Владикавказский математический журнал
2014, Том 16, Выпуск 2, С. 49–61

УДК **517.927.2**

О ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ ЦЕПОЧКИ СТЕРЖНЕЙ С УПРУГИМИ ОПОРАМИ

Р. Ч. Кулаев

В работе изучается разрывная краевая задача для уравнения четвертого порядка, описывающая малые деформации цепочки жестко сочлененных стержней с упругими опорами в местах сочленения. Даются формулы, выражающие функцию Грина краевой задачи с упругими опорами через функцию Грина краевой задачи, когда опоры отсутствуют.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение четвертого порядка, разрывная краевая задача, функция влияния, функция Грина.

В настоящей работе рассматривается разрывная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнение четвертого порядка, являющаяся моделью стержневой конструкции. Изучаются свойства соответствующей функции Грина.

Вопросы, связанные с функцией Грина разрывных краевых задач для уравнений четвертого порядка уже изучались ранее. Был получен ряд общих результатов для уравнений произвольного порядка, когда вид краевых условий и условий связи в точках разрыва не играет ключевой роли. Здесь можно отметить такие вопросы как существование, построение, непрерывность функции Грина [1, 2]. Целый цикл работ Ю. В. Покорного, А. В. Боровских и К. П. Лазарева был посвящен вопросам о принадлежности функций Грина разрывных краевых задач к классам осцилляционных и знакорегулярных ядер [3–8]. В частности, в работах [3, 7] была доказана осцилляционность функции Грина краевой задачи, моделирующей малые деформации цепочки шарнирно сочлененных стержней, а в работе [8] формулируются достаточные условия знакорегулярности функции Грина разрывных краевых задач, обобщающие известный результат Калафати — Гантмахера — Крейна [9].

В центре внимания настоящей работы — задача, которая получила в фольклоре название «балка с упругими опорами». Вопрос о положительности и, тем более, осцилляционности функции Грина этой задачи нетривиален даже в случае одной опоры: если жесткость опоры равна нулю, то выполнены достаточные условия знакорегулярности (а значит и осцилляционности) функции Грина, сформулированные в работе [8]. Если же жесткости опор стремятся к бесконечности, то мы в пределе получаем функцию Грина так называемой «задачи с шарнирной опорой», которая меняет знак «в шахматном порядке» (эта задача и ее обобщения исследовались Н. В. Азбелевым, Ю. В. Покорным, В. Я. Дерром и А. Л. Тептиным (см. работы [10–12] и библиографию в них). Поэтому актуальным является вопрос, до каких пор можно увеличивать жесткость опоры, чтобы функция Грина оставалась положительным или осцилляционным ядром.

В данной статье даются формулы выражающие ассоциированные ядра функции Грина задачи о «балке с упругими опорами» через функцию Грина «более простой» краевой задачи — когда упругие опоры отсутствуют. Последняя, как уже отмечено выше, обладает комплексом осцилляционных свойств (см., например, [7]), что позволяет получить вполне явные свойства функции Грина исходной задачи [13].

1. Постановка задачи

Пусть $\Gamma = (a,b) \setminus \{a_i\}_{i=1}^n$, где $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1} = b$. Через $C[\Gamma]$ обозначим пространство кусочно-непрерывных функций, допускающих разрывы только первого рода и только в точках a_i при $i = 1, \ldots, n$. Тогда для функции $u(x) \in C[\Gamma]$ под $u(a_i \pm 0)$ будем понимать соответствующие пределы. Через $C^k[\Gamma]$ обозначим пространство функций из $C[\Gamma]$, имеющих k производных, также принадлежащих $C[\Gamma]$.

На Γ рассматривается дифференциальное уравнение

$$Lu \equiv (p(x)\,u'')'' - (q(x)\,u')' = f(x), \quad x \in \Gamma, \tag{1.1}$$

снабженное в точках a и b краевыми условиями

$$u(a) + \alpha(a)D^3u(a) = 0, \quad \beta(a)u''(a) - \vartheta(a)u'(a) = 0, \tag{1.2_a}$$

$$u(b) - \alpha(b)D^3u(b) = 0, \quad \beta(b)u''(b) + \vartheta(b)u'(b) = 0, \tag{1.2_b}$$

а в точках a_i $(i = 1, \ldots, n)$ — условиями согласования

$$\begin{gathered} u(a_i - 0) - u(a_i + 0) = 0, \quad u'(a_i - 0) - u'(a_i + 0) = 0, \\ (pu'')(a_i - 0) - (pu'')(a_i + 0) = 0, \quad D^3u(a_i - 0) - D^3u(a_i + 0) - \delta_i u(a_i) = 0, \end{gathered} \tag{1.3}$$

где через D^3u в (1.3) обозначена третья квазипроизводная $(p(x)u'')' - q(x)u'$.

При исследовании задачи (1.1)–(1.3) мы будем предполагать, что выполнены следующие условия:

- $p \in C^2[\Gamma]$, $\inf_{x\in\Gamma} p(x) > 0$, $q \in C^1[\Gamma]$, $q \geqslant 0$ на Γ, $f \in C[\Gamma]$;
- $\alpha(\cdot), \vartheta(\cdot), \beta(\cdot) \geqslant 0$, $\vartheta(\cdot) + \beta(\cdot) \neq 0$;
- $\delta_i \geqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Задача (1.1)–(1.3) описывает малые деформации цепочки жестко сочлененных стержней с упругими опорами в местах сочленения. При этом числа δ_i в условиях (1.3) задают коэффициенты упругости опор, а условия (1.2) охватывают все известные случаи закрепления концов стержней.

