Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 2, С. 56–61

УДК **512.544.2**

О НАДГРУППАХ УНИПОТЕНТНОЙ ПОДГРУППЫ ГРУППЫ ШЕВАЛЛЕ РАНГА 2 НАД ПОЛЕМ

Я. Н. Нужин, Т. А. Осетрова

Посвящается шестидесятилетию
Владимира Амурхановича Койбаева

Описаны подгруппы группы Шевалле ранга 2 над полем, содержащие ее унипотентную подгруппу.

Ключевые слова: группа Шевалле над полем, унипотентная подгруппа.

Далее Φ — приведенная неразложимая система корней, $\Pi = \{r_1, \dots, r_l\}$ — множество ее фундаментальных корней, Φ^+ — множество положительных корней относительно Π. Пусть $\Phi(F)$ — группа Шевалле типа Φ ранга l над полем F. Группа $\Phi(F)$ порождается корневыми подгруппами

$$X_r = \{x_r(t) : t \in F\}, \quad r \in \Phi,$$

где $x_r(t)$ — соответствующий корневой элемент в группе $\Phi(F)$. Нам потребуются следующие естественные подгруппы группы $\Phi(F)$:

унипотентная подгруппа

$$U = \langle X_r : r \in \Phi^+ \rangle,$$

мономиальная подгруппа

$$N = \langle n_r(t) : r \in \Phi, t \in F^* \rangle,$$

диагональная подгруппа

$$H = \langle h_r(t) : r \in \Phi, t \in F^* \rangle \text{ и}$$

борелевская подгруппа

$$B = UH.$$

Здесь $\langle M \rangle$ — подгруппа, порожденная множеством M, F^* — мультипликативная группа поля F и

$$n_r(t) = x_r(t)\, x_{-r}(-t^{-1})\, x_r(t),$$
$$h_r(t) = n_r(t)\, n_r(-1).$$

Положим также

$$n_r = n_r(1),$$
$$I = \{1, 2, \dots, l\}.$$

Надгруппы борелевской подгруппы B и сопряженные с ними называются параболическими. В силу известного результата Ж. Титса параболические подгруппы, содержащие подгруппу B, исчерпываются подгруппами P_J, $J \subseteq I$, где

$$P_J = \langle B, n_{r_j} :\ j \in J \rangle.$$

Используя только каноническое разложение элементов группы Шевалле над полем, получен следующий частичный результат.

Теорема 1. *Пусть M — подгруппа группы Шевалле $\Phi(F)$ ранга 2 над полем, содержащая унипотентную подгруппу U. Тогда для подходящей диагональной подгруппы $H_M \leqslant H$ и некоторого подмножества $J \subseteq I$ подгруппа M совпадает с группой*

$$P_{J,M} = \langle U, n_{r_j}, H_M :\ j \in J \rangle.$$

Авторы предполагают, что аналог теоремы 1 справедлив для всех групп лиева типа над полями. Для группы Шевалле типа A_l это следует из результатов статьи Д. А. Супруненко [1], в которой описаны надгруппы унитреугольной подгруппы общей линейной группы над произвольным телом.

1. Обозначения и предварительные результаты

Все обозначения и определения, указанные во введении, используются и далее. Запись $A \leqslant B$ означает, что A есть подгруппа группы B.

Через $N^{\pm}$ обозначим подгруппу порожденную мономиальными элементами

$$n_r = n_r(1) = x_r(1)\, x_{-r}(-1)\, x_r(1), \quad r \in \Phi,$$

а через $H^{\pm}$ обозначим подгруппу порожденную диагональными элементами

$$h_r(-1) = n_r^2, \quad r \in \Phi.$$

Ясно, что $N = HN^{\pm} = N^{\pm}H$. Следующие равенства обычно называются разложениями Брюа

$$\Phi(F) = BNB = UNU = UHN^{\pm}U = UN^{\pm}HU.$$

Таким образом, любой элемент $g \in \Phi(F)$ представляется в виде

$$g = u_1 n h u_2, \quad \text{где } u_1, u_2 \in U,\ n \in N^{\pm},\ h \in H. \tag{1}$$

