Владикавказский математический журнал
2014, Том 16, Выпуск 4, С. 3–8

УДК **517.956**

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Алдашев

В работе показано, что задача Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений однозначно разрешима.

Ключевые слова: задача Дирихле, гиперболо-параболическое уравнение, цилиндрическая область, сферические функции.

Теория краевых задач для вырождающихся гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучена [1]. Насколько нам известно, их многомерные аналоги исследованы мало [2].

В данной работе для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений доказано, что задача Дирихле в цилиндрической области однозначно разрешима, а также получен критерий единственности регулярного решения.

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \dots, x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, Γ_β — части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_α — верхнее, а σ_β — нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S — общая часть границ областей Ω_α, Ω_β, представляющая множество $\{t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающиеся смешанные гиперболо-параболические уравнения

$$0 = \begin{cases} g(t)\Delta_x u - u_t, & t > 0, \\ p(t)\Delta_x u - u_{tt}, & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $g(t) > 0$ при $t > 0$, $g(0) = 0$, $g(t) \in C([0,\alpha])$, $\rho(t) > 0$ при $t < 0$, $p(0) = 0$, $p(t) \in C([\beta,0]) \cap C^2((\beta,0))$, а Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_m$, $m \geqslant 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \dots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t, r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \theta_i \leqslant \pi$, $i = 2, 3, \dots, m-1$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$.

Задача 1 (задача Дирихле). Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r,\theta), \quad u\big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta), \tag{2}$$

$$u\big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta), \quad u\big|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(r,\theta) \tag{3}$$

при этом $\varphi_1(1,\theta)=\psi_1(\alpha,\theta)$, $\psi_1(0,\theta)=\psi_2(0,\theta)$, $\varphi_2(1,\theta)=\psi_2(\beta,\theta)$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1\leqslant k\leqslant k_n$, $(m-2)!\,n!\,k_n=(n+m-3)!\,(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l=0,1,\ldots,$ — пространства Соболева.

Лемма 1 [3, с. 142]**.** *Пусть $f(r,\theta)\in W_2^l(S)$. Если $l\geqslant m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p\leqslant l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2 [3, с. 144]**.** *Для того чтобы $f(r,\theta)\in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам*

$$|f_0^1(r)|\leqslant c_1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}|f_n^k(r)|^2\leqslant c_2,\quad c_1,c_2=\mathrm{const}\,.$$

Через $\bar\varphi_{1n}^k(r)$, $\bar\varphi_{2n}^k(r)$, $\psi_{1n}^k(t)$, $\psi_{2n}^k(t)$ обозначим коэффициенты разложения функций $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$, $\psi_1(t,\theta)$, $\psi_2(t,\theta)$ в ряд вида (4) соответственно.

Теорема 1. *Если $\varphi_1(r,\theta),\varphi_2(r,\theta)\in W_2^l(S)$, $\psi_1(t,\theta)\in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t,\theta)\in W_2^l(\Gamma_\beta)$, $l>\frac{3m}{2}$ и*

$$\cos\mu_{s,n}\beta'\neq 0,\quad s=1,2,\ldots, \tag{5}$$

где $\mu_{s,n}$ — положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$, $\beta'=\int_\beta^0\sqrt{p(\xi)}\,d\xi$, то задача 1 однозначно разрешима.

$\lhd$ В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_α имеет вид

$$\begin{gathered} g(t)\left(u_{rr}+\frac{m-1}{r}\,u_r-\frac{1}{r^2}\,\delta u\right)-u_t=0,\\ \delta(\cdot)\equiv-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial(\cdot)}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial(\cdot)}{\partial\theta_j}\right),\\ g_1=1,\quad g_j=(\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{j-1})^2,\quad j>1. \end{gathered} \tag{6}$$

Известно [3, с. 144], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n=n(n+m-2)$, $n=0,1,\ldots,$ каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 в области Ω_α принадлежит классу $C(\overline{\Omega}_\alpha)\cap C^2(\Omega_\alpha)$, то его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar u_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{7}$$

где $\bar u_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (7) в (6), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [3], будем иметь

$$g(t)\left(\bar u_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar u_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar u_n^k\right)-\bar u_{nt}^k=0,\quad k=1,\ldots,k_n,\ \ n=0,1,\ldots, \tag{8}$$

при этом краевое условие (3), с учетом леммы 1, запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(r,\alpha)=\bar{\varphi}_{1n}^k(r),\quad \bar{u}_n^k(1,t)=\psi_{1n}^k(t),\quad k=1,\dots,k_n,\ \ n=0,1,\dots \tag{9}$$