2. Представление функции Грина задачи (1.1)–(1.3)

Функцией Грина невырожденной краевой задачи (1.1)–(1.3) назовем функцию $G(x,s) : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ такую, что решение задачи может быть представлено в виде

$$u(x) = \int\limits_\Gamma G(x,s)f(s)\,ds.$$

Лемма 1 [1, гл. 6]**.** *Если функция Грина задачи* (1.1)–(1.3) *существует, то она обладает следующими свойствами:*

1) *функция* $G(x,s)$ *вместе со своими производными по* x *до четвертого порядка непрерывна по совокупности переменных вплоть до границы на каждом из прямоугольников* $[a_i, a_{i+1}] \times [a_j, a_{j+1}]$ $(i \neq j)$ *и на каждом из треугольников, на которые диагональю* $x = s$ *разбиваются квадраты* $[a_i, a_{i+1}] \times [a_i, a_{i+1}]$;

2) *при каждом фиксированном* $s \in \Gamma$ *функция* $G(x,s)$ *по* x *удовлетворяет однородному уравнению* (1.1) *на* $\Gamma \setminus \{s\}$;

3) *при каждом фиксированном* $s \in \Gamma$, *функция* $G(x,s)$ *по* x *удовлетворяет условиям* (1.2), (1.3);

4) *функция* $G(x,s)$ *на диагонали* $x = s \in \Gamma$ *удовлетворяет условиям непрерывности вместе со своими производными* $\frac{\partial G(x,s)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2}$ *и условию скачка третьей квазипроизводной по* x

$$D^3G(s+0,s) - D^3G(s-0,s) = 1;$$

5) *функция* $G(x,s)$ *определяется однозначно условиями* 1)–4).

Утверждения 2) и 3) леммы 1 описывают поведение функции Грина при каждом $s \in \Gamma$. Что касается свойств функции Грина задачи (1.1)–(1.3) при $s = a_i$, $i = 1, \dots, n$, то они даются в следующей лемме о предельных срезках. Напомним [1, гл. 6], что предельными срезками функции Грина $G(x,s)$ мы называем ее пределы при $s \to a_i + 0$ или $s \to a_i - 0$, оставляя за ними обозначения $G(x, a_i \pm 0)$.

Лемма 2 [1, гл. 6]**.** *Пусть* $G(x,s)$ — *функция Грина задачи* (1.1)–(1.3). *Тогда ее предельные срезки* $G(x, a_i \pm 0)$ *при некотором* i, $1 \leqslant i \leqslant n$, *удовлетворяют следующим условиям:*

1) *они являются решениями однородного уравнения* (1.1) *на* Γ;

2) *они удовлетворяют краевым условиям* (1.2) *и соотношениям* (1.3) *в точках* a_j, *отличных от* a_i;

3) $G(x, a_i - 0) \equiv G(x, a_i + 0)$ *на* Γ;

4) *в точке* a_i *функция* $G(x, a_i)$ *удовлетворяет первым трем из условий* (1.3), *а также неоднородному условию*

$$D^3G(a_i - 0, a_i) - D^3G(a_i + 0, a_i) - \delta_i G(a_i, a_i) = -1.$$

Пусть $G_0(x,s)$ — функция Грина краевой задачи (1.1)–(1.3) в случае когда все коэффициенты δ_i в условиях (1.3) равны нулю. Не сложно проверить, что при $\delta_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, выполнены достаточные условия знакорегулярности ядра $G_0(x,s)$, сформулированные в работе [8]. Поэтому справедливо следующее утверждение

Лемма 3. *Для любых наборов* $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < b$ *и* $a < s_1 < s_2 < \ldots < s_k < b$ *ассоциированные ядра*

$$G_0 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k \end{pmatrix} = \det \left\| G_0(x_i, s_j) \right\|_{i,j=1}^{k}$$

функции $G_0(x,s)$ *неотрицательны, а в случае равенств* $x_i = s_i$, $i = 1, \dots, k$, *положительны.*

Наша ближайшая цель — найти представление функции Грина $G(x,s)$ задачи (1.1)–(1.3) через ассоциированные ядра функции $G_0(x,s)$. Для этого будем искать выражение для функции $G(x,s)$ в виде

$$G(x,s) = G_0(x,s) - \sum_{i=1}^{n} G_0(x, a_i)\, \psi_i(s), \tag{2.1}$$

где $\psi_i(s)$ — некоторые функции.

Очевидно, что правая часть (2.1) удовлетворяет условиям 1), 2) и 4) леммы 1. Подберем функции $\psi_i(s)$ так, чтобы $G(x,s)$ удовлетворяла и условию 3). Тогда из свойства 5) леммы 1 будет следовать, что формула (2.1) действительно дает представление функции Грина краевой задачи (1.1)–(1.3).

Условия (1.2) для функции $G(\cdot,s)$ при $s\in\Gamma$ выполнены в силу свойств функции $G_0(x,s)$. Условия (1.3) с производными ниже третьего порядка в точках a_i выполнены по той же причине. Поэтому остается добиться выполнения условий с третьими квазипроизводными из (1.3). Подставляя правую часть (2.1) в эти условия, получаем

$$\begin{gathered}D^3G_0(a_j-0,s)-D^3G_0(a_j+0,s)-\delta_jG_0(a_j,s)-\sum_{i=1}^n\big(D^3G_0(a_j-0,a_i)\\-D^3G_0(a_j+0,a_i)-\delta_jG_0(a_j,a_i)\big)\,\psi_i(s)=0,\quad j=1,\ldots,n.\end{gathered}$$

Используя свойства предельных срезок функции $G_0(x,s)$ (лемма 2), получим

$$\sum_{i=1}^n\big(\delta_jG_0(a_j,a_i)+\delta_{ij}\big)\,\psi_i(s)-\delta_jG_0(a_j,s)=0,\quad j=1,\ldots,n,\tag{2.2}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

