Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 3, С. 75–83

УДК **517.518.2**

ПЛОТНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА ЛИЗОРКИНА В ГРАНД-ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

С. М. Умархаджиев

Семёну Самсоновичу Кутателадзе
к его семидесятилетию

Доказана плотность пространства Лизоркина в некотором подпространстве гранд-пространства Лебега на открытом множестве $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Ключевые слова: гранд-пространство Лебега, пространство Лизоркина, плотность бесконечно дифференцируемых функций.

1. Введение

Рассматриваются модификации пространств Лебега, называемые гран-пространствами Лебега. Такие пространства $L^{p)}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, по ограниченному множеству $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ввели в 1992 г. T. Iwaniec и C. Sbordone [11]. Операторы гармонического анализа интенсивно исследовались в таких пространствах в последние годы и они продолжают привлекать внимание исследователей в связи с различными их приложениями (см. [5–10], [13–15]).

В статьях [2, 17, 18, 20] предложен подход, позволяющий ввести гранд-пространства Лебега $L_a^{p)}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $a \in L^p(\Omega)$, на открытых, не обязательно ограниченных, множествах $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Действия максимального оператора Харди — Литтлвуда, операторов Кальдерона — Зигмунда и потенциала Рисса в гранд-пространства Лебега $L_a^{p)}(\Omega)$ исследованы в работах [1, 3, 19].

Известно, что класс $C_0^\infty(\Omega)$ плотен в пространствах Лебега $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$. В статье доказано, что в гранд-пространствах Лебега $L_a^{p)}(\Omega)$ множество «хороших» функций не является плотным, но оно плотно в некотором подмножестве пространства $L_a^{p)}(\Omega)$ (лемма 2.6).

При изучении операторов типа потенциала оказались полезными основные пространства Φ — пространства Лизоркина. В книгах [4, 16] доказана плотность класса Φ в $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Теорема 3.1 распространяет это утверждение на некоторое подпространство гранд-пространства Лебега $L_a^{p)}(\Omega)$.

2.1. Гранд-пространства Лебега $L_a^{p)}(\Omega)$ и $\mathring{L}_a^{p)}(\Omega)$

2.1. Основные определения и некоторые свойства. Пусть Ω — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ и w — вес на Ω, т. е. неотрицательная локально интегрируемая функция, определенная и неравная нулю почти всюду на Ω. Весовые пространства Лебега $L^p(\Omega, w)$ определяются нормой

$$\|f\|_{L^p(\Omega,w)} = \left\{ \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p w(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

При $w \equiv 1$ мы пишем $L^p(\Omega)$.

Гранд-пространства Лебега $L^{p)}(\Omega)$ по ограниченному множеству Ω определяются нормой

$$\|f\|_{L^{p)}(\Omega)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega)}.$$

Пространства $L^{p)}(\Omega)$ были введены и изучены в вышеуказанных работах для функций, определенных на ограниченных множествах $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. В статьях [2, 17, 18, 20] был предложен подход, позволяющий ввести гранд-пространства Лебега на множествах произвольной (неограниченной) меры посредством некоторой неотрицательной функции a:

$$\begin{gathered} L_a^{p)}(\Omega) := \left\{ f : \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon \int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} a(x)^{\varepsilon}\, dx < \infty \right\}, \\ \|f\|_{L_a^{p)}(\Omega)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega, a^{\varepsilon})}. \end{gathered} \tag{1}$$

Обозначим через $\mathring{L}_a^{p)}(\Omega)$ ($L_0^{p)}(\Omega)$ при $a \equiv 1$) подпространство пространства $L_a^{p)}(\Omega)$, состоящее из функций $f \in L_a^{p)}(\Omega)$, для которых

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} [a(x)]^{\varepsilon}\, dx = 0.$$

При $a \in L^p(\Omega)$ имеет место цепочка вложений

$$L^p(\Omega) \subset \mathring{L}_a^{p)}(\Omega) \subset L_a^{p)}(\Omega) \subset L^{p-\varepsilon_1}(\Omega, a^{\varepsilon_1}) \subset L^{p-\varepsilon_2}(\Omega, a^{\varepsilon_2}), \quad 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < p-1. \tag{2}$$

Приведем примеры функций, подтверждающих строгость первых двух вложений в (2).

