Владикавказский математический журнал
2014, Том 16, Выпуск 3, С. 38–46

УДК **517.521**

БАЗИСНОСТЬ СИСТЕМЫ ХААРА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

М. Г. Магомед-Касумов

Найдены достаточные условия, при которых система Хаара образует базис в весовых пространствах Лебега с переменным показателем.

Ключевые слова: пространства Лебега с переменным показателем, весовые пространства, система Хаара, базисность, условие Макенхоупта, условие Дини — Липшица.

1. Введение

Пусть $p(x)$ — измеримая на E функция, такая что $1 \leqslant \underline{p}(E) \leqslant \overline{p}(E) < \infty$. Здесь и далее символами $\underline{p}(M)$, $\overline{p}(M)$ будем обозначать $\operatorname{ess\,inf}_{x\in M} p(x)$ и $\operatorname{ess\,sup}_{x\in M} p(x)$ соответственно. Пусть $w(x)$ — неотрицательная почти всюду (п. в.) положительная суммируемая функция (вес). Через $L_w^{p(x)} = L_w^{p(x)}(E)$ обозначим пространство измеримых функций $f(x)$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_E |f(x)|^{p(x)}\, w(x)\, dx < \infty.$$

Пространство $L_w^{p(x)}$ представляет собой линейное нормированное пространство, в котором одну из эквивалентных норм можно определить следующим равенством [1–3]:

$$\|f\|_{p(\cdot),w}(E) = \inf\left\{\lambda > 0 :\ \int\limits_E \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} w(x)\, dx \leqslant 1\right\}.$$

Отметим некоторые свойства, связанные с этими пространствами, которые понадобятся нам в дальнейшем.

1°. $\|f\|_{p(\cdot),w} = \left\|f\, w^{1/p(\cdot)}\right\|_{p(\cdot)}$.

2°. Для любых измеримых множеств $A \subset B$

$$\|f\|_{p(\cdot),w}(A) \leqslant \|f\|_{p(\cdot),w}(B),$$

так как

$$\int\limits_A \left|\frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot),w}(B)}\right|^{p(x)} w(x)\, dx \leqslant \int\limits_B \left|\frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot),w}(B)}\right|^{p(x)} w(x)\, dx = 1.$$

3°. Почти дословно повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве леммы в [4], можно показать, что если $1 \leqslant p(x) \leqslant q(x) \leqslant \overline{q}(E) < \infty$, то для любой функции $f \in L_w^{q(x)}(E)$

$$\|f\|_{p(\cdot),w} \leqslant r_{p,q}^w \|f\|_{q(\cdot),w},$$

где

$$r_{p,q}^w \leqslant \frac{1}{\underline{\alpha}} + \frac{\int_E w(x)\,dx}{\underline{\alpha^*}} \quad \left(\alpha(x) = \frac{q(x)}{p(x)},\ \alpha^*(x) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}\right).$$

4°. Если $p(x) > 1$, $x \in M$ (не исключая и случай, когда $\underline{p}(M) = 1$), то справедливо неравенство типа Гёльдера для пространств Лебега с переменным показателем [1, неравенство (8)]:

$$\int\limits_M |f(x)||g(x)|\,dx \leqslant C(p,M) \cdot \|f\|_{p(\cdot)}(M) \cdot \|g\|_{p'(\cdot)}(M),$$

где $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$, $C(p,M) \leqslant \frac{1}{\underline{p}(M)} + \frac{1}{\underline{p}'(M)}$. Через $C, C(\alpha), C(\alpha,\beta), \ldots$ здесь и далее будут обозначаться положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров, различные в разных местах.