К системе равенств (2.2) добавим равенство (2.1), записанное в виде

$$\sum_{i=1}^n G_0(x,a_i)\,\psi_i(s)+\big(G(x,s)-G_0(x,s)\big)=0.\tag{2.3}$$

Рассматривая (2.2) и (2.3) как систему $(n+1)$-однородного уравнения, имеющую ненулевое решение $\psi_1(s)$, …, $\psi_n(s)$ и $\psi_{n+1}(s)\equiv1$, получаем, что определитель этой системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix}\delta_1G_0(a_1,a_1)+1 & \delta_1G_0(a_1,a_2) & \ldots & \delta_1G_0(a_1,a_n) & \delta_1G_0(a_1,s)\\ \delta_2G_0(a_2,a_1) & \delta_2G_0(a_2,a_2)+1 & \ldots & \delta_2G_0(a_2,a_n) & \delta_2G_0(a_2,s)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \delta_nG_0(a_n,a_1) & \delta_nG_0(a_n,a_2) & \ldots & \delta_nG_0(a_n,a_n)+1 & \delta_nG_0(a_n,s)\\ G_0(x,a_1) & G_0(x,a_2) & \ldots & G_0(x,a_n) & G(x,s)-G_0(x,s)\end{vmatrix}=0.$$

Отсюда

$$\Delta\cdot G(x,s)=\begin{vmatrix}\delta_1G_0(a_1,a_1)+1 & \delta_1G_0(a_1,a_2) & \ldots & \delta_1G_0(a_1,a_n) & \delta_1G_0(a_1,s)\\ \delta_2G_0(a_2,a_1) & \delta_2G_0(a_2,a_2)+1 & \ldots & \delta_2G_0(a_2,a_n) & \delta_2G_0(a_2,s)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \delta_nG_0(a_n,a_1) & \delta_nG_0(a_n,a_2) & \ldots & \delta_nG_0(a_n,a_n)+1 & \delta_nG_0(a_n,s)\\ G_0(x,a_1) & G_0(x,a_2) & \ldots & G_0(x,a_n) & G_0(x,s)\end{vmatrix},\tag{2.4}$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix}\delta_1G_0(a_1,a_1)+1 & \delta_1G_0(a_1,a_2) & \ldots & \delta_1G_0(a_1,a_n)\\ \delta_2G_0(a_2,a_1) & \delta_2G_0(a_2,a_2)+1 & \ldots & \delta_2G_0(a_2,a_n)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \delta_nG_0(a_n,a_1) & \delta_nG_0(a_n,a_2) & \ldots & \delta_nG_0(a_n,a_n)+1\end{vmatrix}.$$

Оба определителя, стоящих в формуле (2.4), имеют примерно одинаковую структуру и получаются из следующего определителя более общего вида:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \delta_1 c_{11} + \lambda_1 & \delta_1 c_{12} & \dots & \delta_1 c_{1n} & \delta_1 c_{1(n+1)} \\ \delta_2 c_{21} & \delta_2 c_{22} + \lambda_2 & \dots & \delta_2 c_{2n} & \delta_2 c_{2(n+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_n c_{n1} & \delta_n c_{n2} & \dots & \delta_n c_{nn} + \lambda_n & \delta_n c_{n(n+1)} \\ \delta_{n+1} c_{(n+1)1} & \delta_{n+1} c_{(n+1)2} & \dots & \delta_{n+1} c_{(n+1)n} & \delta_{n+1} c_{(n+1)(n+1)} + \lambda_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Вычислим этот определитель, а затем, придавая соответствующие значения константам δ_i и λ_i, получим из (2.4) формулу для функции Грина $G(x,s)$ краевой задачи (1.1)–(1.3).

Если, как обычно, обозначить через $\Delta_0\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}$ главные миноры этого определителя, составленные из строк и столбцов с номерами $i_1, \dots, i_k$, то определитель Δ_0 равен

$$\Delta_0 = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n+1} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \dots \lambda_{j_{n-k+1}} \Delta_0 \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где индексы $i_1, \dots, i_k$ вместе с индексами $j_1, \dots, j_{n-k+1}$ образуют полную систему индексов $1, 2, \dots, n, n+1$. Действительно, произведение $\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\dots\lambda_{j_{n-k+1}}$ имеется только в том члене определителя Δ_0, который содержит диагональные элементы

$$\delta_{j_1} G_0(a_{j_1}, a_{j_1}) + \lambda_{j_1},\ \delta_{j_2} G_0(a_{j_2}, a_{j_2}) + \lambda_{j_2},\ \dots,\ \delta_{j_{n-k+1}} G_0(a_{j_{n-k+1}}, a_{j_{n-k+1}}) + \lambda_{j_{n-k+1}}.$$

Произведение этих диагональных элементов входит в состав определителя Δ_0 с множителем, равным главному минору $\Delta_0\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}$ с индексами $i_1, \dots, i_k$, образующими вместе с $j_1, \dots, j_{n-k+1}$ полный набор индексов $1, 2, \dots, n+1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta_0 = {}& \big(\delta_{j_1} G_0(a_{j_1}, a_{j_1}) + \lambda_{j_1}\big)\big(\delta_{j_2} G_0(a_{j_2}, a_{j_2}) + \lambda_{j_2}\big) \\ & \times \dots \times \big(\delta_{j_{n-k+1}} G_0(a_{j_{n-k+1}}, a_{j_{n-k+1}}) + \lambda_{j_{n-k+1}}\big) \Delta_0 \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix} + \dots \end{aligned}$$

Перебирая по k всевозможные сочетания из $(n+1)$-го индекса, получим формулу (2.5).

Положим в формуле (2.5) $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_n = 1$ и $\lambda_{n+1} = 1$, $\delta_{n+1} = 0$. Тогда определитель Δ_0 совпадает с определителем Δ из левой части (2.4) и поэтому

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \Delta_0 \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \delta_{i_1}\delta_{i_2}\dots\delta_{i_k} G_0 \begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_k} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Если же в формуле (2.5) $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_n = 1$ и $\lambda_{n+1} = 0$, $\delta_{n+1} = 1$, то отличными от нуля могут быть только слагаемые не содержащие $\lambda_{n+1} = 0$ или, что одно и то же, слагаемые с минорами $\Delta_0\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}$, у которых один из индексов $i_1, \dots, i_k$ обязательно равен $n+1$. Замечая теперь, что при нашем выборе констант λ_i, δ_i определитель Δ_0 совпадет с определителем, стоящим в правой части (2.4), получаем представление функции

Грина $G(x,s)$ краевой задачи (1.1)–(1.3) через ассоциированные ядра функции Грина $G_0(x,s)$:

$$G(x,s) = \frac{1}{\Delta}\left[G_0(x,s) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \delta_{i_1}\delta_{i_2}\ldots\delta_{i_k} G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k} & x \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k} & s\end{pmatrix}\right]. \qquad (2.6)$$

3. Представление ассоциированных ядер функции Грина задачи (1.1)–(1.3)

В данном параграфе мы выведем формулы, выражающие ассоциированные ядра функции Грина $G(x,s)$ задачи (1.1)–(1.3) через ассоциированные ядра функций Грина «упрощенных» задач.