Лемма 1. *Пусть Π — база системы корней Φ. Тогда группа Шевалле $\Phi(F)$ над полем F порождается корневыми подгруппами X_r, $r \in \Pi \cup -\Pi$.*

$\lhd$ Пусть $G = \langle X_r :\ r \in \Pi \cup -\Pi \rangle$. Тогда подгруппа $\langle n_r :\ r \in \Pi \rangle$ лежит в G и совпадает с $N^{\pm}$, так как фактор-группа $N^{\pm}/H^{\pm}$ изоморфна группе Вейля W типа Φ, которая порождается фундаментальными отражениями w_r, $r \in \Pi$. Группа $N^{\pm}$ действует сопряжениями транзитивно на корневых подгруппах, индексированных корнями одинаковой длины, по правилу:

$$n_w X_r n_w^{-1} = X_{w(r)},$$

где n_w — прообраз элемента w группы Вейля W при гомоморфизме $N^{\pm}$ на W. Таким образом, G содержит все корневые подгруппы X_r и, следовательно, совпадает со всей группой Шевалле $\Phi(F)$. $\rhd$

Положим $\Phi^- = -\Phi^+$ и $V = \langle X_r : \ r \in \Phi^- \rangle$.

Лемма 2. *Пусть M — подгруппа группы Шевалле $\Phi(F)$ ранга 2 над полем F, содержащая унипотентную подгруппу $U = \langle X_r : \ r \in \Phi^+ \rangle$. Тогда, если корневые элементы $x_r(1)$ и $x_s(1)$ лежат в M для $r, s \in \Phi^-$ таких, что либо $\{r, s\}$, либо $\{r, -s\}$ есть база системы корней Φ, то $M = \Phi(F)$.*

$\lhd$ Из предположений леммы следует, что для некоторой базы $\{r, s\}$ системы корней Φ в M лежит подгруппа $\langle n_r, n_s \rangle$, которая совпадает с $N^{\pm}$. Так как группа $N^{\pm}$ действует сопряжениями транзитивно на корневых подгруппах, индексированных корнями одинаковой длины, и $U \leqslant M$, то и $V \leqslant M$. Отсюда $M = \Phi(F)$. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 1. Пусть $\{a, b\}$ — база системы корней Φ ранга 2, причем a — короткий корень. Переформулируем теорему 1 в следующем более удобном для доказательства виде.

Если подгруппа M группы Шевалле $\Phi(F)$ ранга 2 над полем F содержит унипотентную подгруппу U, то либо $M = \Phi(F)$, либо M совпадает с одной из собственных подгрупп $\langle U, H_M \rangle$, $\langle U, n_a, H_M \rangle$ или $\langle U, n_b, H_M \rangle$ для подходящей диагональной подгруппы $H_M \leqslant H$.

Если элемент g вида (1) лежит в M, то $nh \in M$ и, следовательно,

$$nhX_rh^{-1}n^{-1} = nX_rn^{-1} \leqslant M \quad \text{для всех } r \in \Phi^+. \tag{2}$$

Далее каждый из трех типов A_2, B_2, G_2 системы корней ранга 2 рассматривается отдельно.

Тип A_2. В этом случае $U = X_aX_bX_{a+b}$ и так как группа Вейля типа A_2 есть диэдральная группа порядка 6, то для элемента n из представления (1) возможны следующие шесть случаев: 1) $n = 1$; 2) $n = n_a$; 3) $n = n_b$; 4) $n = n_{a+b}$; 5) $n = n_an_b$; 6) $n = n_bn_a$.

Предположим, что для всех элементов g подгруппы M, не лежащих в подгруппе U, возможен только один из перечисленных выше шести случаев для элемента n из представления элемента g в виде (1).

