Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 3, С. 14–22

УДК **517.9**

ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ С ГЛАДКИМИ ВЕСОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ И ВОЗМУЩЕНИЕМ

А. Х. Бегматов, Г. М. Джайков

Изучаются две задачи интегральной геометрии в полосе на семействе отрезков прямых с заданной весовой функцией. Первая задача — восстановление функции в полосе, если всюду в этой полосе известны интегралы от искомой функции с линейной весовой функцией на семействе отрезков прямых. Доказаны теорема единственности и теорема существования решения задачи, получено аналитическое представление решения в классе гладких финитных функций. Представлена оценка решения задачи в соболевских пространствах, откуда следует ее слабая некорректность. Теорема единственности и оценка устойчивости получены и для задачи с возмущением, весовая функция которой имеет достаточно общий вид. Вторая задача — восстановления функции по интегральным данным на семействе отрезков прямых с весовой функцией экспоненциального вида. Доказаны теорема единственности, теорема существования решения. Построено простое представление решения рассмотренной задачи интегральной геометрии в классе гладких финитных функций. Получена оценка устойчивости решения задачи в пространствах Соболева, тем самым показана слабая некорректность задачи. Далее рассматривается соответствующая задача интегральной геометрии с возмущением. Получены теорема единственности ее решения в классе гладких финитных функций с носителем в полосе и оценка устойчивости решения в соболевских пространствах.

Ключевые слова: интегральная геометрия, преобразование Радона, преобразование Фурье, преобразование Лапласа, формула обращения, оценки устойчивости, единственность решения, теорема существования, слабая некорректность, возмущение.

1. Введение

В работе рассматриваются вопросы существования и единственности, получения оценок устойчивости и аналитических формул обращения для новых классов задач интегральной геометрии в полосе. Доказаны теоремы единственности и существования решения задач интегральной геометрии на семействе отрезков прямых в классе гладких финитных функций с носителем в полосе. Получены явные формулы обращения, из которых вытекают утверждения о слабой некорректности решения задачи. Далее рассматривается задача интегральной геометрии с возмущением. Доказаны теорема единственности и получены оценки устойчивости ее решения в классе гладких финитных функций с носителем в полосе.

Вопросы единственности решения плоской задачи интегральной геометрии на семействе парабол с возмущением рассматривались в статье [1]. В [2, 3] изучены задачи интегральной геометрии в трехмерном слое на семействе параболоидов с возмущением. В [4] рассмотрены задачи интегральной геометрии на плоскости, которые тесно связаны с задачей Радона с возмущением.

В [5] приводится теорема единственности решения задачи интегральной геометрии на кривых эллиптического типа в классе гладких финитных функций с носителем в полосе. В работе [5, 6] получено аналитическое представление для образа Фурье по первой переменной от искомой функции, из которого вытекает утверждение о сильной некорректности решения задачи. Важные результаты по обращению преобразования Радона и приложениям в сейсмической и компьютерной томографии представлены в [7–9]. Задача восстановления функции по известным интегралам от нее на семействе конусов в случае пространства четной размерности изучалась в статье [10]. В работах [11, 12] рассматривались новые постановки слабо некорректных задач интегральной геометрии на параболических кривых со специальными весовыми функциями.

Обозначим $\Omega = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^1, 0 \leqslant y \leqslant H\}$. Для всех (x, y), лежащих в полосе Ω, рассмотрим систему отрезков $\{\Upsilon(x, y)\}$:

$$\Upsilon(x, y) = \{(\xi, \eta) : \ x - \xi = y - \eta, \ 0 \leqslant \eta \leqslant y \leqslant H\}.$$

Обозначим через $C_0^2(\Omega)$ класс функций $u(x, y)$, которые имеют все непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно и финитны с носителем в полосе Ω.

2. Задача интегральной геометрии

Задача 1. Восстановить функцию двух переменных $u(x, y)$ в полосе Ω, если известны интегралы от нее по отрезкам прямых из семейства $\{\Upsilon(x, y)\}$ с весовой функцией $g(x, y, \xi, \eta)$:

$$\int\limits_{\Upsilon(x,y)} g(x, y, \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi = f(x, y).$$

Задача решения этого уравнения есть задача интегральной геометрии вольтерровского типа (см. [13–15]).