Пусть, по-прежнему, $G_0(x,s)$ — функция Грина краевой задачи (1.1)–(1.3) в случае, когда все коэффициенты δ_j в условиях (1.3) равны нулю. Через $G_i(x,s)$ обозначим функцию Грина задачи (1.1)–(1.3) для случая, когда в условиях (1.3) все коэффициенты δ_j, кроме некоторого фиксированного δ_i, равны нулю. Аналогично, через $G_{i_1\ldots i_k}(x,s)$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, будем обозначать функцию Грина задачи (1.1)–(1.3) для случая, когда в условиях (1.3) коэффициенты $\delta_{i_1},\ldots,\delta_{i_k}$ отличны от нуля, а все остальные равны нулю. В частности, при $k = n$ получим, что функция $G_{1\ldots n}(x,s)$ совпадает с функцией Грина $G(x,s)$ исходной задачи.

Теорема 4. *Для ассоциированных ядер функции Грина $G_i(x,s)$ задачи* (1.1)–(1.3) *имеет место представление*

$$G_i\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k \\ s_1 & \ldots & s_k\end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_i}\left[G_0\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k \\ s_1 & \ldots & s_k\end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 & \ldots & x_k \\ a_i & s_1 & \ldots & s_k\end{pmatrix}\right], \qquad (3.1)$$

где $\Delta_i = 1 + \delta_i G_0(a_i,a_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $k = 1,2,3,\ldots$

$\lhd$ При $k = 1$ утверждение теоремы следует из (2.6). Доказательство теоремы для $k \geqslant 2$ будем вести индукцией по k. Пусть $k = 2$. Из формулы (2.6) следует

$$G_i\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ s_1 & s_2\end{pmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_1\end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_1\end{pmatrix} & G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_2\end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_2\end{pmatrix} \\ G_0\begin{pmatrix} x_2 \\ s_1\end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x_2 \\ a_i & s_1\end{pmatrix} & G_0\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2\end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x_2 \\ a_i & s_2\end{pmatrix}\end{vmatrix}}{\Delta_i^2}.$$

Раскладывая определитель второго порядка в числителе дроби, получаем

$$G_i\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ s_1 & s_2\end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_i^2}\left[G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_1\end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_1\end{pmatrix}\right]\left[G_0\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2\end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x_2 \\ a_i & s_2\end{pmatrix}\right]$$
$$-\frac{1}{\Delta_i^2}\left[G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_2\end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_2\end{pmatrix}\right]\left[G_0\begin{pmatrix} x_2 \\ s_1\end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x_2 \\ a_i & s_1\end{pmatrix}\right].$$

Умножим обе части равенства на Δ_i^2 и раскроем скобки:

$$\begin{aligned}\Delta_i^2\cdot G_i\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ s_1 & s_2\end{pmatrix} &= G_0\begin{pmatrix}x_1\\ s_1\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}x_2\\ s_2\end{pmatrix}-G_0\begin{pmatrix}x_1\\ s_2\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}x_2\\ s_1\end{pmatrix}\\ &+\delta_i G_0\begin{pmatrix}x_1\\ s_1\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}a_i & x_2\\ a_i & s_2\end{pmatrix}-\delta_i G_0\begin{pmatrix}x_1\\ s_2\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}a_i & x_2\\ a_i & s_1\end{pmatrix}\\ &+\delta_i G_0\begin{pmatrix}x_2\\ s_2\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}a_i & x_1\\ a_i & s_1\end{pmatrix}-\delta_i G_0\begin{pmatrix}x_2\\ s_1\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}a_i & x_1\\ a_i & s_2\end{pmatrix}\\ &+\delta_i^2\left[G_0\begin{pmatrix}a_i & x_1\\ a_i & s_1\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}a_i & x_2\\ a_i & s_2\end{pmatrix}-G_0\begin{pmatrix}a_i & x_1\\ a_i & s_2\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}a_i & x_2\\ a_i & s_1\end{pmatrix}\right].\end{aligned}$$

Сворачивая первые два слагаемых, и раскрывая третье и четвертое, получим

$$\begin{aligned}&G_0\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ s_1 & s_2\end{pmatrix}+\delta_i G_0\begin{pmatrix}a_i\\ a_i\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ s_1 & s_2\end{pmatrix}\\ &-\delta_i\left[G_0\begin{pmatrix}a_i\\ s_2\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}x_1\\ s_1\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}x_2\\ a_i\end{pmatrix}-G_0\begin{pmatrix}a_i\\ s_1\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}x_1\\ s_2\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}x_2\\ a_i\end{pmatrix}\right]\\ &+\delta_i G_0\begin{pmatrix}x_2\\ s_2\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}a_i & x_1\\ a_i & s_1\end{pmatrix}-\delta_i G_0\begin{pmatrix}x_2\\ s_1\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}a_i & x_1\\ a_i & s_2\end{pmatrix}\\ &+\delta_i^2\left[G_0\begin{pmatrix}a_i & x_1\\ a_i & s_1\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}a_i & x_2\\ a_i & s_2\end{pmatrix}-G_0\begin{pmatrix}a_i & x_1\\ a_i & s_2\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}a_i & x_2\\ a_i & s_1\end{pmatrix}\right].\end{aligned}$$

