Владикавказский математический журнал
2014, Том 16, Выпуск 2, С. 46–48

УДК **517.9**

НЁТЕРОВОСТЬ И ИНДЕКС ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО БИСИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА СО СДВИГОМ

С. В. Ефимов

Изучены условия нётеровости и получены формулы индекса для характеристических бисингулярных операторов с покоординатными и перекрестными сдвигами. Задача сведена к случаю бисингулярных операторов без сдвигов.

Ключевые слова: нётеровость, индекс, бисингулярный оператор, сдвиг.

1. Введение

Пусть Γ_1, Γ_2 — простые замкнутые контуры типа Ляпунова в комплексной плоскости, ориентированные против часовой стрелки, $1 < p < +\infty$. В пространствах $L_p(\Gamma_1)$ и $L_p(\Gamma_2)$ введем оператор сингулярного интегрирования Коши S и проекторы $P_\pm = \frac{1}{2}(I \pm S)$, а в пространстве $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ — проекторы $P_{\pm+} = P_\pm \otimes P_+$, $P_{\pm-} = P_\pm \otimes P_-$. Пусть также $a_{\pm+}$, $a_{\pm-} \in C(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$.

В работах [1, 2] был изучен действующий в $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ характеристический бисингулярный оператор

$$A = a_{++}P_{++} + a_{+-}P_{+-} + a_{-+}P_{-+} + a_{--}P_{--}.$$

Теорема 1 [1, 2]. *Для нётеровости характеристического бисингулярного оператора A необходимо и достаточно, чтобы*

$$a_{xy}(t_1, t_2) \neq 0 \quad (x, y = \pm,\ t_1 \in \Gamma_1,\ t_2 \in \Gamma_2), \tag{1}$$

$$\mathrm{ind}_1 a_{+\pm} = \mathrm{ind}_1 a_{-\pm}, \quad \mathrm{ind}_2 a_{\pm+} = \mathrm{ind}_2 a_{\pm-}. \tag{2}$$

При этом $\mathrm{Ind}A = (\mathrm{ind}_1 a_{++} - \mathrm{ind}_1 a_{--})(\mathrm{ind}_2 a_{++} - \mathrm{ind}_2 a_{--})$.

Одномерным сдвигом назовем всякий диффеоморфизм $\Gamma_i \to \Gamma_j$ $(i, j = 1, 2)$ с гёльдеровской производной. Двумерным сдвигом будем называть всякое отображение α $(\Gamma_1 \times \Gamma_2 \to \Gamma_1 \times \Gamma_2)$, порожденное двумя одномерными сдвигами: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, где α_1, α_2 — одномерные сдвиги либо $\alpha_1 : \Gamma_1 \to \Gamma_1$, $\alpha_2 : \Gamma_2 \to \Gamma_2$ (покоординатный сдвиг α), либо $\alpha_1 : \Gamma_2 \to \Gamma_1$, $\alpha_2 : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ (перекрестный сдвиг α). Введем четыре двумерных сдвига $\alpha_{\pm+}$, $\alpha_{\pm-}$ и четыре оператора $W_{\pm+}$, $W_{\pm-}$ в пространстве $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$: $W_{xy}f = f \circ \alpha_{xy}$ $(x, y = \pm,\ f \in L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2))$.

Основной объект исследования — действующий в $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ характеристический бисингулярный оператор со сдвигами

$$M = a_{++}W_{++}P_{++} + a_{+-}W_{+-}P_{+-} + a_{-+}W_{-+}P_{-+} + a_{--}W_{--}P_{--}.$$

В некоторых частных случаях нётеровость M была исследована в [3] и [4]. Вопрос об индексе M ранее не изучался вообще. В настоящей работе нет дополнительных ограничений [3, 4] на оператор M, вопросы нётеровости и индекса M решены полностью сведением M к характеристическому бисингулярному оператору без сдвигов.

В заметке приведены основные результаты. Статья с подробными доказательствами готовится к печати.

2. Случай покоординатных сдвигов типа $(+,+)$

Если одномерный сдвиг сохраняет (меняет) ориентацию, то ему присвоим тип $(+)$ (тип $(-)$). Если двумерный сдвиг $\alpha = (\alpha_1,\ \alpha_2)$ порожден одномерными сдвигами α_1 типа (ε) и α_2 типа (δ), $\varepsilon, \delta = \pm$, то будем говорить, что двумерный сдвиг α типа (ε, δ).

Теорема 2. *Пусть сдвиги $\alpha_{\pm+}$, $\alpha_{\pm-}$ покоординатные типа $(+,+)$. Тогда характеристический бисингулярный оператор со сдвигами M нётеров или нет одновременно с характеристическим бисингулярным оператором A. При этом* $\operatorname{Ind} M = \operatorname{Ind} A$.