1) В этом случае, очевидно, $M = \langle U, H_M \rangle$ для некоторой подгруппы $H_M \leqslant H$.

2) В силу (2)

$$nUn^{-1} = n_aX_aX_bX_{a+b}n_a^{-1} = X_{-a}X_{a+b}X_b \leqslant M.$$

Следовательно, $M = \langle U, n_a, H_M \rangle$ для некоторой подгруппы $H_M \leqslant H$.

3) Аналогично предыдущему случаю

$$nUn^{-1} = n_bX_aX_bX_{a+b}n_b^{-1} = X_{a+b}X_{-b}X_a \leqslant M.$$

Следовательно, $M = \langle U, n_b, H_M \rangle$ для некоторой подгруппы $H_M \leqslant H$.

4) В силу (2)

$$nUn^{-1} = n_{a+b}X_aX_bX_{a+b}n_{a+b}^{-1} = X_{-b}X_{-a}X_{-a-b} = V \leqslant M.$$

Следовательно, $M = \Phi(F)$.

5) В этом случае в силу (2)

$$nX_bn^{-1} = n_an_bX_bn_b^{-1}n_a^{-1} = X_{-a-b} \leqslant M,$$

$$nX_{a+b}n^{-1} = n_an_bX_{a+b}n_b^{-1}n_a^{-1} = X_{-a} \leqslant M.$$

Так как $\{-a-b, a\}$ — база системы корней типа A_2, то по лемме 2 $M = \Phi(F)$.

Случай 6) подобен случаю 5), так как $n_b n_a = n_a n_b h$ для некоторого $h \in H^{\pm}$.

Если в M есть два элемента g_1 и g_2, в представлении (1) которых элемент n такой как в случае 2) и 3) соответственно, то $X_{-a}, X_{-b} \leqslant M$ и по лемме 1 $M = \Phi(F)$.

Таким образом, для типа A_2 теорема 1 доказана.

Тип B_2. В этом случае $U = X_a X_b X_{a+b} X_{2a+b}$ и так как группа Вейля типа B_2 есть диэдральная группа порядка 8, то для элемента n из представления (1) возможны следующие восемь случаев: 1) $n = 1$; 2) $n = n_a$; 3) $n = n_b$; 4) $n = n_a n_b$; 5) $n = n_b n_a$; 6) $n = n_{a+b}$; 7) $n = n_{2a+b}$; 8) $n = n_a n_{a+b}$.

Предположим, что для всех элементов g подгруппы M, не лежащих в подгруппе U, возможен только один из перечисленных выше восьми случаев для элемента n из представления элемента g в виде (1).

1) В этом случае, очевидно, $M = \langle U, H_M \rangle$ для некоторой подгруппы $H_M \leqslant H$.

2) Так же как и для типа A_2 в этом случае $M = \langle U, n_a, H_M \rangle$ для некоторой подгруппы $H_M \leqslant H$.

3) Аналогично предыдущему случаю $M = \langle U, n_b, H_M \rangle$ для некоторой подгруппы $H_M \leqslant H$.

4) В силу (2)

$$nX_b n^{-1} = n_a n_b X_b n_b^{-1} n_a^{-1} = X_{-2a-b} \leqslant M,$$

$$nX_{a+b} n^{-1} = n_a n_b X_{a+b} n_b^{-1} n_a^{-1} = X_{-a} \leqslant M.$$

Так как $\{-2a-b, a\}$ — база системы корней типа B_2, то по лемме 2 $M = \Phi(F)$.

Случай 5) подобен случаю 4), так как $n_b n_a = n_a n_b h$ для некоторого $h \in H^{\pm}$.

6) В силу (2)

$$nX_b n^{-1} = n_{a+b} X_b n_{a+b}^{-1} = X_{-2a-b} \leqslant M,$$

$$nX_{a+b} n^{-1} = n_{a+b} X_{a+b} n_{a+b}^{-1} = X_{-a-b} \leqslant M.$$

Так как $\{-2a-b, a+b\}$ — база системы корней типа B_2, то по лемме 2 $M = \Phi(F)$.