Вопросы базисности классических ортогональных систем в пространствах Лебега с переменным показателем исследовались в статьях [4–8]. Отметим, что наиболее важные результаты в этих пространствах в безвесовом случае связаны с условием Дини — Липшица

$$|p(x) - p(y)| \ln \frac{1}{|x-y|} \leqslant C, \tag{1}$$

обнаруженным впервые в работах [4, 9]. В частности, в статье [4] было показано, что система Хаара образует базис в пространстве Лебега $L^{p(x)}([0,1])$ с переменным показателем $p(x)$ тогда и только тогда, когда $p(x)$ удовлетворяет условию (1). Аналогичный результат для двумерного случая был доказан в статье [8]. В упомянутых работах базисность системы Хаара рассматривалась относительно безвесовых пространств Лебега с переменным показателем. В данной работе исследуется этот вопрос для пространств Лебега $L_w^{p(x)}$ с весом $w(x)$, подчиняющимся определенным условиям (см. (12), (13)), одно из которых напоминает известное условие Макенхоупта [3, 10, 11]

$$\sup_{B \in \mathfrak{B}} \left(\frac{1}{|B|} \int\limits_B w(x)\,dx\right) \left(\frac{1}{|B|} \int\limits_B w(t)^{-\frac{1}{p_B - 1}}\,dt\right)^{p_B - 1} < \infty, \tag{2}$$

где $\mathfrak{B}$ — всевозможные интервалы, а $p_B = \left(\frac{1}{|B|}\int_B \frac{1}{p(x)}\,dx\right)^{-1}$ — среднее гармоническое p над B. Причина появления второго условия (см. (12)) связана с тем, что в нашем случае переменный показатель может также принимать и значения, равные 1.

2. Система Хаара в $L_w^{p(x)}$

Функции Хаара $\{\chi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ определяются на отрезке [0,1] следующим образом [12]:

$$\chi_1(x) = 1, \qquad \chi_k(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \overline{\Delta}_k, \\ 2^{j/2}, & x \in \Delta_k^+, \\ -2^{j/2}, & x \in \Delta_k^-, \end{cases}$$

где $k = 2^j + i, j = 0, 1, \ldots, i = 1, \ldots, 2^j$, а Δ_k — это двоичный интервал вида $\Delta_k = \Delta_j^i = \left(\frac{i-1}{2^j}, \frac{i}{2^j}\right)$, $\overline{\Delta}_k$ — замыкание интервала Δ_k, а Δ_k^+, Δ_k^- — соответственно правая и левая половины интервала Δ_k. Интервалы $\{\Delta_j^i\}_{i=1}^{2^j}$ называются интервалами j-й пачки.

Ясно, что $\chi_k \in L_w^{p(x)} = L_w^{p(x)}([0,1])$ для всякого суммируемого веса $w(x)$. Каждой функции $f \in L_w^{p(x)}$ мы хотим поставить в соответствие ряд Фурье — Хаара:

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, \chi_k, \tag{3}$$

где $c_k = \int_0^1 f(x)\chi_k(x)\,dx$. Однако не при всяком весе $w(x)$ для функции $f \in L_w^{p(x)}$ можно построить ряд Фурье. Поэтому на вес $w(x)$ требуется наложить дополнительные условия, при которых станет возможным вычисление коэффициентов, т. е.

$$\int_0^1 f(x)\,\chi_k(x)\,dx < \infty, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

При $k = 0$ получаем требование

$$\int_0^1 f(x)\,dx < \infty.$$

Другими словами, вес $w(x)$ должен быть таким, чтобы имело место вложение $L_w^{p(x)} \subset L^1$. Очевидно, что в этом случае будут выполнены неравенства в (4) и при $k > 0$.

Найдем условия на $w(x)$, достаточные для $f \in L^1([0,1])$. Для этого разобьем отрезок $E = [0,1]$ на множества $E_1 = \{x \mid p(x) = 1\}$, $E_2 = E \setminus E_1$. Тогда

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx. \tag{5}$$

На вопрос о существовании первого интеграла отвечает следующая лемма.