Теорема 1. *Пусть функция $f(x, y)$ известна всюду в полосе Ω, весовая функция $g(x, y, \xi, \eta)$ имеет вид $g_1(x, \xi) = x - \xi$. Тогда решение задачи 1 в классе $C_0^2(\Omega)$ единственно, имеет место представление*

$$u(x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x, y) \tag{1}$$

и выполняется неравенство

$$\|u(x, y)\|_{L_2} \leqslant C_1 \|f(x, y)\|_{W_2^{2,2}}, \tag{2}$$

где C_1 — некоторая константа.

$\lhd$ Запишем задачу 1 для весовой функции $g_1(x, \xi)$ в следующем виде:

$$\int\limits_0^y u(x - h, \eta)(y - \eta)\, d\eta = f(x, y), \tag{3}$$

где $h = y - \eta$.

Применим к обеим частям уравнения (3) преобразование Фурье по переменной x:

$$\hat{f}(\lambda, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \int\limits_{0}^{y} u(x-h, \eta)(y-\eta)\, d\eta\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{y} (y-\eta)\, e^{i\lambda h} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(x-h)} u(x-h, \eta)\, dx\, d\eta,$$

$$\int\limits_{0}^{y} \hat{u}(\lambda, \eta)(y-\eta)\, e^{i\lambda(y-\eta)}\, d\eta = \hat{f}(\lambda, y). \tag{4}$$

Через $\hat{u}(\lambda, y)$, $\hat{f}(\lambda, y)$ обозначены преобразования Фурье по переменной x от функций $u(x, y)$ и $f(x, y)$ соответственно. Применим к последнему уравнению преобразование Лапласа по переменной y:

$$\tilde{\hat{f}}(\lambda, p) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-py} \int\limits_{0}^{y} \hat{u}(\lambda, \eta)(y-\eta)\, e^{i\lambda(y-\eta)}\, d\eta\, dy$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} \tau \cdot e^{-(p-i\lambda)\tau} d\tau \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} \hat{u}(\lambda, \eta)\, e^{-p\eta} d\eta = I(\lambda, p) \cdot \tilde{\hat{u}}(\lambda, p),$$

$$I(\lambda, p) = \int\limits_{0}^{+\infty} \tau \cdot e^{-(p-i\lambda)\tau}\, d\tau = \frac{1}{(p-i\lambda)^2}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \tag{5}$$

Отсюда следует выражение

$$\tilde{\hat{u}}(\lambda, p) = \left(p^2 - 2pi\lambda - \lambda^2\right) \tilde{\hat{f}}(\lambda, p), \tag{6}$$

где $\tilde{\hat{u}}(\lambda, p)$ и $\tilde{\hat{f}}(\lambda, p)$ — преобразование Лапласа по переменной y от функций $\hat{u}(\lambda, y)$ и $\hat{f}(\lambda, y)$ соответственно.

Применив к обеим частям (6) обратное преобразование Лапласа по переменной p, получим

$$\hat{u}(\lambda, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2i\lambda \frac{\partial}{\partial y} - \lambda^2\right) \hat{f}(\lambda, y). \tag{7}$$

Применим к (7) обратное преобразование Фурье по λ. Исходя из известных свойств преобразований Фурье, получим

$$u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) + 2\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y). \tag{8}$$

Для доказательства неравенств (2) перепишем уравнение (8) в виде (9):

$$\|u(x, y)\|_{L_2} = \left\| \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \right\|_{L_2}. \tag{9}$$

Используя свойства дифференцирования преобразований Фурье и Лапласа, неравенство треугольника для норм, а также учитывая (9) и условия, наложенные на функцию $u\,(x,y)$, получим оценку

$$\|u\,(x,y)\|_{L_2} \leqslant C_1 \|f\,(x,y)\|_{W_2^{2,\,2}}. \ \triangleright$$

Теорема 2. *Пусть функция $f\,(x,y)$ известна всюду в полосе Ω, весовая функция $g\,(x,y,\xi,\eta)$ имеет вид $g_2\,(x,\xi) = e^{-(x-\xi)}$. Тогда решение задачи 1 в классе $C_0^1\,(\Omega)$ единственно, имеет место представление*

$$u\,(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f\,(x,y) + \frac{\partial}{\partial x} f\,(x,\,y) + f\,(x,y)\,, \tag{10}$$

и выполняется неравенство

$$\|u\,(x,y)\|_{L_2} \leqslant C_2 \|f\,(x,y)\|_{W_2^{1,\,1}}, \tag{11}$$

где C_2 — некоторая константа.