Пример 2.1. $f_0(x) = x^{-\frac{1}{p}} \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-\frac{\lambda}{p}}$, $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$.

$$\begin{aligned} f_0 \in & L^p(0, 1/e), \quad \lambda > 1; \\ f_0 \in & L_0^{p)}(0,\, 1/e), \quad \lambda > 0; \\ f_0 \in & L^{p)}(0,\, 1/e), \quad \lambda \geqslant 0. \end{aligned}$$

Действительно, для $\lambda > 1$ имеем $\|f_0\|_{L^p(0,1/e)} = \left\{\int_1^\infty t^{-\lambda}\, dt\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$.

При $\lambda = 0$ получим

$$\|f_0\|_{L^{p)}(0,1/e)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left\{ \varepsilon \int\limits_0^{1/e} x^{-1+\frac{\varepsilon}{p}}\, dx \right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(p\, e^{-\frac{\varepsilon}{p}} \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty.$$

Пусть $0 < \lambda \leqslant 1$. Тогда

$$\varepsilon \int\limits_0^{1/e} |f_0(x)|^{p-\varepsilon}\, dx = \varepsilon^{\frac{\lambda}{p}(p-\varepsilon)} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} e^{-y} y^{-\frac{\lambda}{p}(p-\varepsilon)}\, dy \sim \begin{cases} \varepsilon^{\frac{\lambda}{p}(p-\varepsilon)}, & \lambda < 1 \\ 1 - \varepsilon^{\frac{\varepsilon}{p}}, & \lambda = 1 \end{cases} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Благодаря следующей лемме в дальнейшем некоторые выкладки будут существенно упрощены.

Лемма 2.2. *Пусть $a \in L^p(\Omega)$. Нормы $\|f\|_{L^{p)}_a(\Omega)}$ и $\|f\|_{L^{p)}_{ca}(\Omega)}$, где c — положительная константа, эквивалентны.*

В дальнейшем, основываясь на лемме 2.2, в качестве параметра a в определении гранд-пространства $L^{p)}_a(\Omega)$ будем рассматривать неотрицательные и неравные нулю почти всюду на Ω функции из класса $L^p(\Omega)$ такие, что

$$\|a\|_{L^p(\Omega)} = 1.$$

Пусть $\delta \in (0, p-1)$. В гранд-пространстве Лебега $L^{p)}_a(\Omega)$ кроме нормы (1) рассмотрим еще норму

$$\|f\|_{L^{p)}_a(\Omega;\delta)} = \sup_{0<\varepsilon\leqslant\delta} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega, a^\varepsilon)}.$$

Лемма 2.3. *Пусть a — вес из $L^p(\Omega)$. Тогда нормы $\|f\|_{L^{p)}_a(\Omega)}$ и $\|f\|_{L^{p)}_a(\Omega;\delta)}$ эквивалентны.*

$\lhd$ Неравенство $\|f\|_{L^{p)}_a(\Omega;\delta)} \leqslant \|f\|_{L^{p)}_a(\Omega)}$ очевидно. Пусть $\delta \in (0, p-1)$, покажем, что существует число $C_\delta > 0$ такое, что

$$\|f\|_{L^{p)}_a(\Omega)} \leqslant C_\delta \|f\|_{L^{p)}_a(\Omega;\delta)}. \tag{3}$$

Имеем

$$\|f\|_{L^{p)}_a(\Omega)} = \max\left\{ \|f\|_{L^{p)}_a(\Omega;\delta)}, B_\delta \right\},$$

где

$$B_\delta = \sup_{\delta<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega, a^\varepsilon)}.$$

Применив неравенство Гёльдера с показателями $r = \frac{p-\delta}{p-\varepsilon} > 1$, $r' = \frac{p-\delta}{\varepsilon-\delta}$, получим

$$\|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega, a^\varepsilon)} = \left(\int\limits_\Omega |f|^{p-\varepsilon} a^\varepsilon\, dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \left(\int\limits_\Omega |f|^{p-\varepsilon} a^{\frac{\delta}{r}} a^{\varepsilon-\frac{\delta}{r}}\, dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leqslant \|f\|_{L^{p-\delta}(\Omega, a^\delta)} \left(\int\limits_\Omega a^p\, dx \right)^{\frac{\varepsilon-\delta}{(p-\varepsilon)(p-\delta)}} = \|f\|_{L^{p-\delta}(\Omega, a^\delta)}.$$

Следовательно,

$$B_\delta \leqslant \sup_{\delta<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\delta}(\Omega,a^\delta)}$$

$$= \sup_{\delta<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \delta^{-\frac{1}{p-\delta}} \delta^{\frac{1}{p-\delta}} \|f\|_{L^{p-\delta}(\Omega,a^\delta)} \leqslant (p-1)\delta^{-\frac{1}{p-\delta}} \|f\|_{L^{p)}_a(\Omega;\delta)}.$$

Это дает оценку (3) с константой

$$C_\delta = \max\left\{1, (p-1)\delta^{-\frac{1}{p-\delta}}\right\}. \rhd$$

Лемма 2.4. *Множество* $L^{p)}_a(\Omega)$ *есть банахово пространство относительно нормы* (1).