Лемма. *Функция $f \in L_w^{p(x)}(E)$ будет суммируемой на E_1 в том и только в том случае, если вес отграничен от нуля почти всюду на E_1:*

$$w(x) \geqslant C_1(w) > 0 \quad \textit{для почти всех} \quad x \in E_1. \tag{6}$$

$\lhd$ Достаточность сразу следует из соотношений

$$\int_{E_1} |f(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{C_1(w)} \int_{E_1} |f(x)| w(x)\,dx = \frac{1}{C_1(w)} \int_{E_1} |f(x)|^{p(x)} w(x)\,dx$$
$$\leqslant \frac{1}{C_1(w)} \int_E |f(x)|^{p(x)} w(x)\,dx < \infty.$$

Необходимость. Пусть

$$M_n = \left\{x \in E_1 : \, \frac{1}{n+1} \leqslant w(x) < \frac{1}{n}\right\}, \quad \mu_n = \mu(M_n),$$

где μ — мера Лебега. Предположим, что условие (6) не выполняется. Тогда можно считать, что $\mu_n > 0$ для любого n. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n\mu_n}, & x \in M_n, \\ 1, & x \in D = E \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n. \end{cases}$$

Покажем, что $f \in L_w^{p(x)}(E)$, но в то же время $f \notin L^1(E_1)$. Имеем

$$\int\limits_E |f(x)|^{p(x)}\, w(x)\, dx = \int\limits_D w(x)\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{M_n} \frac{1}{n\mu_n}\, w(x)\, dx.$$

Интеграл справа в равенстве выше в силу суммируемости функции $w(x)$ конечен. Рассмотрим сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{M_n} \frac{1}{n\mu_n}\, w(x)\, dx < \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{M_n} \frac{1}{n\mu_n}\, \frac{1}{n}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Таким образом, $f \in L_w^{p(x)}(E)$. С другой стороны, из соотношений

$$\int\limits_{E_1} |f(x)|\, dx \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{M_n} \frac{1}{n\mu_n}\, dx \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, dx = \infty$$

выводим, что $f \notin L_1(E_1)$. $\triangleright$

Легко показать, что при выполнении условия (6) будет справедливо следующее неравенство:

$$\int\limits_{E_1} |f(x)|\, dx \leqslant C(w) \|f\|_{p(\cdot),w}(E). \tag{7}$$

Действительно, достаточно воспользоваться свойством 2°:

$$\int\limits_{E_1} |f(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{C_1(w)} \int\limits_{E_1} |f(x)| w(x)\, dx = \frac{1}{C_1(w)} \|f\|_{p(\cdot),w}(E_1) \leqslant \frac{1}{C_1(w)} \|f\|_{p(\cdot),w}(E).$$

Перейдем теперь к рассмотрению второго интеграла из (5):

$$\int\limits_{E_2} |f(x)|\, dx = \int\limits_{E_2} [w(x)]^{\frac{1}{p(x)}} |f(x)| [w(x)]^{-\frac{1}{p(x)}}\, dx. \tag{8}$$

Применяя последовательно 4°, 1° и 2°, получим

$$\begin{gathered} \int\limits_{E_2} [w(x)]^{\frac{1}{p(x)}} |f(x)| [w(x)]^{-\frac{1}{p(x)}}\, dx \leqslant C(p) \cdot \big\| w^{\frac{1}{p(\cdot)}} f \big\|_{p(\cdot)}(E_2) \big\| w^{-\frac{1}{p(\cdot)}} \big\|_{p'(\cdot)}(E_2) \\ = C(p) \cdot \|f\|_{p(\cdot),w}(E_2) \big\| w^{-\frac{1}{p(\cdot)}} \big\|_{p'(\cdot)}(E_2) \leqslant C(p) \cdot \|f\|_{p(\cdot),w}(E) \big\| w^{-\frac{1}{p(\cdot)}} \big\|_{p'(\cdot)}(E_2). \end{gathered} \tag{9}$$

Из (8) и (9) приходим к неравенству:

$$\int\limits_{E_2} |f(x)|\, dx \leqslant C(p) \cdot \|f\|_{p(\cdot),w}(E) \cdot \big\| w^{-\frac{1}{p(\cdot)}} \big\|_{p'(\cdot)}(E_2). \tag{10}$$

Из полученного неравенства видно, что для суммируемости $f \in L^{p(x)}_w(E)$ на E_2 достаточно, чтобы

$$\left\|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\right\|_{p'(\cdot)}(E_2) < \infty.$$

Таким образом, получаем два условия на вес, которые обеспечивают существование рядов Фурье — Хаара в пространстве $L^{p(x)}_w(E)$:

1) $w(x) \geqslant C_1(w) > 0$, $x \in E_1$ (п. в.),

2) $\left\|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\right\|_{p'(\cdot)}(E_2) < \infty$.

