т. д. Многие проблемы фильтрации жидкости в сильно пористых (фрактальных) средах приводят также к необходимости изучения краевых задач для уравнений в частных производных дробного порядка [5]. Уравнения в дробных производных описывают эволюцию некоторой физической системы с потерями, причем показатель производной указывает на долю состояний системы, сохраняющихся за все время эволюции. Такие системы могут быть классифицированы как системы с «остаточной» памятью, занимающие промежуточное положение между системами, обладающими полной памятью, с одной стороны, и марковскими системами, с другой [6].

Данная работа посвящена рассмотрению локально-одномерной схемы (ЛОС) для уравнения диффузии дробного порядка с дробной производной в младших членах с граничными условиями первого рода. ЛОС для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями первого и третьего рода исследованы в работах [7] и [8] соответственно. В [9] построены ЛОС для уравнения диффузии дробного порядка с конвективным членом. Для рассмотренных разностных схем в указанных работах получены априорные оценки в равномерной метрике, доказаны их устойчивость и равномерная сходимость.

2. Постановка задачи

В цилиндре $Q_T = G \times [0 < t \leqslant T]$, основанием которого является p-мерный прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \ldots,\ x_p) :\ 0 < x_\beta < \ell_\beta,\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots, p\}$ с границей Γ рассматривается первая начально-краевая задача для уравнения диффузии дробного порядка с дробной производной $\partial^\nu_{0x_\beta} u$ порядка ν $(0 < \nu < 1)$ по пространственной переменной x_β $(\beta = 1, 2, \ldots, p)$ в младших членах:

$$\partial^\alpha_{0t} u = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = \mu(x,t), \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \tag{3}$$

где

$$Lu = \sum_{\beta=1}^{p} L_\beta u, \quad L_\beta u = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(k_\beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) + r_\beta(x,t)\,\partial^\nu_{0x_\beta} u - q_\beta(x,t)\,u,$$

$$0 < c_0 \leqslant k_\beta \leqslant c_1, \quad r_\beta \leqslant 0, \quad |r_\beta| \leqslant c_2, \quad q_\beta \geqslant q^* > 0,$$

$\partial^\alpha_{0t} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{\dot u(x,\eta)}{(t-\eta)^\alpha}\, d\eta$ — дробная производная Капуто по времени порядка α, $0 < \alpha < 1$, $\dot u = \partial u/\partial t$, $\partial^\nu_{0x_\beta} u = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int\limits_0^{x_\beta} \frac{u'(x_1, x_2, \ldots, x_{\beta-1}, \xi, x_{\beta+1}, \ldots, x_p, t)}{(x_\beta - \xi)^\nu}\, d\xi$, $0 < \nu < 1$ — дробная производная Капуто по пространственной переменной x_β, $\beta = 1, 2, \ldots, p$, порядка ν, $0 < \nu < 1$, $u' = \partial u/\partial x$, c_0, c_1, c_2 — положительные постоянные.

Заметим, что $k_\beta(x,t)$, $q_\beta(x,t)$, $f(x,t)$ — заданные функции x и t такие, что

$$k_\beta(x,t) \in C^{3,1}(\overline{Q}_T), \quad q_\beta(x,t), f(x,t) \in C^{2,1}(\overline{Q}_T), \quad \beta = 1, 2, \ldots, p,$$

где $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leqslant t \leqslant T]$, $\overline{G} = G \cup \Gamma$, $C^{m,n}$ — класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными порядка m по x и порядка n по t. Такие несколько завышенные условия гладкости потребуются при построении разностной схемы второго порядка аппроксимации.

2. Локально-одномерная разностная схема

В замкнутой области $\overline{Q}_T$ зададим равномерную сетку. Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_β с шагом $h_\beta = \ell_\beta / N_\beta$, $\beta = 1, 2, \ldots, p$:

$$\overline{\omega}_{h_\beta} = \left\{ x_\beta^{(i_\beta)} = i_\beta h_\beta :\ i_\beta = 0, 1, \ldots, N_\beta,\ \beta = 1, 2, \ldots, p \right\}, \quad \overline{\omega}_h = \prod_{\beta=1}^{p} \overline{\omega}_{h_\beta}.$$

При этом будем обозначать ω_{h_β} — множество всех внутренних узлов сетки $\overline{\omega}_{h_\beta}$.

На отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ также введем равномерную сетку

$$\overline{\omega}'_\tau = \left\{0, t_{j+\beta/p} = (j+\beta/p)\,\tau,\ j = 0, 1, \ldots,\ j_0 - 1;\ \beta = 1, 2, \ldots, p\right\},$$

содержащую наряду с узлами $t_j = j\tau$, так называемые фиктивные узлы $t_{j+\beta/p}$, $\beta = 1, 2, \ldots, p-1$, $\tau = T/j_0$. Будем обозначать ω'_τ — множество узлов сетки $\overline{\omega}'_\tau$, для которых $t > 0$.