Доказательство леммы проводится стандартными рассуждениями. Для полноты изложения мы приводим его в приложении.

Лемма 2.5. *Пространство* $\mathring{L}^{p)}_a(\Omega)$ *замкнуто относительно нормы* (1) *и, следовательно, есть подпространство пространства* $L^{p)}_a(\Omega)$: $\mathring{L}^{p)}_a(\Omega) \subsetneq L^{p)}_a(\Omega)$.

$\lhd$ Тот факт, что $\mathring{L}^{p)}_a(\Omega) \subsetneq L^{p)}_a(\Omega)$ видно из примера 2.1. Чтобы доказать, что множество $\mathring{L}^{p)}_a(\Omega)$ замкнуто по норме (1), рассмотрим последовательность $\{f_k\}$ элементов из $\mathring{L}^{p)}_a(\Omega)$, сходящуюся к некоторой функции f. В силу вложения $\mathring{L}^{p)}_a(\Omega) \subset L^{p)}_a(\Omega)$ и полноты пространства $L^{p)}_a(\Omega)$ функция f принадлежит $L^{p)}_a(\Omega)$. Осталось показать, что $f \in \mathring{L}^{p)}_a(\Omega)$, т. е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \int_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon}[a(x)]^\varepsilon\, dx = 0.$$

Имеем

$$\left\{\varepsilon \int_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon}[a(x)]^\varepsilon\, dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \leqslant \|f-f_k\|_{L^{p)}_a(\Omega)} + \left\{\varepsilon \int_\Omega |f_k(x)|^{p-\varepsilon}[a(x)]^\varepsilon\, dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}.$$

Первое слагаемое можно сделать сколь угодно малым для достаточно больших k в силу полноты пространства $L^{p)}_a(\Omega)$, а второе — для достаточно малых ε в силу того, что $f_k \in \mathring{L}^{p)}_a(\Omega)$. $\rhd$

2.2. Плотность множества гладких функций

Теорема 2.6. *Пусть* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, a — *вес из* $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. *Тогда множество* $C_0^\infty(\Omega)$ *плотно в* $\mathring{L}^{p)}_a(\Omega)$.

$\lhd$ Докажем сначала, что множество ограниченных функций плотно в $\mathring{L}^{p)}_a(\Omega)$. Потом докажем, что любую ограниченную функцию можно приблизить по норме пространства $L^{p)}_a(\Omega)$ бесконечно дифференцируемыми финитными функциями.

1. Пусть $f \in \mathring{L}^{p)}_a(\Omega)$. Нужно доказать, что существует последовательность ограниченных функций f_N такая, что

$$(\forall\, \delta > 0)\ (\exists\, N_0) \quad \|f - f_N\|_{L^{p)}_a(\Omega)} < \frac{\delta}{2} \quad (\forall\, N \geqslant N_0). \tag{4}$$

Построим такую последовательность с помощью «срезок» f_N данной функции f:

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leqslant N; \\ 0, & |f(x)| > N. \end{cases}$$

По определению класса $\mathring{L}_a^{p)}(\Omega)$ имеем $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon}[a(x)]^\varepsilon\,dx = 0$. Следовательно,

$$(\exists\,\varepsilon_0>0)\quad \left\{\varepsilon\int\limits_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon}[a(x)]^\varepsilon\,dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \frac{\delta}{2}\quad (\forall\,\varepsilon\leqslant\varepsilon_0), \tag{5}$$

где δ из (4).

Тогда

$$\|f-f_N\|_{L^{p)}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left\{\varepsilon\int\limits_{E_N} |f(x)|^{p-\varepsilon}[a(x)]^\varepsilon\,dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \max\{\delta_1,\delta_2\},$$

где $E_N=\{x\in\Omega:\ |f(x)|>N\}$ и

$$\delta_1(N) = \sup_{0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}\left\{\varepsilon\int\limits_{E_N} |f(x)|^{p-\varepsilon}[a(x)]^\varepsilon\,dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}},$$

$$\delta_2(N) = \sup_{\varepsilon_0<\varepsilon<p-1}\left\{\varepsilon\int\limits_{E_N} |f(x)|^{p-\varepsilon}[a(x)]^\varepsilon\,dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

с ε_0 из (5).