$\triangleleft$ Запишем задачу 1 для весовой функции $g_2\,(x,\xi)$ в виде

$$\int\limits_0^y u\,(x-h,\eta)\, e^{-(y-\eta)} d\eta = f\,(x,y)\,. \tag{12}$$

Применив к (12) преобразование Фурье по x, получим

$$\hat{f}\,(\lambda,\,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \int\limits_0^y u\,(x-h,\eta)\, e^{-(y-\eta)}\, d\eta\, dx,$$

$$\int\limits_0^y \hat{u}\,(\lambda,\eta)\, e^{i\lambda(y-\eta)-(y-\eta)} d\eta = \hat{f}\,(\lambda,\,y)\,. \tag{13}$$

Применим теперь к уравнению (13) преобразование Лапласа по y

$$\tilde{\hat{f}}\,(\lambda,\,p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-py} \int\limits_0^y \hat{u}\,(\lambda,\eta)\, e^{i\lambda(y-\eta)-(y-\eta)}\, d\eta\, dy$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p+1-i\lambda)\tau}\, d\tau \cdot \int\limits_0^{+\infty} \hat{u}\,(\lambda,\eta)\, e^{-p\eta}\, d\eta = I\,(\lambda,\,p) \cdot \tilde{\hat{u}}\,(\lambda,p)\,,$$

где

$$I\,(\lambda,\,p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p+1-i\lambda)\tau} d\tau\, = \frac{1}{p+1-i\lambda}, \quad \mathrm{Re}[p+1] > 0. \tag{14}$$

Таким образом,

$$\tilde{\hat{u}}\,(\lambda,p) = (p+1-i\lambda)\, \tilde{\hat{f}}\,(\lambda,p)\,. \tag{15}$$

Применим к (15) обратное преобразование Лапласа по p. Тогда уравнение (15) примет вид

$$\hat{u}\,(\lambda, y) = \left(\frac{\partial}{\partial y} + 1 - i\lambda\right) \hat{f}\,(\lambda, y)\,.$$

Применим к этому уравнению преобразование Фурье по переменной λ:

$$u\,(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f\,(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} f\,(x, y) + f\,(x, y)\,.$$

Неравенство (11) вытекает из уравнений (15). $\rhd$

Теорема 3. *Пусть весовая функция $g_1(x, \xi) = x - \xi$, правая часть задачи 1 известна всюду в полосе Ω и удовлетворяет следующим условиям:*

1) *$f\,(x, y)$ финитна по x;*

2) *$f\,(x, y)$ имеет все непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно;*

3) *$f\,(x, y)$ обращается в нуль вместе со своими частными производными до 2-го порядка включительно на границах полосы, т. е. при $y = 0$ и $y = H$.*

Тогда существует решение задачи 1 в классе непрерывных функций, финитных по x, определенное формулой (1).

$\lhd$ Доопределим функцию $f\,(x, y)$ при $y \geqslant H$, положив $f\,(x, y) = 0$ для $y \geqslant H$. При этом функция $u\,(x, y)$ доопределяется при $y \geqslant H$ по формуле (1). Из условий, наложенных на функции $f\,(x, y)$ ясно, что к обеим частям (1) можно применить преобразование Фурье по переменной x и преобразование Лапласа по переменной y. Используя свойства преобразований Фурье и Лапласа, получим

$$\tilde{\hat{f}}\,(\lambda,\, p) = \frac{1}{(p - i\lambda)^2}\,\tilde{\hat{u}}\,(\lambda, p)\,.$$

Используя формулу (5), можно получить

$$\tilde{\hat{f}}\,(\lambda,\, p) = I\,(\lambda, p)\;\tilde{\hat{u}}\,(\lambda, p)\,, \tag{16}$$

$$I\,(\lambda,\, p) = \int\limits_0^{+\infty} \tau\, e^{-(p - i\lambda)\tau}\, d\tau.$$

Применяя к (16) обратное преобразование Лапласа по переменной p, придем к следующему выражению:

$$\hat{f}\,(\lambda,\, y) = \int\limits_0^{y} (y - \eta)\, e^{i\lambda(y - \eta)}\;\hat{u}\,(\lambda, \eta)\; d\eta.$$

Отсюда вытекает справедливость утверждения теоремы 3. $\rhd$

Теорема 4. *Пусть весовая функция $g_2\,(x, \xi) = e^{-(x - \xi)}$, правая часть задачи 1 известна всюду в полосе Ω и удовлетворяет следующим условиям:*

1) *$f\,(x, y)$ финитна по x;*

2) *$f\,(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными;*

3) *$f\,(x, y)$ обращается в нуль вместе со своими частными производными при $y = 0$ и $y = H$.*

Тогда существует решение уравнения (12) *в классе непрерывных функций, финитных по x, определенное формулой* (10).