Следствие. *В условиях теоремы* 2 *нётеровость M равносильна* (1), (2), а $\operatorname{Ind} M = (\operatorname{ind}_1 a_{++} - \operatorname{ind}_1 a_{--})(\operatorname{ind}_2 a_{++} - \operatorname{ind}_2 a_{--})$.

3. Случай произвольных двумерных сдвигов

Зафиксируем две точки z_1^o, z_2^o в ограниченных областях с границами Γ_1, Γ_2 соответственно и рассмотрим две функции $e_i(t_i) = t_i - z_i^o$ $(t_i \in \Gamma_i,\ i = 1, 2)$. Для $x = \pm$ обозначим $\bar{x} = \mp$. Наконец, введем функции e_{xy} на $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ и проекторы P'_{xy} в $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ $(x, y = \pm)$ по следующим правилам: пусть двумерный сдвиг α_{xy} покоординатный (перекрестный), тогда

1) если α_{xy} типа $(+,+)$, то $e_{xy} = 1$ и $P'_{xy} = P_{xy}$ $(P'_{xy} = P_{yx})$,
2) если α_{xy} типа $(+,-)$, то $e_{xy} = 1 \otimes e_2$ и $P'_{xy} = P_{x\bar{y}}$ $(P'_{xy} = P_{\bar{y}x})$,
3) если α_{xy} типа $(-,+)$, то $e_{xy} = e_1 \otimes 1$ и $P'_{xy} = P_{\bar{x}y}$ $(P'_{xy} = P_{y\bar{x}})$,
4) если α_{xy} типа $(-,-)$, то $e_{xy} = e_1 \otimes e_2$ и $P'_{xy} = P_{\bar{x}\bar{y}}$ $(P'_{xy} = P_{\bar{y}\bar{x}})$.

Теорема 3. *Оператор M нётеров или нет одновременно с характеристическим бисингулярным оператором $B = \sum\limits_{x,y=\pm} \frac{a_{xy}}{e_{xy} \circ \alpha_{xy}} P'_{xy}$. При этом* $\operatorname{Ind} M = \operatorname{Ind} B$.

Пример. Пусть α_{++} перекрестный типа $(+,-)$, α_{+-} покоординатный типа $(+,+)$, α_{-+} покоординатный типа $(+,-)$, α_{--} перекрестный типа $(-,-)$. Тогда для нётеровости оператора M необходимо и достаточно, чтобы

$$1)\ a_{xy}(t_1, t_2) \neq 0\ (x, y = \pm,\ t_1 \in \Gamma_1,\ t_2 \in \Gamma_2),$$

$$2)\ \operatorname{ind}_1 a_{+\pm} = \operatorname{ind}_1 a_{-\mp},\ \operatorname{ind}_2 a_{+\pm} = 1 + \operatorname{ind}_2 a_{-\pm}.$$

При этом $\operatorname{Ind} M = (1 + \operatorname{ind}_1 a_{--} - \operatorname{ind}_1 a_{-+})(\operatorname{ind}_2 a_{--} - \operatorname{ind}_2 a_{-+})$.

Литература

1. *Пилиди В. С.* О бисингулярном уравнении в пространстве L_p // Мат. исследования.—Кишинев, 1972.—Т. 7, № 3.—С. 167–175.
2. *Пилиди В. С.* Вычисление индекса бисингулярного оператора // Функцион. анализ и его прил.—1973.—Т. 7, № 4.—С. 93–94.
3. *Сазонов Л. И.* Бисингулярное уравнение со сдвигом в пространстве L_p // Мат. заметки.—1973.—Т. 13, № 3.—С. 385–393.
4. *Пилиди В. С., Стефаниди Е. Н.* Об одной алгебре бисингулярных операторов со сдвигом.—Ростов н/Д, 1981.—26 с.—Деп. в ВИНИТИ АН СССР, № 3036.

Статья поступила 26 мая 2014 г.

Ефимов Сергей Викторович
Северо-Кавказский филиал Московского технического
университета связи и информатики,
декан дневного факультета
РОССИЯ, 344002, Ростов-на-Дону, ул. Серафимовича, 62
E-mail: `EfimovSergei1960@mail.ru`

NOETHERICITY AND INDEX OF CHARACTERISTIC BISINGULAR OPERATOR WITH SHIFT

Efimov S. V.

Noethericity conditions are investigated and index formulas are obtained for characteristic bisingular operators with coordinate-wise and cross shifts. The problem is reduced to the case of bisingular operators without shifts.

Key words: Noethericity, index, bisingular operator, shift.