Для $\delta_1(N)$ в силу (5) и вложения $E_N\subset\Omega$ получим

$$\delta_1(N)\leqslant \sup_{0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}\left\{\varepsilon\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon}[a(x)]^\varepsilon\,dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \leqslant \frac{\delta}{2}.$$

Для оценки величины $\delta_2(N)$ воспользуемся неравенством Гёльдера с показателем $r=\frac{p-\varepsilon_0}{p-\varepsilon}>1$:

$$\delta_2(N)\leqslant \sup_{\varepsilon_0<\varepsilon<p-1}\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left\{\int\limits_{E_N} |f(x)|^{p-\varepsilon_0}[a(x)]^{\varepsilon_0}\,dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}}\left\{\int\limits_{E_N}[a(x)]^p\,dx\right\}^{\frac{p(\varepsilon-\varepsilon_0)}{(p-\varepsilon_0)(p-\varepsilon)}}$$

$$\leqslant \sup_{\varepsilon_0<\varepsilon<p-1}\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left\{\int\limits_{E_N} |f(x)|^{p-\varepsilon_0}[a(x)]^{\varepsilon_0}\,dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}} \leqslant (p-1)\left\{\int\limits_{E_N} |f(x)|^{p-\varepsilon_0}[a(x)]^{\varepsilon_0}\,dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}}.$$

Следовательно, существует натуральное число N_0 такое, что

$$\delta_2(N)\leqslant\frac{\delta}{2}\quad(\forall\,N>N_0).$$

Таким образом,

$$\|f-f_N\|_{L^{p)}(\Omega)}<\frac{\delta}{2}\quad(\forall\,N\geqslant N_0),$$

что и требовалось доказать.

2. Пусть теперь f — ограниченная на Ω функция из $\mathring{L}_a^{p)}(\Omega)$. Следовательно, $f\in L^{p-\varepsilon}(\Omega,a^\varepsilon)$ для любого $\varepsilon\in(0,p-1)$. В силу плотности множества $C_0^\infty(\Omega)$ в $L^q(\Omega)$,

$q \geqslant 1$, можно выбрать функцию $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ такой, что $\|f-\varphi\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega,a^\varepsilon)} < \frac{\delta}{2(p-1)}$. Тогда получим

$$\|f-\varphi\|_{L_a^{p)}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f-\varphi\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega,a^\varepsilon)} < \frac{\delta}{2}.$$

И, наконец,

$$\|f-\varphi\|_{L_a^{p)}(\Omega)} \leqslant \|f-f_{N_0}\|_{L_a^{p)}(\Omega)} + \|f_{N_0}-\varphi\|_{L_a^{p)}(\Omega)} < \delta,$$

что и требовалось доказать. $\rhd$

3. Пространство Φ

Выделим в пространстве Шварца $S(\mathbb{R}^n)$ подпространство

$$\Psi = \bigl\{\psi : \psi \in S,\ (D^j\psi)(0) = 0,\ |j| = 0,1,2\dots\bigr\}$$

функций, исчезающих в начале координат вместе со всеми своими производными.

Рассмотрим теперь класс Φ, двойственный к Ψ, состоящий из преобразований Фурье функций из Ψ:

$$\Phi = \bigl\{\varphi : \varphi = \widehat{\psi},\ \psi \in \Psi\bigr\}.$$

Известно (см., например, [4, 16]), что класс Φ состоит из тех и только тех шварцевских функций, которые ортогональны многочленам:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} x^j \varphi(x)\,dx = 0, \quad |j| = 0,1,2,\dots$$

В монографиях [4, 16] приведено доказательство плотности класса Φ в пространствах Лебега $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$. В следующей теореме мы распространяем это утверждение на $\mathring{L}_a^{p)}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 3.1. *Класс Φ плотен в подпространстве $\mathring{L}_a^{p)}(\mathbb{R}^n)$ пространства $L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$.*

$\lhd$ Пусть $f \in \mathring{L}_a^{p)}(\mathbb{R}^n)$ и $\delta > 0$. Нужно показать, что существует последовательность функций $\varphi_N \in \Phi$ такая, что для всякого $\delta > 0$ неравенство $\|f-\varphi_N\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)} < \delta$ выполняется при всех N, больших некоторого N_0.