$\lhd$ Аналогично доказательству теоремы 3 применим к (10) преобразование Фурье по переменной x и преобразование Лапласа по переменной y:

$$\tilde{\tilde{f}}(\lambda, p) = \frac{1}{(p+1-i\lambda)}\, \tilde{\tilde{u}}(\lambda, p).$$

С помощью формулы (14), получим

$$\tilde{\tilde{f}}(\lambda,\, p) = I(\lambda,\, p)\; \tilde{\tilde{u}}(\lambda, p), \tag{17}$$

где

$$I(\lambda, p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p+1-i\lambda)\tau}\, d\tau.$$

Применяя к (17) обратное преобразование Лапласа и Фурье по переменной p и λ, приходим к следующему выражению:

$$f(x, y) = \int\limits_0^{y} u(x-h, \eta)\, e^{-(y-\eta)}\, d\eta.$$

Отсюда вытекает справедливость утверждения теоремы 4. $\rhd$

3. Задача интегральной геометрии с возмущением

Пусть $\Gamma(x, y) = \{(\xi, \eta) : |x-\xi| = y-\eta,\ 0 \leqslant \eta \leqslant y \leqslant H\}$, обозначим через $G(x, y)$ область, ограниченную линией $\Gamma(x, y)$ и осью Ox.

Задача 2. Восстановить функцию двух переменных $u(x, y)$ в полосе Ω, если известны суммы интегралов от нее по линиям семейства $\{\Upsilon(x,\, y)\}$ и областям $G(x, y)$ с весовыми функциями $g(x, y, \xi, \eta)$ и $K(x, y, \xi, \eta)$ соответственно:

$$\int\limits_{\Upsilon(x,y)} g(x, y, \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi + \int\limits_{G(x,y)} K(x, y, \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi = F(x, y).$$

Теорема 5. *Пусть весовая функция $g(x, \xi)$ имеет вид $g_1(x, \xi) = x - \xi$, функция $F(x, y)$ известна в полосе Ω, весовая функция $K(x, y, \xi, \eta)$ имеет все непрерывные производные до 2-го порядка включительно и обращается в нуль вместе со своими производными на границе области $G(x, y)$.*

Тогда решение задачи 2 в классе $C_0^2(\Omega)$ единственно и имеет место оценка

$$\|u(x, y)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_3 \|F(x, y)\|_{W_2^{2,\,2}(\Omega)},$$

где C_3 — некоторая константа.

$\lhd$ Рассмотрим функцию

$$f_1(x, y) = F(x, y) - f(x, y),$$

т. е. второе слагаемое из левой задачи 2

$$\int\limits_{G(x,y)} K(x,y,\xi,\eta)\, u(\xi,\eta)\; d\xi = f_0(x,y)\,. \tag{18}$$

Учитывая ограничения, наложенные на весовую функцию $K(x,y,\xi,\eta)$ и используя выражения соответствующих производных функции $f_0(x,y)$ для $y < y_0$, где y_0 достаточно мало, получим следующую оценку:

$$\|f_0(x,y)\|_{W_2^{2,2}(\Omega)} \leqslant \varepsilon \|u(x,y)\|_{L_2(\Omega)}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{19}$$

$$Au = f, \tag{20}$$

$$Au + A_1 u = F. \tag{21}$$

Из функционального анализа [16] известно, что для оператора A из (20) существует левый обратный оператор A^{-1}. Подействовав слева оператором A^{-1} на обе части уравнения (21), приходим к равенству