Во второй строке выносим общий множитель и сворачиваем, а к четвертой строке применяем детерминантное тождество Сильвестра [15, гл. II, § 7]:

$$\begin{aligned}&G_0\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ s_1 & s_2\end{pmatrix}\left[1+\delta_i G_0\begin{pmatrix}a_i\\ a_i\end{pmatrix}\right]-\delta_i G_0\begin{pmatrix}x_2\\ a_i\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}a_i & x_1\\ s_2 & a_i\end{pmatrix}\\ &+\delta_i G_0\begin{pmatrix}x_2\\ s_2\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}a_i & x_1\\ a_i & s_1\end{pmatrix}-\delta_i G_0\begin{pmatrix}x_2\\ s_1\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}a_i & x_1\\ a_i & s_2\end{pmatrix}\\ &+\delta_i^2 G_0\begin{pmatrix}a_i\\ a_i\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}a_i & x_1 & x_2\\ a_i & s_1 & s_2\end{pmatrix}=G_0\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ s_1 & s_2\end{pmatrix}\Delta_i+\delta_i G_0\begin{pmatrix}x_2\\ a_i\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}a_i & x_1\\ a_i & s_2\end{pmatrix}\\ &+\delta_i G_0\begin{pmatrix}x_2\\ s_2\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}a_i & x_1\\ a_i & s_1\end{pmatrix}-\delta_i G_0\begin{pmatrix}x_2\\ s_1\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}a_i & x_1\\ a_i & s_2\end{pmatrix}\\ &+\delta_i^2 G_0\begin{pmatrix}a_i\\ a_i\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix}a_i & x_1 & x_2\\ a_i & s_1 & s_2\end{pmatrix}=G_0\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ s_1 & s_2\end{pmatrix}\Delta_i+\delta_i G_0\begin{pmatrix}a_i & x_1 & x_2\\ a_i & s_1 & s_2\end{pmatrix}\Delta_i.\end{aligned}$$

Деля на Δ_i^2, окончательно получаем

$$G_i\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ s_1 & s_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta_i}\left[G_0\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ s_1 & s_2\end{pmatrix}+\delta_i G_0\begin{pmatrix}a_i & x_1 & x_2\\ a_i & s_1 & s_2\end{pmatrix}\right].$$

Предположим, что формула (3.1) верна для $k-1$, и рассмотрим ассоциированное ядро k-го порядка.

$$G_i\begin{pmatrix}x_1 & \dots & x_k\\ s_1 & \dots & s_k\end{pmatrix}=\det\left\|\frac{1}{\Delta_i}\left(G_0\begin{pmatrix}x_m\\ s_j\end{pmatrix}+\delta_i G_0\begin{pmatrix}a_i & x_m\\ a_i & s_j\end{pmatrix}\right)\right\|_{m,j=1}^{k}.$$

Для упрощения записи через $G_0\binom{x \setminus x_m}{s \setminus s_j}$ будем обозначать ассоциированное ядро, считаемое на наборах, получаемых из $x_1, \dots, x_k$ и $s_1, \dots, s_k$, вычеркиванием элементов x_m и s_j соответственно. Разложим определитель $G_i\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix}$ по элементам первой строки и воспользуемся предположением индукции:

$$
\begin{aligned}
G_i\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} &= \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j+1}}{\Delta_i} G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_j \end{pmatrix} G_i\begin{pmatrix} x \setminus x_1 \\ s \setminus s_j \end{pmatrix} \\
&+ \delta_i \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j+1}}{\Delta_i} G_0\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ a_1 & s_j \end{pmatrix} G_i\begin{pmatrix} x \setminus x_1 \\ s \setminus s_j \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j+1}}{\Delta_i^2} G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_j \end{pmatrix} \left[G_0\begin{pmatrix} x \setminus x_1 \\ s \setminus s_j \end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x \setminus x_1 \\ a_i & s \setminus s_j \end{pmatrix} \right] \\
&+ \delta_i \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j+1}}{\Delta_i^2} G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_j \end{pmatrix} \left[G_0\begin{pmatrix} x \setminus x_1 \\ s \setminus s_j \end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x \setminus x_1 \\ a_i & s \setminus s_j \end{pmatrix} \right].
\end{aligned}
$$

Разделим каждую сумму на две. Тогда первую из получаемых четырех сумм можно свернуть, а во второй сумме каждое слагаемое разложить по первой строке и выделить первые слагаемые в отдельную сумму:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta_i^2} G_0\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} + \delta_i G_0(a_1, a_1) \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j+1}}{\Delta_i^2} G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_j \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} x \setminus x_1 \\ s \setminus s_j \end{pmatrix} \\
&+ \delta_i \sum_{j=1}^{k} G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_j \end{pmatrix} \sum_{m \neq j} \frac{(-1)^{j+m}}{\Delta_i^2} G_0\begin{pmatrix} a_i \\ s_m \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} & x \setminus x_1 \\ a_i & s \setminus \{s_j, s_m\} \end{pmatrix} \\
&+ \delta_i \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j+1}}{\Delta_i^2} G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_j \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} x \setminus x_1 \\ s \setminus s_j \end{pmatrix} \\
&+ \delta_i^2 \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j+1}}{\Delta_i^2} G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_j \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} a_i & x \setminus x_1 \\ a_i & s \setminus s_j \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Учитывая, что

$$
\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_j \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} x \setminus x_1 \\ s \setminus s_j \end{pmatrix} = G_0\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k} G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_j \end{pmatrix} \sum_{m \neq j} (-1)^{j+m} G_0\begin{pmatrix} a_i \\ s_m \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} & x \setminus x_1 \\ a_i & s \setminus \{s_j, s_m\} \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_j \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} x \setminus x_1 \\ s \setminus s_j \end{pmatrix} = G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 & \dots & x_k \\ a_i & s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

имеем

$$\frac{1}{\Delta_i} G_0 \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} + \frac{\delta_i}{\Delta_i^2} G_0 \begin{pmatrix} a_i & x_1 & \dots & x_k \\ a_i & s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{\delta_i^2}{\Delta_i^2} G_0 \begin{pmatrix} a_i \\ a_i \end{pmatrix} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} G_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ s_j \end{pmatrix} G_0 \begin{pmatrix} a_i & x \setminus x_1 \\ a_i & s \setminus s_j \end{pmatrix}$$
$$- \frac{\delta_i^2}{\Delta_i^2} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} G_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ a_i \end{pmatrix} G_0 \begin{pmatrix} a_i \\ s_j \end{pmatrix} G_0 \begin{pmatrix} a_i & x \setminus x_1 \\ a_i & s \setminus s_j \end{pmatrix}.$$