Перейдем теперь к построению локально-одномерных схем для уравнения (1). Для этого по аналогии с [10, с. 481] уравнение (1) перепишем в виде

$$\mathscr{P}u = \partial_{0t}^{\alpha} u - Lu - f = 0,$$

или

$$\sum_{\beta=1}^{p} \mathscr{P}_\beta u = 0, \quad \mathscr{P}_\beta u = \frac{1}{p}\partial_{0t}^{\alpha} u - L_\beta u - f_\beta.$$

На каждом полуинтервале $\Delta_\beta = \left(t_{j+(\beta-1)/p},\ t_{j+\beta/p}\right]$, $\beta = 1, 2, \ldots, p$, будем последовательно решать задачи

$$\mathscr{P}_\beta v_{(\beta)} = \frac{1}{p}\,\partial_{0t}^{\alpha} v_{(\beta)} - L_\beta v_{(\beta)} - f_\beta = 0, \quad t \in \Delta_\beta,\ \beta = 1, 2, \ldots, p, \tag{4}$$

$$v_{(\beta)} = \mu(x, t), \quad x \in \Gamma_\beta, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} v_{(1)}(x, 0) = u_0(x), \\ v_{(\beta)}(x, t_{j+(\beta-1)/p}) = v_{(\beta-1)}(x, t_{j+\beta/p}), \quad \beta = 2, 3, \ldots, p, \\ v_{(1)}(x, t_j) = v_{(p)}(x, t_j), \quad j = 1, 2, \ldots, j_0 - 1, \end{gathered} \tag{6}$$

где Γ_β — множество граничных точек по направлению x_β, $f_\beta(x,t)$, $\beta = 1, 2, \ldots, p$ — произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x,t)$, удовлетворяющие условию нормировки

$$\sum_{\beta=1}^{p} f_\beta = f.$$

В [7] найден дискретный аналог дробной производной:

$$\begin{gathered} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^{t_{j+\beta/p}} \frac{\dot{u}(x,\eta)}{(t_{j+\beta/p} - \eta)^\alpha}\, d\eta \\ = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+\beta} \left(t_{j+(\beta-s+1)/p}^{1-\alpha} - t_{j+(\beta-s)/p}^{1-\alpha}\right) u_{\overline{t}}^{s/p} + O(\tau/p), \quad u_{\overline{t}}^{s/p} = \frac{u^{s/p} - u^{(s-1)/p}}{\tau/p}. \end{gathered} \tag{7}$$

Дробную производную порядка ν $(0 < \nu < 1)$ по пространственной переменной аппроксимируем по аналогии с [11]:

$$\begin{gathered} \partial_{0x_\beta}^{\nu} u = \frac{1}{\Gamma(2-\nu)} \sum_{m_\beta=1}^{i_\beta} \left(x_{i_\beta - m_\beta + 1}^{1-\nu} - x_{i_\beta - m_\beta}^{1-\nu}\right) u_{\overline{x}_\beta, m_\beta} + O(h_\beta), \\ u_{\overline{x}_\beta, m_\beta} = \frac{u_{m_\beta} - u_{m_\beta - 1}}{h_\beta}. \end{gathered} \tag{8}$$

Таким образом, аппроксимируя каждое уравнение (4) номера β с помощью (7) и (8) чисто неявной разностной схемой и, присоединяя граничные и начальные условия, получим разностный аналог задачи (1)–(3):

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\beta/p}} y = \Lambda y^{j+\beta/p} + \varphi_{\beta}^{j+\beta/p}, \quad x \in \omega_h, \ \beta = 1, 2, \ldots, p, \tag{9}$$

$$\Lambda y = (a_{\beta} y_{\overline{x}_{\beta}})_{x_{\beta}} + r_{\beta} \frac{1}{\Gamma(2-\nu)} \sum_{m_{\beta}=1}^{i_{\beta}} \left(x^{1-\nu}_{i_{\beta}-m_{\beta}+1} - x^{1-\nu}_{i_{\beta}-m_{\beta}} \right) y_{\overline{x}_{\beta}, m_{\beta}} - d_{\beta} y,$$

$$y^{j+\beta/p}\big|_{\gamma_{h,\beta}} = \mu^{j+\beta/p}, \quad j = 0, 1, \ldots, j_0 - 1, \tag{10}$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \omega_{h_{\beta}}, \tag{11}$$