Множество весовых функций $w(x)$, удовлетворяющих условиям 1) и 2), будем обозначать через $\mathscr{H}(E,p)$.

Отметим, что при выполнении условий 1) и 2) из (7) и (10) имеем

$$\int\limits_E |f(x)|\,dx \leqslant C(p,w)\cdot \|f\|_{p(\cdot),w}. \tag{11}$$

3. Основной результат

В предыдущем пункте было показано, что при условиях 1), 2) каждому элементу $f \in L^{p(x)}_w(E)$ можно поставить в соответствие ряд Фурье (3). Возникает вопрос о том, в каких случаях указанный ряд будет сходиться к самой функции f. Ответ на это дает приведенная в этом пункте теорема.

Введем некоторые обозначения. Через $\mathfrak{B}_\nu$ обозначим множество всех двоичных интервалов из пачек с номерами $j \geqslant \nu$, а через $\mathfrak{B}^{1,p}_\nu$ — такие двоичные интервалы $\Delta_k \in \mathfrak{B}_\nu$, что $\underline{p}(\Delta_k) = 1$:

$$\mathfrak{B}_\nu = \left\{\Delta^i_j:\ j \geqslant \nu, i = 1,\ldots,2^j\right\}, \quad \mathfrak{B}^{1,p}_\nu = \left\{\Delta_k \in \mathfrak{B}_\nu:\ \underline{p}(\Delta_k) = 1\right\}.$$

Множество измеримых на E функций $p(x) \geqslant 1$, удовлетворяющих условию (1), будем обозначать символом $\mathscr{P}^{\log}(E)$.

Теорема. *Пусть $p(x) \in \mathscr{P}^{\log}(E)$, $w(x) \in \mathscr{H}(E,p)$. Тогда система Хаара будет базисом пространства $L^{p(x)}_w(E)$, если для некоторого $\nu \geqslant 0$ выполняются следующие условия:*

$$\sup_{B\in\mathfrak{B}^{1,p}_\nu} \frac{1}{|B|}\int\limits_B w(x)\,dx < C(w), \tag{12}$$

$$\sup_{B\in\mathfrak{B}_\nu\setminus\mathfrak{B}^{1,p}_\nu} \left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B w(x)^{-\frac{1}{\underline{p}(B)-1}}\right)^{\underline{p}(B)-1} < C(p,w). \tag{13}$$

$\lhd$ Покажем, что для любой функции $f \in L^{p(x)}_w(E)$ последовательность частичных сумм

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n c_k\,\chi_k(x), \quad c_k = \int\limits_0^1 f(x)\,\chi_k(x)\,dx$$

сходится к функции f в метрике пространства $L^{p(x)}_w(E)$. Для этого, как известно [13, с. 215], достаточно показать выполнение следующих условий:

a) линейные операторы $S_n(f)$ равномерно ограничены на единичном шаре $\|f\|_{p(\cdot),w}\leqslant 1$ пространства $L_w^{p(x)}(E)$, т. е.

$$\sup_n \sup_{\|f\|_{p(\cdot),w}\leqslant 1} \|S_n(f)\|_{p(\cdot),w} < \infty; \tag{14}$$

b) последовательность линейных операторов $S_n(f)$ сходится к тождественному оператору $I(f)$ для любой функции $f \in \mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D}$ — некоторое множество, всюду плотное в $L_w^{p(x)}(E)$.