Сворачивая две последние суммы, приходим к равенству

$$G_i \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_i} G_0 \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} + \frac{\delta_i}{\Delta_i^2} G_0 \begin{pmatrix} a_i & x_1 & \dots & x_k \\ a_i & s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{\delta_i^2}{\Delta_i^2} G_0 \begin{pmatrix} a_i \\ a_i \end{pmatrix} G_0 \begin{pmatrix} a_i & x_1 & \dots & x_k \\ a_i & s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} + \frac{\delta_i^2}{\Delta_i^2} G_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ a_i \end{pmatrix} G_0 \begin{pmatrix} a_i & a_i & x_2 & \dots & x_k \\ a_i & s_1 & s_2 & \dots & s_k \end{pmatrix}.$$

Здесь последнее слагаемое равно нулю, поэтому окончательно получаем

$$G_i \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_i} G_0 \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} + \frac{\delta_i}{\Delta_i} G_0 \begin{pmatrix} a_i & x_1 & \dots & x_k \\ a_i & s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix}. \ \triangleright$$

Далее мы установим формулу, выражающую функцию Грина $G(x,s)$ через функции Грина $G_{i_1\dots i_k}(x,s)$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, «упрощенных» задач.

Рассмотрим функцию $G_j(x,s)$. Из формулы (3.1) следует, что

$$\begin{gathered} G_j \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_j} G_0 \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} + \frac{\delta_j}{\Delta_j} G_0 \begin{pmatrix} a_j & x \\ a_j & s \end{pmatrix}, \\ G_j \begin{pmatrix} a_{i_1} & \dots & a_{i_k} & x \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_k} & s \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_j} G_0 \begin{pmatrix} a_{i_1} & \dots & a_{i_k} & x \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_k} & s \end{pmatrix} \\ + \frac{\delta_j}{\Delta_j} G_0 \begin{pmatrix} a_{i_1} & \dots & a_{i_k} & a_j & x \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_k} & a_j & s \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{3.2}$$

где $\Delta_j = 1 + \delta_j G_0(a_j, a_j)$.

Рассмотрим функцию Грина $G(x,s)$ исходной задачи и воспользуемся ее представлением (2.6) через функцию $G_0(x,s)$.

$$G(x,s) = \frac{1}{\Delta} \left[G_0(x,s) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \delta_{i_1} \delta_{i_2} \ldots \delta_{i_k} G_0 \begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_k} & x \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_k} & s \end{pmatrix} \right].$$

Раскроем сумму по k. Тогда, умножая правую часть последнего равенства на Δ, а затем, перегруппировывая слагаемые, получим

$$G_0\begin{pmatrix}x\\ s\end{pmatrix}+\sum_{1\leqslant i_1\leqslant n}\delta_{i_1}G_0\begin{pmatrix}a_{i_1}&x\\ a_{i_1}&s\end{pmatrix}+\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\delta_{i_1}\delta_{i_2}G_0\begin{pmatrix}a_{i_1}&a_{i_2}&x\\ a_{i_1}&a_{i_2}&s\end{pmatrix}$$
$$+\ldots+\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_{n-1}\leqslant n}\delta_{i_1}\ldots\delta_{i_{n-1}}G_0\begin{pmatrix}a_{i_1}&\ldots&a_{i_{n-1}}&x\\ a_{i_1}&\ldots&a_{i_{n-1}}&s\end{pmatrix}+\delta_1\ldots\delta_nG_0\begin{pmatrix}a_1&\ldots&a_n&x\\ a_1&\ldots&a_n&s\end{pmatrix}$$
$$=\left[G_0\begin{pmatrix}x\\ s\end{pmatrix}+\delta_1G_0\begin{pmatrix}a_1&x\\ a_1&s\end{pmatrix}\right]+\sum_{2\leqslant i_1\leqslant n}\delta_{i_1}\left[G_0\begin{pmatrix}a_{i_1}&x\\ a_{i_1}&s\end{pmatrix}+\delta_1G_0\begin{pmatrix}a_{i_1}&a_1&x\\ a_{i_1}&a_1&s\end{pmatrix}\right]$$
$$+\sum_{2\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\delta_{i_1}\delta_{i_2}\left[G_0\begin{pmatrix}a_{i_1}&a_{i_2}&x\\ a_{i_1}&a_{i_2}&s\end{pmatrix}+\delta_1G_0\begin{pmatrix}a_{i_1}&a_{i_2}&a_1&x\\ a_{i_1}&a_{i_2}&a_1&s\end{pmatrix}\right]$$
$$+\ldots+\sum_{2\leqslant i_1<\ldots<i_{n-2}\leqslant n}\delta_{i_1}\ldots\delta_{i_{n-2}}\left[G_0\begin{pmatrix}a_{i_1}&\ldots&a_{i_{n-2}}&x\\ a_{i_1}&\ldots&a_{i_{n-2}}&s\end{pmatrix}+\delta_1G_0\begin{pmatrix}a_{i_1}&\ldots&a_{i_{n-2}}&a_1&x\\ a_{i_1}&\ldots&a_{i_{n-2}}&a_1&s\end{pmatrix}\right]$$
$$+\delta_2\ldots\delta_n\left[G_0\begin{pmatrix}a_2&\ldots&a_n&x\\ a_2&\ldots&a_n&s\end{pmatrix}+\delta_1G_0\begin{pmatrix}a_2&\ldots&a_n&a_1&x\\ a_2&\ldots&a_n&a_1&s\end{pmatrix}\right].$$