7) В силу (2)

$$nX_a n^{-1} = n_{2a+b} X_a n_{2a+b}^{-1} = X_{-a-b} \leqslant M,$$

$$nX_{2a+b} n^{-1} = n_{2a+b} X_{2a+b} n_{2a+b}^{-1} = X_{-2a-b} \leqslant M.$$

Так как $\{-2a-b, a+b\}$ — база системы корней типа B_2, то по лемме 2 $M = \Phi(F)$.

В случае 8) $nUn^{-1} = n_a n_{a+b} U n_{a+b}^{-1} n_a^{-1} = V \leqslant M$ и, следовательно, $M = \Phi(F)$.

Если в M есть два элемента g_1 и g_2, в представлении (1) которых элемент n такой как в случае 2) и 3) соответственно, то $X_{-a}, X_{-b} \leqslant M$ и по лемме 1 $M = \Phi(F)$.

Таким образом, для типа B_2 теорема 1 доказана.

Тип G_2. В этом случае $U = X_a X_b X_{a+b} X_{2a+b} X_{3a+b} X_{3a+2b}$ и так как группа Вейля типа G_2 есть диэдральная группа порядка 12, то для элемента n из представления (1) возможны следующие 12 случаев:

1) $n = n_a n_b$;
2) $n = (n_a n_b)^2 = n_a n_{a+b}$;
3) $n = (n_a n_b)^3 = (n_a n_{a+b}) n_a n_b = n_{2a+b} n_b$;
4) $n = (n_a n_b)^4 = (n_a n_b)^{-2} = n_{a+b} n_a$;
5) $n = (n_a n_b)^5 = (n_a n_b)^{-1} = n_b n_a$;
6) $n = (n_a n_b)^6 = 1$;
7) $n = (n_a n_b) n_b = n_a$;
8) $n = (n_a n_{a+b}) n_b = n_a n_b n_a = n_{3a+b}$;
9) $n = (n_{2a+b} n_b) n_b = n_{2a+b}$;

10) $n = (n_{a+b}n_a)n_b = n_{a+b}n_bn_{a+b} = n_{3a+2b}$;

11) $n = (n_bn_a)n_b = n_{a+b}$;

12) $n = n_b$.

Здесь последние шесть случаев получены соответственно из первых шести умножением на элемент n_b, причем равенства в этих 12 случаях выполняются по модулю диагональных элементов из подгруппы $H^{\pm}$.

Предположим, что для всех элементов g подгруппы M, не лежащих в подгруппе U, возможен только один из перечисленных выше 12 случаев для элемента n из представления элемента g в виде (1).

1) В силу (2)

$$nX_bn^{-1} = n_an_bX_bn_b^{-1}n_a^{-1} = X_{-3a-b} \leqslant M,$$

$$nX_{a+b}n^{-1} = n_an_bX_{a+b}n_b^{-1}n_a^{-1}.$$

Так как $\{-3a-b, a\}$ — база системы корней типа G_2, то по лемме 2 $M = \Phi(F)$.

2) В силу (2)

$$nX_{a+b}n^{-1} = n_an_{a+b}X_{a+b}n_{a+b}^{-1}n_a^{-1} = X_{-2a-b} \leqslant M,$$

$$nX_bn^{-1} = n_an_{a+b}X_bn_{a+b}^{-1}n_a^{-1} = X_{-3a-2b} \leqslant M.$$

Так как $\{-3a-2b, 2a+b\}$ — база системы корней типа G_2, то по лемме 2 $M = \Phi(F)$.

В случае 3) $nUn^{-1} = n_{2a+b}n_bUn_b^{-1}n_{2a+b}^{-1} = V \leqslant M$ и, следовательно, $M = \Phi(F)$.