Условие b) следует из утверждения 1 книги [12, с. 71] и того факта, что множество $\mathfrak{D}$, состоящее из кусочно-гладких функций, постоянных на интервалах с двоично-рациональными концами, всюду плотно в $L_w^{p(x)}(E)$.

Покажем равномерную ограниченность. Пусть $f \in L_w^{p(x)}(E)$ и

$$\|f\|_{p(\cdot),w} \leqslant 1. \tag{15}$$

Напомним прежде, что для сумм Фурье — Хаара справедлива формула [14, с. 21]

$$S_n(f,x) = \frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int\limits_{\lambda_{ns}} f(t)\,dt, \quad x \in \lambda_{ns}, \tag{16}$$

где λ_{ns}, $s = 1,\dots,n$, — двоичные интервалы постоянства системы функций χ_k, $k = 1,\dots,n$ и

$$|\lambda_{ns}| = \begin{cases} \frac{1}{2^{j+1}}, & 1 \leqslant s \leqslant 2i,\\ \frac{1}{2^j}, & 2i+1 \leqslant s \leqslant n. \end{cases}$$

Формула (16) имеет смысл для любой функции $f \in L_w^{p(x)}$, поскольку для весов $w(x) \in \mathscr{H}(E,p)$, как было показано выше, имеет место вложение $L_w^{p(x)} \subset L_1$. Через p_s обозначим минимум $p(x)$ на замыкании интервала λ_{ns}. Тогда, используя (16), получаем

$$\begin{gathered}\mathfrak{I} = \int\limits_E |S_n(f,x)|^{p(x)} w(x)\,dx = \sum_{s=1}^n \int\limits_{\lambda_{ns}} |S_n(f,x)|^{p(x)} w(x)\,dx \\ = \sum_{s=1}^n \int\limits_{\lambda_{ns}} \left|\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int\limits_{\lambda_{ns}} f(t)\,dt\right|^{p(x)} w(x)\,dx = \sum_{s=1}^n \int\limits_{\lambda_{ns}} \left|\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int\limits_{\lambda_{ns}} f(t)\,dt\right|^{p(x)-p_s+p_s} w(x)\,dx.\end{gathered} \tag{17}$$

Применяя неравенства (11) и (15), выводим следующее соотношение:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int\limits_{\lambda_{ns}} f(t)\,dt\right|^{p(x)-p_s} &\leqslant \left(\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\right)^{p(x)-p_s} \left(\int\limits_E |f(t)|\,dt\right)^{p(x)-p_s} \\ &\leqslant \left(\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\right)^{p(x)-p_s} (C(p,w))^{p(x)-p_s}.\end{aligned}$$

Так как $p(x)$ удовлетворяет условию Дини — Липшица (1), то

$$\left(\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\right)^{p(x)-p_s} \leqslant \left(\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\right)^{\frac{C}{\ln\frac{1}{|\lambda_{ns}|}}} \leqslant C_1, \quad (C(p,w))^{p(x)-p_s} \leqslant C_2(p,w).$$

Следовательно,

$$\left|\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int\limits_{\lambda_{ns}} f(t)\,dt\right|^{p(x)-p_s} \leqslant C(p,w).$$

Подставляя найденную оценку в (17), получим

$$\begin{aligned}\mathfrak{I} &\leqslant C(p,w)\sum_{s=1}^{n}\int\limits_{\lambda_{ns}}\left|\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int\limits_{\lambda_{ns}} f(t)\,dt\right|^{p_s} w(x)\,dx\\ &= C(p,w)\sum_{s=1}^{n}\int\limits_{\lambda_{ns}} w(x)\,dx\cdot\left|\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int\limits_{\lambda_{ns}} f(t)\,dt\right|^{p_s}\\ &= C(p,w)\biggl(\sum_{s\in S_1}+\sum_{s\in S_2}\biggr) = C(p,w)(\mathfrak{S}_1+\mathfrak{S}_2),\end{aligned} \tag{18}$$

где $S_1=\{s:\,p_s=1\}$, $S_2=\{s:\,p_s>1\}$.