где коэффициенты a_{β} — сеточные функции, которые выбираются из условий второго порядка аппроксимации на равномерной сетке. Можно использовать, например, следующую аппроксимацию коэффициентов $k_{\beta}(x,t)$:

$$a_{\beta} = k_{\beta}(x_1, \ldots, x_{\beta-1}, x_{\beta} - 0.5h_{\beta}, x_{\beta+1}, \ldots, x_p, \overline{t}), \quad \overline{t} = t_{j+1/2},$$

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\beta/p}} y = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+\beta} \left(t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s+1)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s)/p} \right) y^{s/p}_{\overline{t}}, \quad y^{s/p}_{\overline{t}} = \frac{y^{s/p} - y^{(s-1)/p}}{\tau},$$

$\gamma_{h,\beta}$ — множество граничных по направлению x_{β} узлов, $\beta = 1, 2, \ldots, p$.

3. Погрешность аппроксимации локально-одномерной схемы

Перейдем теперь к изучению погрешности аппроксимации локально-одномерной схемы и убедимся в том, что каждое в отдельности уравнение (9) номера β не аппроксимирует уравнение (1), но сумма погрешностей аппроксимации

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_p$$

стремится к нулю при $\tau \to 0$ и $|h| \to 0$.

Пусть $u = u(x,t)$ — решение задачи (1)–(3), а $y^{j+\beta/p}$, $\beta = 1, 2, \ldots, p$ — решение разностной задачи (9)–(11).

Промежуточные значения $y^{j+\beta/p}$ будем сравнивать с $u^{j+\beta/p} = u(x,\ t_{j+\beta/p})$, полагая $z^{j+\beta/p} = y^{j+\beta/p} - u^{j+\beta/p}$. Подставляя $y^{j+\beta/p} = z^{j+\beta/p} + u^{j+\beta/p}$ в разностное уравнение (9), получим

$$\frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+\beta} \left(t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s+1)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s)/p} \right) z^{s/p}_{\overline{t}} = \Lambda_{\beta} z^{j+\beta/p} + \psi_{\beta}^{j+\beta/p}, \tag{12}$$

где

$$\psi_{\beta}^{j+\beta/p} = \Lambda_{\beta} u^{j+\beta/p} + \varphi_{\beta}^{j+\beta/p} - \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+\beta} \left(t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s+1)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s)/p} \right) u^{s/p}_{\overline{t}}. \tag{13}$$

Обозначив через

$$\overset{\circ}{\psi}_{\beta} = \left(L_{\beta} u + f_{\beta} - \frac{1}{p}\, \partial^{\alpha}_{ot} u \right)^{j+1/2} \tag{14}$$

и заметив, что

$$\sum_{\beta=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_\beta = 0, \quad \text{если} \ \sum_{\beta=1}^{p} f_\beta = f,$$

представим $\psi_\beta = \psi_\beta^{j+\beta/p}$ в виде

$$\psi_\beta = \overset{\circ}{\psi}_\beta + \overset{*}{\psi}_\beta.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\psi_\beta^{j+\beta/p} &= \Lambda_\beta u^{j+\beta/p} + \varphi_\beta^{j+\beta/p} - \Delta^\alpha_{0t_{j+\beta/p}} u + \overset{\circ}{\psi}_\beta - \overset{\circ}{\psi}_\beta \\ &= \left(\Lambda_\beta u^{j+\beta/p} - L_\beta u^{j+1/2}\right) + \left(\varphi_\beta^{j+\beta/p} - f_\beta^{j+1/2}\right) \\ &\quad - \left(\Delta^\alpha_{0t_{j+\beta/p}} u - \frac{1}{p}\left(\partial^\alpha_{ot} u\right)^{1/2}\right) + \overset{\circ}{\psi}_\beta = \overset{*}{\psi}_\beta + \overset{\circ}{\psi}_\beta,\end{aligned}$$

где

$$\overset{*}{\psi}_\beta = \left(\Lambda_\beta u^{j+\beta/p} - L_\beta u^{j+1/2}\right) + \left(\varphi_\beta^{j+\beta/p} - f_\beta^{j+1/2}\right) - \left(\Delta^\alpha_{0t_{j+\beta/p}} u - \frac{1}{p}\left(\partial^\alpha_{ot} u\right)^{j+1/2}\right).$$

Очевидно, что $\overset{*}{\psi}_\beta = O(h_\beta + \tau)$, $\overset{\circ}{\psi}_\beta = O(1)$, т. е. каждая из схем (9)–(11) номера β аппроксимирует в обычном смысле соответствующую задачу (4)–(5).