$$u + A^{-1}A_1 u = A^{-1}F. \tag{22}$$

Из оценок, полученных в теореме 1, и вышесказанного следует, что оператор A_1 непрерывен как оператор, действующий из пространства $L_2(\Omega)$ в пространство $W_2^{2,2}(\Omega)$ на функциях $u(x,y)$; оператор A^{-1} как оператор, действующий из пространства $W_2^{2,2}(\Omega)$ в пространство $L_2(\Omega)$, ограничен на функциях Au (следовательно, и на функциях A_1u, так как оператор A_1 имеет гладкость более высокого порядка, чем оператор A). Отсюда следует, что оператор $A^{-1}A_1$ из уравнения (22) непрерывен на функциях $u(x,y)$ как оператор, действующий из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Таким образом, при достаточно малых $y < y_0$ для оператора $A^{-1}A_1$ выполняется неравенство

$$\left\|A^{-1}A_1\right\| \leqslant \varepsilon < 1. \tag{23}$$

Из принципа сжатых отображений для оператора в правой части задачи 2 следует единственность решения задачи 2 для достаточно малых y. А так как уравнение (22) есть уравнение типа Вольтерра в смысле определения, данного в [14], то единственность будет иметь место не только для малых y, но и во всем полосе Ω. Таким образом, из неравенств (19), (23) и теоремы 1 вытекает оценка

$$\|u(x,y)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_3 \|F(x,y)\|_{W_2^{2,\,2}(\Omega)},$$

где C_3 — некоторая постоянная. $\rhd$

Теорема 6. *Пусть $F(x,y)$ известна в полосе Ω и весовая функция $g_2(x,\xi) = e^{-(x-\xi)}$. Весовая функция $K(x,y,\xi,\eta)$ имеет все непрерывные производные до первого порядка включительно и обращается в нуль вместе со своими производными на границе области $G(x,y)$.*

Тогда решение задачи 2 в классе $C_0^1(\Omega)$ единственно и имеет место оценка

$$\|u(x,y)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_4 \|F(x,y)\|_{W_2^{1,\,1}(\Omega)},$$

где C_4 — некоторая константа.

◁ Рассмотрим функцию

$$f_1(x,y) = F(x,y) - f(x,y),$$

$$\int\limits_{G(x,y)} K(x,y,\xi,\eta)\, u(\xi,\eta)\, d\xi = f_1(x,y). \tag{24}$$

Аналогично доказательству теоремы 5 для $y < y_0$, где y_0 достаточно мало, получим оценку

$$\|f_1(x,y)\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \leqslant \varepsilon \|u(x,y)\|_{L_2(\Omega)}, \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{25}$$

Интегральные операторы, стоящие в левых частях задачи 1 и уравнения (24), обозначим соответственно через B и B_1. С помощью эти обозначения задача 1 и задача 2 соответственно перепишутся следующим образом:

$$Bu = f, \tag{26}$$

$$Bu + B_1 u = F. \tag{27}$$

Известно, что для оператора B из (26) существует левый обратный оператор B^{-1} [16]. Подействовав слева оператором B^{-1} на обе части уравнения (27), приходим к равенству

$$u + B^{-1} B_1 u = B^{-1} F. \tag{28}$$

Аналогично доказательству теоремы 5 покажем, что оператор $B^{-1}B_1$ из уравнения (28) непрерывен на функциях $u(x,y)$ как оператор, действующий из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Таким образом, при достаточно малых $y < y_0$ для оператора $B^{-1}B_1$ выполняется неравенство

$$\left\| B^{-1} B_1 \right\| \leqslant \varepsilon < 1. \tag{29}$$

Из принципа сжатых отображений для оператора в правой части задачи 2 следует единственность решения задачи 2 для достаточно малых y. А так как уравнение (28) есть уравнение типа Вольтерра в смысле определения, данного в [14], то единственность будет иметь место не только для малых y, но и во всей полосе Ω. Таким образом, из неравенств (25), (29) и теоремы 1 вытекает оценка

$$\|u(x,y)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_4 \|F(x,y)\|_{W_2^{1,1}(\Omega)},$$