Используя (3.2), окончательно получаем

$$G(x,s)=\frac{\Delta_1}{\Delta}\left[G_1\begin{pmatrix}x\\ s\end{pmatrix}+\sum_{2\leqslant i_1\leqslant n}\delta_{i_1}G_1\begin{pmatrix}a_{i_1}&x\\ a_{i_1}&s\end{pmatrix}+\sum_{2\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\delta_{i_1}\delta_{i_2}G_1\begin{pmatrix}a_{i_1}&a_{i_2}&x\\ a_{i_1}&a_{i_2}&s\end{pmatrix}\right.$$
$$\left.+\ldots+\sum_{2\leqslant i_1<\ldots<i_{n-2}\leqslant n}\delta_{i_1}\ldots\delta_{i_{n-2}}G_1\begin{pmatrix}a_{i_1}&\ldots&a_{i_{n-2}}&x\\ a_{i_1}&\ldots&a_{i_{n-2}}&s\end{pmatrix}+\delta_2\ldots\delta_nG_1\begin{pmatrix}a_2&\ldots&a_n&x\\ a_2&\ldots&a_n&s\end{pmatrix}\right].$$

С помощью аналогичных выкладок, но уже с функцией $G_1(x,s)$, получим

$$G(x,s)=\frac{\Delta_1\Delta_{12}}{\Delta}\left[G_{12}\begin{pmatrix}x\\ s\end{pmatrix}\sum_{3\leqslant i_1\leqslant n}\delta_{i_1}G_{12}\begin{pmatrix}a_{i_1}&x\\ a_{i_1}&s\end{pmatrix}\right.$$
$$+\sum_{3\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\delta_{i_1}\delta_{i_2}G_{12}\begin{pmatrix}a_{i_1}&a_{i_2}&x\\ a_{i_1}&a_{i_2}&s\end{pmatrix}$$
$$+\ldots+\sum_{3\leqslant i_1<\ldots<i_{n-3}\leqslant n}\delta_{i_1}\ldots\delta_{i_{n-3}}G_{12}\begin{pmatrix}a_{i_1}&\ldots&a_{i_{n-3}}&x\\ a_{i_1}&\ldots&a_{i_{n-3}}&s\end{pmatrix}$$
$$\left.+\delta_3\ldots\delta_nG_{12}\begin{pmatrix}a_3&\ldots&a_n&x\\ a_3&\ldots&a_n&s\end{pmatrix}\right],$$

где $\Delta_{12}=1+\delta_2G_1(a_2,a_2)$. Продолжая рассуждения, в итоге получим формулу

$$G(x,s)=\frac{\Delta_1\Delta_{12}\Delta_{23}\ldots\Delta_{n-2,n-1}}{\Delta}\left[G_{1\ldots n-1}\begin{pmatrix}x\\ s\end{pmatrix}+\delta_nG_{1\ldots n-1}\begin{pmatrix}a_{i_n}&x\\ a_{i_n}&s\end{pmatrix}\right],\qquad(3.3)$$

в которой $\Delta_{j,j+1}=1+\delta_{j+1}G_{1\ldots j}(a_{j+1},a_{j+1})$, $1\leqslant j\leqslant n-2$.

Теорема 5. *Для любого набора индексов* $\{j_1, \ldots, j_m\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ *имеет место формула*

$$G(x,s) = C\Bigg[G_{j_1\ldots j_m}(x,s) \\ + \sum_{k=1}^{n-m} \sum_{\substack{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n,\\ i_l\notin\{j_1,\ldots,j_m\}}} \delta_{i_1}\delta_{i_2}\ldots\delta_{i_k} G_{j_1\ldots j_m}\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k} & x \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k} & s\end{pmatrix}\Bigg], \tag{3.4}$$

где C — *положительная константа.*

Формула (3.4) позволяет факторизовать формулу (2.6). Сначала, при помощи функции $G_0(x,s)$ мы можем построить, например, функцию $G_{j_1}(x,s)$, $1 \leqslant j_1 \leqslant n$. Затем, с помощью уже построенной функции $G_{j_1}(x,s)$, строим функцию $G_{j_1 j_2}(x,s)$, $1 \leqslant j_1, j_2 \leqslant n$, и так далее. На последнем шаге мы применяем формулу (3.3). Это, в свою очередь, вместе с формулой (3.1) позволяет факторизовать формулу для ассоциированных ядер функции $G(x,s)$:

$$G_{j_1\ldots j_m}\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k \\ s_1 & \ldots & s_k\end{pmatrix} = C_m\Bigg[G_{j_1\ldots j_{m-1}}\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k \\ s_1 & \ldots & s_k\end{pmatrix} \\ + \delta_{j_m} G_{j_1\ldots j_{m-1}}\begin{pmatrix} a_{j_m} & x_1 & \ldots & x_k \\ a_{j_m} & s_1 & \ldots & s_k\end{pmatrix}\Bigg], \tag{3.5}$$

где $C_m = 1 + \delta_{j_m} G_{j_1\ldots j_{m-1}}(a_{j_m}, a_{j_m})$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

4. Свойства функции влияния краевой задачи (1.1)–(1.3)

В данном пункте анонсируются результаты, которые удается получить, используя выведенные в предыдущих пунктах представления для функции $G(x,s)$ и ее ассоциированных ядер.

Формула (2.6) позволяет сформулировать необходимые и достаточные условия положительности функции влияния краевой задачи (1.1)–(1.3). В этих условиях определяется множество значений коэффициентов жесткости опор, при которых функция влияния положительна и вне которого у нее теряется это свойство. Указанное множество определяется системой алгебраических неравенств относительно коэффициентов жесткости, что позволяет осуществлять эффективную компьютерную проверку положительности функции Грина. Эти результаты будут опубликованы в журнале «Дифференциальные уравнения» (Кулаев Р. Ч. «Критерий положительности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвертого порядка» — принята в печать).

Что касается представления (3.5), то оно явилось отправной точкой при изучении вопроса о зависимости осцилляционности функции Грина краевой задачи (1.1)–(1.3) от коэффициентов жесткости [13].