Таким образом, схема (9)–(11) обладает суммарной аппроксимацией

$$\psi = \sum_{\beta=1}^{p} \psi_\beta = \sum_{\beta=1}^{p} (\overset{\circ}{\psi}_\beta + \overset{*}{\psi}_\beta) = \sum_{\beta=1}^{p} \overset{*}{\psi}_\beta = O\left(|h| + \tau\right), \quad |h| = \max_{1\leqslant\beta\leqslant p} h_\beta.$$

4. Устойчивость локально-одномерной схемы

Для получения априорных оценок будем пользоваться принципом максимума для решения сеточного уравнения общего вида (см. [12, с. 339]):

$$A(P)y(P) = \sum_{Q\in Ш'(P)} B(P,Q)y(Q) + F(P),$$

где P, Q — узлы сетки, $Ш'(P)$ — окрестность узла P, не содержащего самого узла. Коэффициенты $A(P), B(P,Q) > 0$ удовлетворяют условиям

$$A(P) > 0, \quad B(P,Q) > 0, \quad D(P) = A(P) - \sum_{Q\in Ш'(P)} B(P,Q) \geqslant 0. \tag{15}$$

Разностную задачу (9)–(11) перепишем в виде:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+\beta} \left(t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s+1)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s)/p}\right) y_{\bar t}^{s/p} = \left(a_\beta y_{\bar x_\beta}^{j+\beta/p}\right)_{x_\beta} \\ &+ \frac{r_\beta}{\Gamma(2-\nu)} \sum_{m_\beta=1}^{i_\beta} \left(x^{1-\nu}_{i_\beta-m_\beta+1} - x^{1-\nu}_{i_\beta-m_\beta}\right) y^{j+\beta/p}_{\bar x_\beta, m_\beta} - d_\beta y^{j+\beta/p} + \varphi_\beta^{j+\beta/p},\end{aligned} \tag{16}$$

$$y^{j+\beta/p}\big|_{\gamma_{h,\beta}} = \mu^{j+\beta/p}, \quad j = 0, 1, \ldots, j_0 - 1, \tag{17}$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_{h_\beta}. \tag{18}$$

Решение задачи (16)–(18) представим в виде суммы

$$y = \overset{*}{y} + \overset{\circ}{y},$$

где $\overset{*}{y}$ — решение однородных уравнений (16) с неоднородными краевыми условиями (17) и однородными начальными условиями:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+\beta} \left(t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s+1)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s)/p}\right) \overset{*}{y}{}^{s/p}_{\bar t} = \left(a_\beta \overset{*}{y}{}^{j+\beta/p}_{\overline{x}_\beta}\right)_{x_\beta} \\ + r_\beta \frac{1}{\Gamma(2-\nu)} \sum_{m_\beta=1}^{i_\beta} \left(x^{1-\nu}_{i_\beta - m_\beta + 1} - x^{1-\nu}_{i_\beta - m_\beta}\right) \overset{*}{y}{}^{j+\beta/p}_{\overline{x}_\beta, m_\beta} - d_\beta \overset{*}{y}{}^{j+\beta/p},\end{gathered} \tag{19}$$

$$\overset{*}{y}{}^{j+\beta/p}\Big|_{\gamma_{h,\beta}} = \mu^{j+\beta/p}, \quad j = 0, 1, \ldots, j_0 - 1, \tag{20}$$

$$\overset{*}{y}(x, 0) = 0, \tag{21}$$

а $\overset{\circ}{y}$ — решение неоднородных уравнений (16) с однородными краевыми условиями и неоднородными начальными условиями (18):

$$\begin{gathered}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+\beta} \left(t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s+1)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s)/p}\right) \overset{\circ}{y}{}^{s/p}_{\bar t} = \left(a_\beta \overset{\circ}{y}{}^{j+\beta/p}_{\overline{x}_\beta}\right)_{x_\beta} \\ + r_\beta \frac{1}{\Gamma(2-\nu)} \sum_{m_\beta=1}^{i_\beta} \left(x^{1-\nu}_{i_\beta - m_\beta + 1} - x^{1-\nu}_{i_\beta - m_\beta}\right) \overset{\circ}{y}_{\overline{x}_\beta, m_\beta} - d_\beta \overset{\circ}{y}{}^{j+\beta/p} + \varphi_\beta^{j+\beta/p},\end{gathered} \tag{22}$$

$$\overset{\circ}{y}{}^{j+\beta/p}\Big|_{\gamma_{h,\beta}} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, j_0 - 1, \tag{23}$$

$$\overset{\circ}{y}(x, 0) = u_0(x). \tag{24}$$

В [7] доказана

Лемма 1. *Пусть $\ell = pj + \beta - 1 \geqslant 1$. Тогда имеет место неравенство*

$$-t^{1-\alpha}_{j+\beta/p} + 2t^{1-\alpha}_{j+(\beta-1)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(\beta-2)/p} > 0, \quad j = 0, 1, \ldots, j_0 - 1; \ \beta = 2, 3, \ldots, p.$$

