*Владикавказский математический журнал*
*2015, Том 17, Выпуск 4, С. 67–74*

УДК **517.95**

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ — СТОКСА ВО ВСЕМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

**Л. И. Сазонов**

Рассмотрен вопрос об устойчивости ограниченных по времени решениях системы Навье — Стокса во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$. Предварительно рассмотрен вопрос об их существовании.

**Ключевые слова:** система Навье — Стокса, ограниченное решение, устойчивость, пространство соленоидальных полей.

## 1. Предварительные сведения

Рассмотрим множество $\mathscr{V} = \{v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \operatorname{div} v = 0\}$ — всех соленоидальных бесконечно дифференцируемых финитных полей. Замыкание этого множества в пространстве $n$-мерных векторных полей $L_p^n(\mathbb{R}^n)$, обозначаемое через $S_p(\mathbb{R}^n)$, называется пространством $L_p$-соленоидальных полей. Гидродинамический проектор $\Pi$, проектирующий пространство $L_2^n(\mathbb{R}^n)$ на $S_2(\mathbb{R}^n)$, продолжается с множества $\mathscr{V}$ до ограниченного проектора в любом пространстве $L_p^n(\mathbb{R}^n)$ при $1 < p < \infty$ с образом $S_p(\mathbb{R}^n)$. За этим проектором сохраняется прежнее обозначение $\Pi$.

Рассмотрим линейное линеаризованное уравнение Озеена

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \triangle v - \frac{\partial v}{\partial x_1} - \nabla p, \\ \operatorname{div}\, v = 0. \end{cases}$$

Решение задачи Коши с начальным условием $v|_{t=0} = a$, где $a \in S_p(\mathbb{R}^n)$ представляется в виде $v = T(t)\, a$

$$T(t)\, a = (4\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{ \frac{|x - y - (x_1 - y_1)te_1|^2}{4t} \right\} a(y)\, dy.$$

Вообще говоря, $T(t)$ является аналитической полугруппой уравнения теплопроводности со сдвигом, но ввиду того, что гидродинамический проектор коммутирует с полугруппой, а начальное условие соленоидально решение соленоидально.

В дальнейшем особенно важны оценки полугруппы

$$\|\partial_x^\alpha T(t)a\|_{S_q} \leqslant c_{pq} t^{-|\alpha|/2 - \frac{n}{2}(1/p - 1/q)} \|a\|_{S_p}, \quad |\alpha| = 0, 1, \ \ 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty.$$



[1] Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности, задание № 1 1398 2014 К.

## 2. Существование ограниченных решений

Для системы Навье — Стокса

$$\begin{cases}\frac{\partial v}{\partial t} = \triangle v - (v,\nabla)v - \nabla p - f(x,t),\\ \mathrm{div}\; v = 0.\end{cases}$$

Рассмотрим вопрос о существовании ограниченных решений вида $v = \xi(x,t)+1$, где $\xi(x,t)$ стремится к нулю при $|x|\to\infty$. Поле $\xi(x,t)$ является решением системы

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \triangle\xi - \partial_1\xi - (\xi,\nabla)\xi - \nabla p - f(x,t), \quad \mathrm{div}\;\xi = 0. \tag{1}$$

Предполагая, что $\xi(x,t)$ принимает значения в пространствах типа $L_p$, и действуя на систему (1) проектором $\Pi$, получим ОДУ в некотором банаховом пространстве, которое будет определено ниже

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \triangle\,\xi - \partial_1\xi - \Pi\big\{(\xi,\nabla)\xi - f\big\}. \tag{2}$$

Используя метод вариации, сведем решение задачи Коши с начальным условием $\xi\big|_{t-0} = a$ к интегральному уравнению

$$\xi(t) = T(t)a + \int\limits_0^t T(t-s)\Pi\big\{(\xi(s),\nabla)\xi(s) - f(s)\big\}\,ds. \tag{3}$$

Исследуем вопрос об инвариантности пространства $L_\infty([0,\infty), S_{p_1}\cap S_{p_2})$ относительно отображения

$$Q\xi(t) = \int\limits_0^t T(t-s)\Pi\big\{(\xi(s),\nabla)\xi(s)\big\}\,ds.$$

Предварительно заметим, что

$$T(t-s)\Pi\big\{(\xi(s),\nabla)\xi(s)\big\} = \sum \partial_j T(t-s)\Pi\big(\xi_j(s)\xi(s)\big).$$

Далее, имеем

$$\|Q\xi(t)\|_p \leqslant c\int\limits_0^t (t-s)^{-1/2-n/(2p)}ds\|\xi\|^2_{L_\infty(S_p)}.$$