В (8) и (9), произведя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)=\overline{u}_n^k(r,t)-\psi_{1n}^k(t)$, получим

$$g(t)\left(\bar{\upsilon}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{\upsilon}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\upsilon}_n^k\right)-\bar{\upsilon}_{nt}^k=\overline{f}_n^k(r,t), \tag{10}$$

$$\bar{\upsilon}_n^k(r,\alpha)=\varphi_{1n}^k(r),\quad \bar{\upsilon}_n^k(1,t)=0,\quad k=1,\dots,k_n,\ \ n=0,1,\dots, \tag{11}$$

$$\overline{f}_n^k(r,t)=\psi_{1nt}^k+\frac{\lambda_n g(t)}{r^2}\psi_{1n}^k,\quad \varphi_{1n}^k(r)=\overline{\varphi}_{1n}^k(r)-\psi_{1n}^k(\alpha).$$

Произведя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon_n^k(r,t)$, задачу (10), (11) приведем к следующей задаче

$$L\upsilon_n^k\equiv g(t)\left(\upsilon_{nrr}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_n^k\right)-\upsilon_{nt}^k=f_n^k(r,t), \tag{12}$$

$$\upsilon_n^k(r,\alpha)=\widetilde{\varphi}_{1n}^k(r),\quad \upsilon_n^k(1,t)=0, \tag{13}$$

$$\bar{\lambda}_n=\frac{((m-1)(3-m)-4\lambda_n)}{4},\quad f_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\overline{f}_n^k(r,t),\quad \widetilde{\varphi}_{1n}^k(r)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\varphi_{1n}^k(r).$$

Решение задачи (12), (13) ищем в виде $\upsilon_n^k(r,t)=\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t)$, где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k=f_n^k(r,t), \tag{14}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,\alpha)=0,\quad \upsilon_{1n}^k(1,t)=0, \tag{15}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k=0, \tag{16}$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,\alpha)=\widetilde{\varphi}_{1n}^k(r),\quad \upsilon_{2n}^k(1,t)=0. \tag{17}$$

Решение вышеуказанных задач, аналогично [4, с. 83], будем искать в виде

$$\upsilon_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}R_s(r)T_s(t), \tag{18}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{s,n}(t)R_s(r),\quad \tilde{\varphi}_{1n}^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{s,n}R_s(r). \tag{19}$$

Подставляя (18) в (14) и (15), с учетом (19) получим

$$R_{srr}+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}R_s+\mu R_s=0,\quad 0<r<1, \tag{20}$$

$$R_s(1)=0,\quad \left|R_s(0)\right|<\infty, \tag{21}$$

$$T_{st}+\mu g(t)T_s(t)=-a_{s,n}(t),\quad 0<t<\alpha, \tag{22}$$

$$T_s(\alpha)=0. \tag{23}$$

Ограниченным решением задачи (20), (21) является [5, с. 404]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{24}$$

где $\nu = \frac{n+(m-2)}{2}$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Решением задачи (22), (23) будет

$$T_{s,n}(t) = \left(\exp\left(-\mu_{s,n}^2 \int\limits_0^t g(\xi)\,d\xi \right) \right) \left(\int\limits_t^\alpha a_{s,n}(\xi) \left(\exp \mu_{s,n}^2 \int\limits_0^\xi g(\xi_1)\,d\xi_1 \right) d\xi \right). \tag{25}$$

Подставляя (24) в (19) получаем

$$r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty a_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^\infty b_{s,n} J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad 0 < r < 1. \tag{26}$$

Ряды (26) — разложения в ряды Фурье — Бесселя [6, с. 83], если

$$a_{s,n}(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi)\,d\xi, \tag{27}$$

$$b_{s,n} = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{1n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi)\,d\xi, \tag{28}$$

где $\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \ldots,$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величин.

Из (18), (24), (25) получим решение задачи (14), (15) в виде

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{29}$$

где $a_{s,n}^k(t)$ определяется из (27).

Далее, подставляя (18) в (16), (17), с учетом (19), получаем задачу

$$T_{st} + \mu_{s,n}^2 g(t) T_s = 0, \quad 0 < t < \alpha, \quad T_s(\alpha) = b_{s,n},$$

решением которой является

$$T_{s,n}(t) = b_{s,n} \exp\left(\mu_{s,n}^2 \int\limits_t^\alpha g(\xi)\,d\xi \right). \tag{30}$$

Из (24), (30) получим

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty b_{s,n} \sqrt{r} \left(\exp \mu_{s,n}^2 \int\limits_t^\alpha g(\xi)\,d\xi \right) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{31}$$

где $b_{s,n}$ находится из (28).