Воспользовавшись условием (12) и неравенствами (11), (15), приходим к следующей оценке для первой суммы:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_1 = \sum_{S_1}\int\limits_{\lambda_{ns}} w(x)\,dx\cdot\left|\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int\limits_{\lambda_{ns}} f(t)\,dt\right| \leqslant \sum_{S_1}\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int\limits_{\lambda_{ns}} w(x)\,dx\cdot\int\limits_{\lambda_{ns}}|f(t)|\,dt\\ \overset{(12)}{\leqslant} C(w)\sum_{S_1}\int\limits_{\lambda_{ns}}|f(t)|\,dt \leqslant C(w)\int\limits_{E}|f(t)|\,dt \overset{(11)}{\leqslant} C(w)\cdot C(p,w)\cdot\|f\|_{p(\cdot),w} \overset{(15)}{\leqslant} C_1(p,w).\end{aligned} \tag{19}$$

Покажем теперь ограниченность второй суммы:

$$\mathfrak{S}_2 = \sum_{S_2}\int\limits_{\lambda_{ns}} w(x)\,dx\cdot\left|\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int\limits_{\lambda_{ns}} f(t)\,dt\right|^{p_s}. \tag{20}$$

Для этого отдельно рассмотрим второй множитель под знаком суммы в (20). Применяя неравенство Гёльдера и замечая, что $\frac{p_s}{p_s'}=p_s-1$, получаем:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int\limits_{\lambda_{ns}} f(t)\,dt\right|^{p_s} &= \left|\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int\limits_{\lambda_{ns}}[w(t)]^{\frac{1}{p_s}}f(t)[w(t)]^{-\frac{1}{p_s}}\,dt\right|^{p_s}\\ &\leqslant \left|\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\biggl(\int\limits_{\lambda_{ns}} w(t)|f(t)|^{p_s}\,dt\biggr)^{\frac{1}{p_s}}\biggl(\int\limits_{\lambda_{ns}} w(t)^{-\frac{p_s'}{p_s}}\,dt\biggr)^{\frac{1}{p_s'}}\right|^{p_s}\\ &= \int\limits_{\lambda_{ns}} w(t)|f(t)|^{p_s}\,dt\cdot\frac{1}{|\lambda_{ns}|^{p_s}}\cdot\biggl(\int\limits_{\lambda_{ns}} w(t)^{-\frac{p_s'}{p_s}}\,dt\biggr)^{\frac{p_s}{p_s'}}\\ &= \int\limits_{\lambda_{ns}} w(t)|f(t)|^{p_s}\,dt\cdot\frac{1}{|\lambda_{ns}|^{p_s}}\cdot\biggl(\int\limits_{\lambda_{ns}} w(t)^{-\frac{1}{p_s-1}}\,dt\biggr)^{p_s-1}\\ &= \frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int\limits_{\lambda_{ns}} w(t)|f(t)|^{p_s}\,dt\cdot\biggl(\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int\limits_{\lambda_{ns}} w(t)^{-\frac{1}{p_s-1}}\,dt\biggr)^{p_s-1}.\end{aligned}$$

Учитывая полученное соотношение и условие (13), из (20) имеем:

$$\mathfrak{S}_2 \leqslant \sum_{S_2} \int\limits_{\lambda_{ns}} w(t)|f(t)|^{p_s}\,dt \cdot \left(\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int\limits_{\lambda_{ns}} w(x)\,dx\right)\cdot\left(\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int\limits_{\lambda_{ns}} w(t)^{-\frac{1}{p_s-1}}\,dt\right)^{p_s-1}$$
$$\leqslant C(p,w)\sum_{S_2}\int\limits_{\lambda_{ns}} w(t)|f(t)|^{p_s}\,dt.$$

Введем функцию $h(t) = p_s$, $t \in \lambda_{ns}$. Тогда, так как $h(t) \leqslant p(t)$, в силу свойства 3° и условия (15)