Приводя (19)–(21) к каноническому виду и используя лемму 1, получаем, что коэффициенты уравнения (19) и краевые условия (20) удовлетворяют условиям (15) и

$$D(x_\beta, t_{j+\beta/p}) = d_\beta \geqslant q^* > 0, \quad D(0, t_{j+\beta/p}) = 1 > 0, \quad D(\ell_\beta, t_{j+\beta/p}) = 1 > 0.$$

Таким образом, на основании теоремы 3 (см. [12, с. 344–345]) для решения $\overset{*}{y}$ задачи (19)–(21) получаем оценку:

$$\|\overset{*}{y}{}^{j+1}\|_C \leqslant \max_{0 < t' \leqslant j\tau} \left(\|\mu_{-\beta}(x, t')\|_{C_\gamma} + \|\mu_{+\beta}(x, t')\|_{C_\gamma}\right), \tag{25}$$

где
$$\|y\|_C = \max_{x\in\omega_h}|y|, \quad \|y\|_{C_\gamma} = \max_{x\in\gamma_h}|y|.$$

Для оценки функции $\overset{\circ}{y}$ применим оценку на слое (см. [12, с. 346]). Уравнение (22) перепишем в виде

$$\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}(\tau/p)^{1-\alpha}\,\overset{\circ}{y}{}_{\bar t}^{j+\beta/p} = \Lambda_\beta \overset{\circ}{y}{}^{j+\beta/p} + \widetilde{\varphi}_\beta^{j+\beta/p}, \tag{26}$$

где
$$\widetilde{\varphi}_\beta^{j+\beta/p} = \varphi_\beta^{j+\beta/p} - \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta-1}\left(t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s+1)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s)/p}\right)\overset{\circ}{y}{}_{\bar t}^{s/p}.$$

Уравнение (26) приведем к каноническому виду:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha} + \frac{a_{\beta,i_\beta+1}+a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2} - \frac{r_\beta}{\Gamma(2-\nu)}\frac{1}{h_\beta^\nu} + d_\beta\right]\overset{\circ}{y}{}_{i_\beta}^{j+\beta/p}\\
&= \frac{a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta^2}\overset{\circ}{y}{}_{i_\beta+1}^{j+\beta/p} + \left[\frac{a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2} - \frac{r_\beta}{\Gamma(2-\nu)}\left(-x^{1-\nu}_{3_{(\beta)}} + 2x^{1-\nu}_{2_{(\beta)}} - x^{1-\nu}_{1_{(\beta)}}\right)\right]\overset{\circ}{y}{}_{i_\beta-1}^{j+\beta/p}\\
&-\frac{r_\beta}{\Gamma(2-\nu)}\frac{1}{h_\beta}\Bigg[\left(x^{1-\nu}_{i_\beta+1} - x^{1-\nu}_{i_\beta}\right)\overset{\circ}{y}{}_0^{j+\beta/p} + \left(-x^{1-\nu}_{i_\beta+1} + 2x^{1-\nu}_{i_\beta} - x^{1-\nu}_{i_\beta-1}\right)\overset{\circ}{y}{}_1^{j+\beta/p}\\
&\quad + \ldots + \left(-x^{1-\nu}_{4_{(\beta)}} + 2x^{1-\nu}_{3_{(\beta)}} - x^{1-\nu}_{2_{(\beta)}}\right)\overset{\circ}{y}{}_{i_\beta-2}^{j+\beta/p}\Bigg] + \Phi(P_{j+\beta/p}),
\end{aligned}$$

где
$$\Phi(P_{(j+\beta/p)}) = \left[\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha}\left(2-2^{1-\alpha}\right)\right]\overset{\circ}{y}{}_{i_\beta}^{j+(\beta-1)/p} + \overline{\varphi}_\beta^{j+\beta/p},$$

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}_\beta^{j+\beta/p} &= \varphi_\beta^{j+\beta/p} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau}\left(t^{1-\alpha}_{2/p} - t^{1-\alpha}_{1/p}\right)\overset{\circ}{y}{}_{i_\beta}^{j+(\beta-2)/p}\\
&-\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{p_{j+\beta-2}}\left(t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s+1)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s)/p}\right)\left(\overset{\circ}{y}{}_{i_\beta}^{s/p} - \overset{\circ}{y}{}_{i_\beta}^{(s-1)/p}\right).
\end{aligned}$$