Так как по лемме 2.6 множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $\mathring{L}_a^{p)}(\mathbb{R}^n)$, то существует функция $f_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\|f-f_0\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)} < \frac{\delta}{2}.$$

Теперь осталось приблизить f_0 функциями из Φ. Для этого мы построим подходящую последовательность, рассуждая аналогично приведенным в [4, с. 22, 23] и [16, с. 42] рассуждениям. Для $f_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_N(x) = f_0(x) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(t) f_0(x-Nt)\,dt,$$

где $k(t)$ — прообраз Фурье функции $1-\mu(N|x|) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mu(r) \equiv 1$ при $r \geqslant 2$, $\mu(r) \equiv 0$ при $0 \leqslant r \leqslant 1$ и $0 \leqslant \mu(r) \leqslant 1$. Функции φ_N принадлежат классу Φ, и последовательность

$\{\varphi_N\}$ сходится по норме пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, к функции f_0. Следовательно, существует номер N_0, такой что

$$\|f_0 - \varphi_N\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \frac{\delta}{2(p-1)} \quad (\forall\, N > N_0).$$

Переходя к норме в пространстве $L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)$ и применив неравенство Гёльдера, получим

$$\|f_0 - \varphi_N\|_{L_a^{p)}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left\{\varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_0(x) - \varphi_N(x)|^{p-\varepsilon} [a(x)]^\varepsilon \, dx\right\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leqslant \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f_0 - \varphi_N\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \frac{\delta}{2},$$

что завершает доказательство. $\rhd$

4. Приложение

Доказательство леммы 2.4. Воспользуемся схемой доказательства из [12]. Пусть $\{f_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — последовательность Коши из $L_a^{p)}(\Omega)$, т. е. для любого $\delta > 0$ существует натуральное число N такое, что для всех $k, m \geqslant N$ выполняется неравенство

$$\|f_k - f_m\|_{L_a^{p)}(\Omega)} < \frac{\delta}{3}.$$

Имеем

$$\|f_k - f_m\|_{L_a^{p)}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f_k - f_m\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega, a^\varepsilon)} < \frac{\delta}{3}.$$

Следовательно, $\{f_k\}$ — последовательность Коши в пространстве $L^{p-\varepsilon}(\Omega, a^\varepsilon)$ для любого $\varepsilon \in (0, p-1)$ и пусть f есть его предел в $L^{p-\varepsilon}(\Omega, a^\varepsilon)$.

Пусть $k > N$. По определению супремума существует число ε_0, зависящее от k, $0 < \varepsilon_0(n) < p - 1$, такое, что

$$\|f - f_k\|_{L_a^{p)}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f - f_k\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega, a^\varepsilon)} \leqslant \varepsilon_0^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}} \|f - f_k\|_{L^{p-\varepsilon_0}(\Omega, a^{\varepsilon_0})} + \frac{\delta}{3}.$$

Более того, существует натуральное число N_1 такое, что для $m > N_1$

$$\varepsilon_0^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}} \|f - f_m\|_{L^{p-\varepsilon_0}(\Omega, a^{\varepsilon_0})} + \frac{\delta}{3}.$$

Поэтому

$$\|f - f_k\|_{L_a^{p)}(\Omega)} \leqslant \varepsilon_0^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}} \|f_m - f_k\|_{L^{p-\varepsilon_0}(\Omega, a^{\varepsilon_0})}$$

$$+\varepsilon_0^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}} \|f_m - f\|_{L^{p-\varepsilon_0}(\Omega, a^{\varepsilon_0})} + \frac{\delta}{3} \leqslant \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta.$$

Таким образом,

$$\|f - f_k\|_{L_a^{p)}(\Omega)} < \delta$$

для любого $k > N$.

Автор выражает благодарность профессору С. Г. Самко за полезное обсуждение результатов работы и рецензенту за замечания к первоначальному тексту статьи.