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_2 &\leqslant C(p,w)\sum_{S_2}\int\limits_{\lambda_{ns}} w(t)|f(t)|^{h(t)}\,dt \leqslant C(p,w)\int\limits_E w(t)|f(t)|^{h(t)}\,dt\\ &= C(p,w)\int\limits_E w(t)\|f\|^{h(t)}_{h(\cdot),w}\left|\frac{f(t)}{\|f\|_{h(\cdot),w}}\right|^{h(t)}dt\\ &\leqslant C(p,w)\int\limits_E w(t)(r^w_{h,p})^{h(t)}\|f\|^{h(t)}_{p(\cdot),w}\left|\frac{f(t)}{\|f\|_{h(\cdot),w}}\right|^{h(t)}dt\\ &\leqslant C(p,w)(r^w_{h,p})^{\overline{p}(E)}\int\limits_E w(t)\left|\frac{f(t)}{\|f\|_{h(\cdot),w}}\right|^{h(t)}dt = C(p,w)(r^w_{h,p})^{\overline{p}(E)}.\end{aligned} \tag{21}$$

Из (18), (19) и (21) следует равномерная ограниченность частичных сумм Фурье — Хаара на единичном шаре. ▷

Автор искренне благодарит И. И. Шарапудинова за плодотворные беседы, результатом которых явилась настоящая работа.

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$ // Мат. заметки.—1979.—Т. 26, № 4.—С. 613–632.
2. *Шарапудинов И. И.* Некоторые вопросы теории приближений в пространствах Лебега с переменным показателем.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012.—267 с.
3. *Diening L., Harjulehto P., Hasto P., Ruzicka M.* Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents.—Berlin: Springer, 2011.—509 p.
4. *Шарапудинов И. И.* О базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(t)}([0,1])$ и принципе локализации в среднем // Мат. сб.—1986.—Т. 130 (172), № 2 (6).—С. 275–283.
5. *Шарапудинов И. И.* Некоторые вопросы теории приближений в пространствах $L^{p(x)}$ // Anal. Math.—2007.—Vol. 33, № 2.—P. 135–153.
6. *Izuki M.* Wavelets and modular inequalities in variable L^p spaces // Georgian Math. J.—2008.—Vol. 15, № 2.—P. 281–293.
7. *Izuki M.* Wavelets and modular inequalities in variable L^p spaces.—2007.—(Preprint).
8. *Магомед-Касумов М. Г.* Сходимость прямоугольных сумм Фурье — Хаара в пространствах Лебега с переменным показателем $L^{p(x,y)}$ // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2013.—Т. 13, № 1 (2).—С. 76–81.
9. *Шарапудинов И. И.* О равномерной ограниченности в L^p $(p = p(x))$ некоторых семейств операторов свертки // Мат. заметки.—1996.—Т. 59, № 2.—С. 291–302.
10. *Diening L., Hasto P.* Muckenhoupt weights in variable exponent spaces.—2008.—(Preprint).
11. *Cruz-Uribe D., Diening L., Hasto P.* The maximal operator on weighted variable Lebesgue spaces // Fract. Calc. Appl. Anal.—2011.—Vol. 14, № 3.—P. 361–374.
12. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды.—М.: Изд-во АФЦ, 1999.—560 с.

13. *Вулих Б. З.* Введение в функциональный анализ.—М.: Наука, 1967.—416 с.
14. *Соболь И. М.* Многомерные квадратные формулы и функции Хаара.—М.: Наука, 1969.—288 с.

Статья поступила 25 июня 2013 г.

Магомед-Касумов Магомедрасул Грозбекович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
младший научный сотрудник отдела функционального анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: rasuldev@gmail.com

BASIS PROPERTY OF THE HAAR SYSTEM IN WEIGHTED VARIABLE EXPONENT LEBESGUE SPACES

Magomed-Kasumov M. G.

Sufficient conditions for Haar system to be a basis in weighted variable exponent Lebesgue spaces were found.

Key words: variable exponent Lebesgue spaces, weighted spaces, Haar system, basis property, Muckenhoupt condition, log-Holder condition.