Проверим выполнимость условий теоремы 4 ([12, гл. 5, § 2, (25)–(27)]), используя вышеуказанную лемму 1:

$$P_{(\beta)} = P(x, t_{j+\beta/p}),$$

$$A(P_{(\beta)}) = \left[\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha} + \frac{a_{\beta,i_\beta+1}+a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2} - \frac{r_\beta}{\Gamma(2-\nu)}\frac{1}{h_\beta^\nu} + d_\beta\right] > 0,$$

$$B(P_{(\beta)}, Q) = \left\{\frac{a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta^2};\ \left[\frac{a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2} - \frac{r_\beta}{\Gamma(2-\nu)}\left(-x^{1-\nu}_{3_{(\beta)}} + 2x^{1-\nu}_{2_{(\beta)}} - x^{1-\nu}_{1_{(\beta)}}\right)\right];\right.$$

$$\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha}(2-2^{1-\alpha});$$

$$\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\beta/p} - t^{1-\alpha}_{j+(\beta-1)/p}\right); \left(-t^{1-\alpha}_{j+\beta/p} + 2t^{1-\alpha}_{j+(\beta-1)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(\beta-2)/p}\right);\right.$$

$$\left(-t^{1-\alpha}_{j+(\beta-1)/p}+2t^{1-\alpha}_{j+(\beta-2)/p}-t^{1-\alpha}_{j+(\beta-3)/p}\right);\ldots;\;\left(-t^{1-\alpha}_{3/p}+2t^{1-\alpha}_{2/p}-t^{1-\alpha}_{1/p}\right)\Big];$$

$$-\frac{r_\beta}{\Gamma(2-\nu)}\frac{1}{h_\beta}\Big[\left(x^{1-\nu}_{i_\beta+1}-x^{1-\nu}_{i_\beta}\right);\left(-x^{1-\nu}_{i_\beta+1}+2x^{1-\nu}_{i_\beta}-x^{1-\nu}_{i_\beta-1}\right);\ldots;$$

$$\left(-x^{1-\nu}_{4_{(\beta)}}+2x^{1-\nu}_{3_{(\beta)}}-x^{1-\nu}_{2_{(\beta)}}\right)\Big]\Bigg\}>0,$$

$$D^{'}(P_{(\beta)})=A(P_{(\beta)})-\sum_{Q\in Ш'_\beta(P)}B(P_{(\beta)},Q)=\frac{1+p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha d_\beta}{p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}>0,$$

для всех $Q\in Ш''_{\beta-1}$, $Q\in Ш'_\beta$,

$$\sum_{Q\in Ш''_{\beta-1}}B(P_{(\beta)},Q)=\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha}(2-2^{1-\alpha})>0,$$

$$\frac{1}{D'(P_{(\beta)})}\sum_{Q\in Ш''_{\beta-1}}B(P_{(\beta)},Q)=\frac{(2-2^{1-\alpha})}{1+p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}\leqslant\frac{1}{1+p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}\leqslant 1, \tag{27}$$

где

$$Ш'\left(P\left(x,t_{j+\frac{\beta}{p}}\right)\right)=Ш'_\beta+Ш''_{\beta-1},$$

$$Ш'_\beta \text{ — множество узлов } Q=Q(\xi,t_\beta)\in Ш'(P\,(x,t_\beta)),$$

$$Ш''_{\beta-1} \text{ — множество узлов } Q=Q(\xi,t_{\beta-1})\in Ш'(P\,(x,t_{\beta-1})).$$

На основании теоремы 4 (см. [12, гл. 5]) и в силу (27) получаем оценку:

$$\|\overset{\circ}{y}{}^{j+\beta/p}\|_C\leqslant p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha\|\overline{\varphi}{}^{j+\beta/p}_\beta\|_C+\frac{(2-2^{1-\alpha})}{1+p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}\|\overset{\circ}{y}{}^{j+\beta/p}\|_C. \tag{28}$$