Литература

1. *Умархаджиев С. М.* Ограниченность линейных операторов в весовых обобщенных гранд-пространствах Лебега // Вестн. АН Чеченской республики.—2013.—Т. 2, № 19.—С. 5–9.
2. *Умархаджиев С. М.* Обобщение понятия гранд-пространства Лебега // Изв. вузов. Математика.—2014.—Т. 4.—С. 42–51.
3. *Умархаджиев С. М.* Ограниченность потенциала Рисса в весовых обобщенных гранд-пространствах Лебега // Владикавк. мат. журн.—2014.—Т. 16, № 2.—С. 62–68.
4. *Самко С. Г.* Гиперсингулярные интегралы и их приложения.—Ростов-н/Д.: Изд-во РГУ, 1984.—208 с.
5. *Di Fratta G., Fiorenza A.* A direct approach to the duality of grand and small Lebesgue spaces // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications.—2009.—Vol. 70, № 7.—P. 2582–2592.
6. *Fiorenza A.* Duality and reflexivity in grand Lebesgue spaces // Collect. Math.—2000.—Vol. 51, № 2.—P. 131–148.
7. *Fiorenza A., Gupta B., and Jain P.* The maximal theorem in weighted grand Lebesgue spaces // Stud. Math.—2008.—Vol. 188, № 2.—P. 123–133.
8. *Fiorenza A. and Karadzhov G. E.* Grand and small Lebesgue spaces and their analogs // J. Anal. and its Appl.—2004.—Vol. 23, № 4.—P. 657–681.
9. *Fiorenza A. and Rakotoson J. M.* Petits espaces de Lebesgue et leurs applications // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I.—2001.—Vol. 333.—P. 1–4.
10. *Greco L., Iwaniec T., and Sbordone C.* Inverting the p-harmonic operator // Manuscripta Math.—1997.—Vol. 92.—P. 249–258.
11. *Iwaniec T. and Sbordone C.* On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses // Arch. Rational Mech. Anal.—1992.—Vol. 119.—P. 129–143.
12. *Kokilashvili V.* Weighted problems for operators of harmonic analysis in some Banach function spaces. Lecture course of Summer School and Workshop «Harmonic Analysis and Related Topics» (HART2010): Lisbon; [cited 2010 June 21–25].—URL: http://www.math.ist. utl.pt/~hart2010/kokilashvili.pdf.
13. *Kokilashvili V.* Boundedness criterion for the Cauchy singular integraloperator in weighted grand Lebesgue spaces and application to the Riemannproblem // Proc. A. Razmadze Math. Inst.—2009.—Vol. 151.—P. 129–133.
14. *Kokilashvili V.* The Riemann boundary value problem for analytic functions in the frame ofgrand $L^{p)}$ spaces // Bull. Georgian Nat. Acad. Sci.—2010.—Vol. 4, № 1.—P. 5–7.
15. *Kokilashvili V. and Meskhi A.* A note on the boundedness of the Hilberttransform in weighted grand Lebesgue spaces // Georgian Math. J.—2009.—Vol. 16, № 3.—P. 547–551.
16. *Samko S. G.* Hypersingular Integrals and their Applications.—London–N. Y.: Taylor & Francis, 2002.—xvii+358 p.—(Ser. Analytical Methods and Special Functions; Vol. 5).
17. *Samko S. G. and Umarkhadzhiev S. M.* On Iwaniec–Sbordone spaces on sets which may have infinite measure // Azerb. J. Math.—2011.—Vol. 1, № 1.—P. 67–84.
18. *Samko S. G. and Umarkhadzhiev S. M.* On Iwaniec–Sbordone spaces on sets which may have infinite measure: addendum // Azerb. J. Math.—2011.—Vol. 1, № 2.—P. 143–144.
19. *Umarkhadzhiev S. M.* The boundedness of the Riesz potential operator from generalized grand Lebesgue spaces to generalized grand Morrey spaces // Operator Theory: Advances and Applications.—Birkhäuser: Basel, 2014.—Vol. 242.—P. 363–373.
20. *Umarkhadzhiev S. M.* A generalization concept of grand Lebesgue space // Russian Math. (Iz. VUZ).—2014.—Vol. 58, № 4.—P. 35–43.

Статья поступила 14 декабря 2014 г.

Умархаджиев Салаудин Мусаевич
Академия наук Чеченской республики,
заведующий отделом прикладной семиотики
РОССИЯ, 364024, Грозный, пр. М. Эсамбаева, 13;

Чеченский государственный университет,
НИИ Математической физики и сейсмодинамики,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 364037, Грозный, ул. А. Шерипова, 32
E-mail: umsalaudin@gmail.com

DENSENESS OF THE LIZORKIN SPACE IN GRAND LEBESGUE SPACES

Umarkhadzhiev S. M.

Denseness of the Lizorkin space in some subspace of a grand Lebesgue space on an open set $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ is proved.

Key words: Grand Lebesgue space, Lizorkin space, denseness of infinitely differentiable functions.