Следовательно, единственным решением задачи (1), (2) в области Ω_α является функция

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\psi_{2n}^k(t)+r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t)\right]\right\}Y_{n,m}^k(\theta), \tag{32}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (29), (31).

Учитывая формулу [6, с. 20] $2J'_\nu(z)=J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)$, оценки [3, с. 147] и [4, с. 654]

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right),\quad \nu\geqslant 0,$$

$$|k_n|\leqslant c_1 n^{m-2},\quad \left|\frac{\partial^l}{\partial\theta_j^l}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\leqslant c_2 n^{\frac{m}{2}-1+l},\quad j=1,\ldots,m-1,\ \ l=0,1,\ldots,$$

а также леммы 1 и 2, ограничения на заданные функции $\psi_1(t,\theta)$, $\varphi_1(r,\theta)$, можно показать, что полученное решение (32) принадлежит классу $C(\bar\Omega_\alpha)\cap C^2(\Omega_\alpha)$.

Далее, из (29)–(32) при $t\to+0$ имеем

$$u(r,\theta,0)=\tau(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\tau_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),$$

$$\tau_n^k(r)=\psi_{1n}^k(0)+\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{(2-m)}{2}}\left[\int_0^\alpha a_{s,n}(\xi)\left(\exp\mu_{s,n}^2\int_0^\xi g(\xi_1)\,d\xi_1\right)d\xi\right. \tag{33}$$
$$\left.+\,b_{s,n}\exp\left(\mu_{s,n}^2\int_0^\alpha g(\xi)\,d\xi\right)\right]J_{\nu+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n}r).$$

Из (27)–(29), (31), а также из лемм 1 и 2 вытекает, что $\tau(r,\theta)\in W_2^l(S)$, $l>\frac{3m}{2}$.

Таким образом, учитывая краевые условия (3) и (33), в области Ω_β приходим к задаче Дирихле для многомерного уравнения Чаплыгина

$$p(t)\Delta_x u-u_{tt}=0 \tag{34}$$

с краевыми условиями

$$u\big|_S=\tau(r,\theta),\quad u\big|_{\Gamma_\beta}=\psi_2(t,\theta),\quad u\big|_{\sigma_\beta}=\varphi_2(r,\theta). \tag{35}$$

Таким образом, справедливость теоремы 1 следует из теоремы 2, доказанной в [7, 8]. $\triangleright$

Теорема 2. *Если* $\tau(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)\in W_2^l(S)$, $\psi_2(t,\theta)\in W_2^l(\Gamma_\beta)$, $l>\frac{3m}{2}$ *и выполняется соотношение* (5), *то задача* (34), (35) *в классе* $C(\bar\Omega_\beta)\cap C^2(\Omega_\beta)$ *однозначно разрешима.*

Литература

1. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнения в частных производных.—М.: Наука, 2006.—287 с.
2. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики.—Новосибирск: НГУ, 1983.—84 с.
3. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.—М.: Физматгиз, 1962.—254 с.

4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.—М: Наука, 1966.—724 с.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.—М.: Наука, 1965.—703 с.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2.—М.: Наука, 1974.—297 с.
7. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Чаплыгина // Владикавк. мат. журн.—2013.—Т. 15, № 2.—С. 3–10.
8. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина // Научные ведомости БелГУ. Математика и физика.—2012.—№ 5 (124), вып. 26.—С. 12–25.

Статья поступила 19 марта 2012 г.

Алдашев Серик Аймурзаевич,
Казахский национальный педагогический университет им. Абая,
зав. кафедрой фундаментальной и прикладной математики
КАЗАХСТАН, 480100, г. Алматы, пр. Достык, 114
E-mail: aldash51@mail.ru

CORRECTNESS OF DIRICHLET PROBLEM FOR DEGENERATING MULTI-DIMENSIONAL HYPERBOLIC-PARABOLIC EGUATIONS

Aldashev S. A.

Unique solbability to Dirichlet's problem in the cylindrical domain for degenerated multidimensional hyperbolic-parabolic equation is shown in the article.

Key words: Hyperbolic-parabolic equation, Dirichlet's problem, cylindrical domain, spherical harmonic.