Оценим $\|\overline{\varphi}{}^{j+\beta/p}_\beta\|_C$, где

$$\begin{gathered}\overline{\varphi}{}^{j+\beta/p}_\beta=\varphi^{j+\beta/p}_\beta+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau}\left(t^{1-\alpha}_{2/p}-t^{1-\alpha}_{1/p}\right)\overset{\circ}{y}{}^{j+(\beta-2)/p}\\ -\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta-1}\left(t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s+1)/p}-t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s)/p}\right)\overset{\circ}{y}{}^{s/p}_{\overline{t}}=\varphi^{j+\beta/p}_\beta\\ +\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\Bigg[\left(t^{1-\alpha}_{j+\beta/p}-t^{1-\alpha}_{j+(\beta-1)/p}\right)\overset{\circ}{y}{}^{0}+\left(-t^{1-\alpha}_{j+\beta/p}+2t^{1-\alpha}_{j+(\beta-1)/p}-t^{1-\alpha}_{j+(\beta-2)/p}\right)\overset{\circ}{y}{}^{1/p}\\ +\ldots+\left(-t^{1-\alpha}_{3/p}+2t^{1-\alpha}_{2/p}-t^{1-\alpha}_{1/p}\right)\overset{\circ}{y}{}^{j+(\beta-2)/p}\Bigg].\end{gathered} \tag{29}$$

Так как выражения, стоящие в круглых скобках положительны, в силу вышеуказанной леммы из [7], то из (29) получаем оценку

$$\|\overline{\varphi}{}^{j+\beta/p}\|_C\leqslant\|\varphi^{j+\beta/p}_\beta\|_C+\frac{2^{1-\alpha}-1}{p^{1-\alpha}\tau^\alpha\Gamma(2-\alpha)}\max_{0\leqslant s\leqslant\beta-2}\|\overset{\circ}{y}{}^{j+s/p}\|_C. \tag{30}$$

С помощью (30) из (28) находим

$$
\begin{aligned}
\max_{0\leqslant s\leqslant \beta}\|\overset{\circ}{y}{}^{j+s/p}\|_C &\leqslant \frac{2^{1-\alpha}-1}{1+p^{1-\alpha}\tau^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)d_\beta}\max_{0\leqslant s\leqslant \beta-1}\|\overset{\circ}{y}{}^{j+s/p}\|_C \\
&+\frac{p^{1-\alpha}\tau^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)}{1+p^{1-\alpha}\tau^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)+d_\beta}\max_{0\leqslant s\leqslant \beta}\|\varphi_\beta^{j+\beta/p}\|_C \\
&\leqslant \max_{0\leqslant s\leqslant \beta-1}\|\overset{\circ}{y}{}^{j+s/p}\|_C+p^{1-\alpha}\tau^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)\max_{0\leqslant s\leqslant \beta}\|\varphi_\beta^{j+\beta/p}\|_C.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Суммируем (31) сначала по $\beta=1,2,\ldots,p$, а затем по $j'=0,1,\ldots,j$. Тогда получим

$$
\|\overset{\circ}{y}{}^{j+1}\|_C \leqslant \|\overset{\circ}{y}{}^{0}\|_C + p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^{\alpha}\sum_{\beta=1}^{p}\max_{0\leqslant s\leqslant \beta}\|\varphi_\beta^{j'+s/p}\|_C. \tag{32}
$$

Таким образом из оценок (25) и (32) следует окончательная оценка

$$
\begin{aligned}
\|y^{j+1}\|_C &\leqslant \|y^0\|_C+\max_{0<t'\leqslant j\tau}\Big(\|\mu_{-\beta}(x,t')\|_{C_\gamma}+\|\mu_{+\beta}(x,t')\|_{C_\gamma}\Big) \\
&+p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^{\alpha}\sum_{\beta=1}^{p}\max_{0\leqslant s\leqslant \beta}\|\varphi_\beta^{j'+s/p}\|_C.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Итак, справедлива

Теорема 1. *Локально-одномерная схема* (9)–(11) *устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи* (9)–(11) *справедлива оценка* (33).

Замечание 2. Теорема 1 остается справедливой и при $q_\beta(x,t)\geqslant 0$.

5. Равномерная сходимость локально-одномерной схемы

Представим решение задачи для погрешности в виде суммы $z_{(\beta)}=v_{(\beta)}+\eta_{(\beta)}$, $z_{(\beta)}=z^{j+\beta/p}$, где $\eta_{(\beta)}$ определяется условиями

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\Big(t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s+1)/p}-t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s)/p}\Big)\eta_{\bar t}^{s/p}=\overset{\circ}{\psi}_\beta, \\
x\in\omega_h+\gamma_{h,\beta},\quad \beta=1,\ldots,p,\quad \eta(x,0)=0.
\end{gathered}
$$

Также, как и в [7] доказывается, что $\eta_{(\beta)}^{j+\beta/p}=O(\tau^\alpha)$, $\beta=1,2,\ldots,p$, $j=0,1,2,\ldots,j_0-1$.