Случай 4) подобен случаю 2), так как $n_{a+b}n_a = n_an_{a+b}h$ для некоторого $h \in H^{\pm}$.

Случай 5) подобен случаю 1), так как $n_bn_a = n_an_bh$ для некоторого $h \in H^{\pm}$.

6) В этом случае, очевидно, $M = \langle U, H_M\rangle$ для некоторой подгруппы $H_M \leqslant H$.

7) Так же как и для типа A_2 в этом случае $M = \langle U, n_a, H_M\rangle$ для некоторой подгруппы $H_M \leqslant H$.

8) В силу (2)

$$nX_{2a+b}n^{-1} = n_{3a+b}X_{2a+b}n_{3a+b}^{-1} = X_{-a} \leqslant M,$$

$$nX_{3a+b}n^{-1} = n_{3a+b}X_{3a+b}n_{3a+b}^{-1} = X_{-3a-b} \leqslant M.$$

Так как $\{-3a-b, a\}$ — база системы корней типа G_2, то по лемме 2 $M = \Phi(F)$.

9) В силу (2)

$$nX_an^{-1} = n_{2a+b}X_an_{2a+b}^{-1} = X_{-a-b} \leqslant M,$$

$$nX_{3a+b}n^{-1} = n_{2a+b}X_{3a+b}n_{2a+b}^{-1} = X_{-3a-2b} \leqslant M.$$

Так как $\{-3a-2b, a+b\}$ — база системы корней типа G_2, то по лемме 2 $M = \Phi(F)$.

10) В силу (2)

$$nX_bn^{-1} = n_{3a+2b}X_bn_{3a+2b}^{-1} = X_{-3a-b} \leqslant M,$$

$$nX_{a+b}n^{-1} = n_{3a+2b}X_{a+b}n_{3a+2b}^{-1} = X_{-2a-b} \leqslant M.$$

Так как $\{-3a-b, 2a+b\}$ — база системы корней типа G_2, то по лемме 2 $M = \Phi(F)$.

11) В силу (2)

$$nX_bn^{-1} = n_{a+b}X_bn_{a+b}^{-1} = X_{-3a-2b} \leqslant M,$$

$$nX_{a+b}n^{-1} = n_{a+b}X_{a+b}n_{a+b}^{-1} = X_{-a-b} \leqslant M.$$

Так как $\{-3a-2b, a+b\}$ — база системы корней типа G_2, то по лемме 2 $M = \Phi(F)$.

12) Так же как и для типа A_2 в этом случае $M = \langle U, n_b, H_M\rangle$ для некоторой подгруппы $H_M \leqslant H$.

Если в M есть два элемента g_1 и g_2, в представлении (1) которых элемент n такой как в случае 7) и 12) соответственно, то $X_{-a}, X_{-b} \leqslant M$ и по лемме 1 $M = \Phi(F)$.

Таким образом, для типа G_2, а следовательно, и в полном объеме теорема 1 доказана. $\triangleright$

Литература

1. *Супруненко Д. А.* Подгруппы полной линейной группы над телом D, содержащие группу всех специальных треугольных матриц $U(n, D)$ // Докл. АН БССР.—1970.—Т. 14, № 4.—С. 305–308.

Статья поступила 20 апреля 2015 г.

Нужин Яков Нифантьевич
Сибирский федеральный университет, *профессор*
РОССИЯ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: nuzhin2008@rambler.ru

Осетрова Татьяна Александровна
Сибирский федеральный университет, *доцент*
РОССИЯ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: ota53@mail.ru

ON OVERGROUPS OF THE UNIPOTENT SUBGROUP OF THE CHEVALLEY GROUP OF RANK 2 OVER A FIELD

Nuzhin Ya. N., Osetrova T. A.

Subgroups of the Chevalley group of rank 2 containing its unipotent subgroup are described.

Key words: Chevalley group over a field, unipotent subgroup.