Напомним, что непрерывная на квадрате $[a,b] \times [a,b]$ функция $G(x,s)$ называется *осцилляционным* ядром (см., например, [9] или [16]) интегрального оператора

$$(Gu)(x) = \int_a^b G(x,s)u(s)q(s)\,ds,$$

если при всех $k = 1, 2, 3, \ldots$ выполнены условия

$$G(x,s) > 0, \quad a < x, s < b,$$

$$G\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k \\ x_1 & \ldots & x_k \end{pmatrix} > 0, \quad a < x_1 < \ldots < x_k < b,$$

$$G\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k \\ s_1 & \ldots & s_k \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad \begin{array}{c} a < x_1 < \ldots < x_k < b; \\ a < s_1 < \ldots < s_k < b. \end{array}$$

Осцилляционные ядра примечательны тем, что интегральные операторы с такими ядрами обладают комплексом замечательных спектральных свойств, характерных для классической задачи Штурма — Лиувилля и называемых осцилляционными (см., например, [1–5]).

При изучении знаковых свойств ассоциированных ядер функции Грина $G(x,s)$ краевой задачи (1.1)–(1.3), представление (3.5) позволило использовать знаковые свойства осцилляционной функции $G_0(x,s)$ и ее ядер. Причем, оказалось, что условие осцилляционности функции Грина задачи (1.1)–(1.3) совпадает с условием ее положительности (Кулаев Р. Ч. «Об осцилляционности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвертого порядка» — принята в печать в журнале «Дифференциальные уравнения»).

Та же формула (3.5) используется и при изучении вопроса о зависимости собственных значений дифференциального оператора, порожденного соотношениями (1.1)–(1.3), от коэффициентов δ_i и от расположения точек a_i, в которых задаются условия (1.3). Удалось показать, что с увеличением жесткости упругих опор собственные значения краевой задачи монотонно возрастают и остаются положительными при любых допустимых значениях коэффициентов жесткости, хотя не исключена ситуация, когда имеются кратные собственные значения. Возможность двукратного вырождения отдельных собственных значений уже наблюдалась в ряде задач оптимизации частот колебаний балок и стержневых систем, нагруженных сжимающей силой (см., например, [17–19]). Важной особенностью подобных задач является то обстоятельство, что оптимум может достигаться на двукратном собственном значении. В рассматриваемой нами задаче возникает аналогичная ситуация. Так, например, в случае одной опоры, минимальное значение коэффициента жесткости, при котором ведущее собственное значение достигает своего максимально возможного значения, соответствует случаю, когда ведущее собственное значение является двукратным.

Литература

1. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2007.—272 с.
2. *Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах.—М.: Физматлит, 2009.—192 с.
3. *Покорный Ю. В.* О знакорегулярных функциях Грина некоторых неклассических задач // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, № 4.—С. 205–206.
4. *Боровских А. В., Покорный Ю. В.* Системы Чебышева — Хаара в теории разрывных ядер Келлога // Успехи мат. наук.—1994.—Т. 49, № 3.—С. 3–42.
5. *Боровских А. В., Лазарев К. П., Покорный Ю. В.* Об осцилляционных спектральных свойствах разрывных краевых задач // Докл. РАН.—1994.—Т. 335, № 4.—С. 409–412.
6. *Боровских А. В., Лазарев К. П., Покорный Ю. В.* О ядрах Келлога в разрывных задачах // Оптимальное управление и дифференциальные уравнения. Сб. статей. К семидесятилетию со дня рождения академика Е. Ф. Мищенко. Тр. МИАН.—1995.—Т. 211.—С. 102–120.

7. *Покорный Ю. В., Лазарев К. П.* Некоторые осцилляционные теоремы для многоточечных задач // Дифференц. уравнения.—1987.—Т. 23, № 4.—С. 658–670.
8. *Боровских А. В.* Условия знакорегулярности разрывных краевых задач // Мат. заметки.—2003.—Т. 74, № 5.—С. 643–655.
9. *Левин А. Ю., Степанов Г. Д.* Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака, II // Сиб. мат. журн.—1976.—Т. 17, № 4.—С. 813–830.
10. *Тептин А. Л.* К вопросу об осцилляционности спектра многоточечной краевой задачи // Изв. вузов. Математика.—1999.—№ 4 (443).—С. 44–53.
11. *Покорный Ю. В.* О нулях функции Грина задачи Валле — Пуссена // Мат. сб.—2008.—Т. 199, № 6.—С. 105–136.
12. *Дерр В. Я.* К обобщенной задаче Валле Пуссена // Дифференц. уравнения.—1987.—Т. 23, № 11.—С. 1861–1872.
13. *Кулаев Р. Ч.* О знакорегулярности функции Грина для уравнения четвертого порядка // Диф. уравнения.—2013.—Т. 49, № 6.—С. 813–814.
14. *Ланкастер П.* Теория матриц.—М.: Наука, 1978.—280 с.
15. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.—М.: Наука, 1966.—576 с.
16. *Степанов Г. Д.* Эффективные критерии знакорегулярности и осцилляционности функции Грина двухточечных задач // Мат. сб.—1997.—Т. 188, № 11.—С. 121–159.
17. *Братусь А. С., Сейранян А. П.* Достаточные условия экстремума в задачах оптимизации собственных значений // Прикл. мат. и мех.—1984.—№ 4.—С. 657–667.
18. *Баничук Н. В.* Введение в оптимизацию конструкций.—М.: Наука, 1986.—304 с.
19. *Masur E. F.* Optimal structural design under multiple eigenvalue constraints // Int. J. Solids Struct.—1984.—Vol. 20, № 3.—P. 211–231.

Статья поступила 22 апреля 2013 г.

Кулаев Руслан Черменович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
старший научный сотрудник отдела функционального анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры математического анализа
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: `kulaev@smath.ru`

THE SOURCE FUNCTION OF THE CHAIN OF RODS WITH ELASTIC SUPPORTS

Kulaev R. Ch.

We consider a boundary value problem for a fourth-order equation modeling elastic deformations of a rod system with elastic supports. The Green's function of the boundary value problem with elastic supports expressed through the Green's function of the boundary value problem without supports.

Key words: fourth-order equation, discontinuous boundary value problem, Green's function.