Функция $v_{(\beta)}$ определяется условиями:

$$
\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\beta/p}}v_{(\beta)}=\Lambda_\beta v_{(\beta)}+\widetilde{\psi}_\beta, \tag{34}
$$

$$
v_{(\beta)}^{j+\beta/p}=-\eta_{(\beta)},\quad x_\beta=0, \tag{35}
$$

$$
v(x,0)=0, \tag{36}
$$

где $\widetilde{\psi}_\beta=\Lambda_\beta\eta_{(\beta)}+\overset{*}{\psi}_\beta$, $\overset{*}{\psi}_\beta=O(h_\beta+\tau)$.

Аналогично [7] доказывается, что $\Lambda_\beta \eta_{(\beta)} = O(\tau^\alpha)$, $\beta = 1, 2, \ldots, p$, если существуют непрерывные в замкнутой области $\overline{Q}_T$ производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_\beta^2 \partial x_\nu^2}, \quad \frac{\partial^{2+\alpha} u}{\partial x_\beta^2 \partial t^\alpha}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_\beta^2}, \quad 1 \leqslant \beta, \nu \leqslant p, \quad \beta \neq \nu.$$

Для оценки решения задачи (34)–(36) воспользуемся теоремой 1. Тогда получим

$$\|v^{j+1}\|_C \leqslant M\biggl(\frac{|h|}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1}\biggr), \quad |h| = \max_{1\leqslant\beta\leqslant p} h_\beta.$$

Отсюда получаем

$$\|z^{j+1}\|_C \leqslant \|v^{j+1}\|_C + \|\eta^{j+1}\|_C \leqslant M\biggl(\frac{|h|}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1}\biggr).$$

Итак, справедлива

Теорема 2. *Пусть задача (1)–(3) имеет единственное непрерывное в $\overline{Q}_T$ решение $u(x,t)$ и существуют непрерывные в $\overline{Q}_T$ производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_\beta^2 \partial x_\nu^2}, \quad \frac{\partial^{2+\alpha} u}{\partial x_\beta^2 \partial t^\alpha}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_\beta^2}, \quad 1 \leqslant \beta, \nu \leqslant p, \quad \beta \neq \nu.$$

Тогда решение разностной задачи (9)–(11) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (1)–(3) со скоростью

$$O\biggl(\frac{|h|}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1}\biggr), \quad |h| = o(\tau^{1-\alpha}), \ \frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1.$$

Литература

1. *Тарасов В. Е.* Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка.—М.–Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2011.—568 с.
2. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии.—М.: Высшая школа.—1995.—301 с.
3. *Чукбар К. В.* Стохастический перенос и дробные производные // ЖЭТФ.—1995.—Т. 108, вып. 5 (11).—С. 1875–1884.
4. Олемский А. Н., Флат А. Я.Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды // Успехи физ. наук.—1993. Т. 163, № 12.—С. 1–50.
5. *Кобелев В. Л., Кобелев Я. Л., Романов Е. П.* Недебаевская релаксация диффузия во фрактальном пространстве // Докл. РАН.—1998.—Т. 361, № 6.—С. 755–758.
6. *Нигматуллин Р. Р.* Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теоретическая и матем. физика.—1992.—Т. 90, № 3.—С. 354–368.
7. *Лафишева М. М., Шхануков-Лафишев М. Х.* Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка // ЖВМ и МФ.—2008.—Т. 48.—№ 10.—С. 1878–1887.
8. *Баззаев А.К., Шхануков М.Х.* Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями III рода // ЖВМ и МФ.—2010.—Т. 50, № 7.—С. 1200–1208.
9. *Баззаев А. К.* Третья краевая задача для обобщенного уравнения параболического типа с дробной производной по времени в многомерной области // Вестн. ВГУ. Сер. Физика. Математика.—2010.—№ 2.—С. 5–14.
10. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. 3-е изд., испр.—М.: Наука, 1989.—616 с.
11. *Таукенова Ф. И., Шхануков-Лафишев М. Х.* Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // ЖВМ и МФ.—2006.—Т. 46, № 10.—С. 1871–1881.
12. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем.—М.: Наука, 1973.—415 с.

Статья поступила 22 октября 2013 г.

Баззаев Александр Казбекович
НОУ ВПО «Владикавказский институт управления»,
старший преподаватель кафедры информационных технологий
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Бородинская, 14
E-mail: `alexander.bazzaev@gmail.com`

LOCALLY ONE DIMENSIONAL SCHEME OF THE DIRICHLET BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION WITH SPACE CAPUTO FRACTIONAL DERIVATIVE

Bazzaev A. K.

Locally one-dimensional difference schemes for the fractional diffusion equation with space Caputo fractional derivative in multidimensional domains are considered. Stability and convergence of locally one-dimensional schemes for this equation are proved.

Key words: Caputo fractional derivative, stability and convergence of difference schemes, slow diffusion equation, locally one-dimensional difference scheme.