где C_4 — некоторая постоянная. ▷

Литература

1. *Лаврентьев М. М.* Задача интегральной геометрии на плоскости с возмущением // Сиб. мат. журн.—1996.—Т. 37.—С. 851–857.
2. *Бегматов А. Х.* Задача интегральной геометрии с возмущением в трехмерном пространстве // Сиб. мат. журн.—2000.—Т. 41, № 1.—С. 3–14.
3. *Бегматов А. Х.* Об одной задаче интегральной геометрии с возмущением в трехмерном пространстве // Докл. РАН.—2000.—Т. 371, № 2.—С. 155–158.
4. *Бегматов А. Х.* Об одном классе задач интегральной геометрии на плоскости // Докл. РАН.—1993.—Т. 331, № 3.—С. 261–262.
5. *Бегматов А. Х., Петрова Н. Н.* Задача интегральной геометрии с возмущением на кривых эллиптического типа в полосе // Докл. АН.—2011.—Т. 436, № 2.—С. 151–154.
6. *Бегматов А. Х., Джайков Г. М.* О восстановлении функции по сферическим средним // Докл. АН ВШ РФ.—2013.—Т. 1, № 20.—С. 6–16.

7. *Nowack R. L.* Tomography and the Herglotz–Wiechert inverse formulation // Pure and Apllied Geophysics.—1990.—Vol. 133.—P. 305–315.
8. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. яз.—М.: Мир, 1990.—288 с.
9. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи.—Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.—457 с.
10. *Бегматов Акр. Х.* Задача интегральной геометрии для семейства конусов в n-мерном пространстве // Сиб. мат. журн.—1996.—Т. 37, № 3.—С. 500–505.
11. *Бегматов А. Х., Пиримбетов А. О., Сеидуллаев А. К.* Задачи интегральной геометрии в полосе на семействах параболических кривых // Докл. АН ВШ РФ.—2012.—Т. 2, № 2 (19).—С. 6–15.
12. *Begmatov A. H., Pirimbetov A. O., Seidullaev A. K.* Reconstruction stability in some problems of X-ray and seismic tomography // Proceedings of IFOST-2012, Tomsk Polytechnic University.—2012.—Vol. 2.—P. 261–266.
13. *Begmatov A. H.* Integral geometry problems of Volterra type // Integral methods in science and engineering / Eds. B. Bertram, C. Constanda and A. Struthers.—Boka Raton, Fl: Chapman Hall/CRC, 2000.—P. 46–50.—(Research Notes in Math. Ser., Vol. 418).
14. *Лаврентьев М. М, Романов В. Г, Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа.—М.: Наука, 1980.—286 с.
15. *Бегматов А. Х.* О единственности решения задачи интегральной геометрии вольтерроского типа на плоскости // Докл. АН.—2009.—Т. 427, № 4.—С. 439–441.
16. Функциональный анализ. Справочная математическая библиотека / Под ред. С. Г. Крейна.—М.: Наука, 1972.—544 с.

Статья поступила 29 июля 2014 г.

Бегматов Акбар Хасанович
Новосибирский государственный технический университет,
профессор кафедры инженерной математики
РОССИЯ, 630073, Новосибирск, пр-т К. Маркса, 20
E-mail: begah@ngs.ru

Джайков Гафур Муратбаевич
Новосибирский государственный технический университет,
аспирант кафедры инженерной математики
РОССИЯ, 630073, Новосибирск, пр-т К. Маркса, 20
E-mail: gafur_djaykov@mail.ru

LINEAR PROBLEM OF INTEGRAL GEOMETRY WITH SMOOTH WEIGHT FUNCTIONS AND PERTURBATION

Begmatov A. H. and Djaykov G. M.

We study two problems of integral geometry in a strip on a family of line segments with a given weight function. In the first case, we consider the problem of reconstruction a function in a strip, if we know the integrals of the sought function on the family of line segments with a given weight function of a special kind. An analytical representation of a solution in the class of smooth finite functions is obtained and the uniqueness and existence theorems for a solution of the problem are proved. A stability estimate of solution in Sobolev spaces is presented, which implies its weakly ill-posedness. For the problem with perturbation the uniqueness theorem and stability estimate of solution were obtained. In the second case, we considered the problem of reconstructing a function given by integral data on the family of line segments with a weight function of exponential type. The uniqueness and existence theorems of a solution are proved. A simple representation of a solution in the class of smooth finite functions is constructed. Next, we consider the corresponding problem of integral geometry with perturbation. The uniqueness theorem in the class of smooth finite functions in a strip is proved and a stability estimate of a solution in Sobolev spaces is received.

Key words: problems of integral geometry, Radon transform, Fourier transform, Laplace transform inversion formula, stability estimates, uniqueness of the solution, existence theorem, weakly Ill-posedness, perturbation.