Отсюда следует, что нельзя обойтись одним показателем. Из оценки

$$\|Q\xi(t)\|_q \leqslant c\int\limits_0^t (t-s)^{-1/2-(n/p-n/(2q))}ds\|\xi\|^2_{L_\infty(S_p)}$$

вытекает необходимость изменения показателя на разных участках интегрирования. Для определенности считаем, что при $t<2$ на отрезке $[0,t]$, или при $t>2$ на отрезке $[t-1,t]$ выполняется неравенство $0\leqslant (n/p - n/(2q)) < 1/2$, либо при $t>2$ на отрезке $[0,t-1]$ выполняется неравенство $(n/p-n/(2q)) > 1/2$. Тогда $\|Q\xi\|_q \leqslant c\|\xi\|^2_{L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})}$ при $q=p_1$ или $q=p_2$. Таким образом, пространство $L_\infty([0,\infty), S_{p_1}\cap S_{p_2})$ инвариантно относительно отображения $Q$ при выполнении условий $2 \leqslant p_1 < n$, $n < p_2 \leqslant 2p_1$, причем справедливо неравенство

$$\|Q\xi\|_{L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})} \leqslant c_{p_1,p_2}\|\xi\|^2_{L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})}. \tag{4}$$

**Теорема 1.** *Пусть* $(p_1,p_2) \in \Delta = \{p_1 < n,\, n < p_2 \leqslant 2p_1\}$, $a \in S_{p_1}\cap S_{p_2}$, $f = \sum \partial_j F_k$, $F_k \in L_\infty(S_{p_1/2}\cap S_{p_2/2})$. *Тогда существуют такие числа* $\varepsilon > 0$, $R > 0$, *что при выполнении условий* $\|a\| < \varepsilon$, $\|F_k\| < \varepsilon$ *уравнение* (3) *имеет решение, единственное в шаре* $B_R = \{\|\xi\| \leqslant R\} \subset L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})$.

$\lhd$ Справедливы оценки

$$\|\eta\|_{L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})} \leqslant c_{p_1,p_2}\Big(\|a\|_{S_{p_1}\cap S_{p_2}} + n^2 \sup_j \|F_j\|_{L_\infty(S_{p_1/2}\cap S_{p_2/2})} + \|\xi\|^2_{L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})}\Big), \tag{5}$$

где $\eta$ образ $\xi$ при отображении, определяемом правой частью уравнения (3). Для краткости полагаем $c_{p_1,p_2} = c$. Из предположений теоремы следует, что выполнение условия $c((n^2+1)\varepsilon + R^2) \leqslant R$ влечет инвариантность шара $B_R = \{\|\xi\|_{L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})} \leqslant R\}$. Таким образом, это справедливо для всех $R$, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{1}{2c}(1-\sqrt{1-\sigma}) \leqslant R \leqslant \frac{1}{2c}(1+\sqrt{1-\sigma}), \quad \sigma = 4c^2(n^2+1)\,\varepsilon.$$

В шаре $B_R$ условие сжимаемости имеет вид $2Rc < 1$. Таким образом, при $\frac{1}{2c}(1-\sqrt{1-\sigma}) \leqslant R < \frac{1}{2c}$ шар $B_R$ является инвариантным и в нем выполняется условие сжимаемости. Выберем $\varepsilon_0 = 3(16c^2(n^2+1))^{-1}$, $R_0 < (2c)^{-1}$. Тогда при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ в шаре $B_{R_0}$ существует единственное решение $\xi$ уравнения (3), причем на самом деле $\xi$ содержится в шаре $B_{R_{\min}}$, $R_{\min} = \frac{1}{2c}(1-\sqrt{1-\sigma})$. $\rhd$

Пусть $1/p_1 = 3/(2n)$, $1/p_2 = 3/(4n)$. Тогда $2/p_1 - 1/q_1 = 3/n - 1/q_1 > 1/n$ влечет $1/q_1 < 2/n$. Ясно, что $1/q_1$ можно взять сколь угодно близким к $2/n$, так как можно взять $p_1 < r < n$, так что $2/r - 1/q_1 < 1/n$. Далее, $2/p_2 - 1/q_2 = 3/(2n) - 1/q_2 < 1/n$ влечет $1/q_2 > 1/(2n)$, причем $1/q_2$ можно взять сколь угодно близким к $1/(2n)$. Дальнейшие рассуждения показывают, что можно считать, что $p_1 = 2$, $p_2 = \infty$. Таким образом, если дополнительно к условиям теоремы 1 потребовать $a \in S_2 \cap S_\infty$, $F_j \in L_\infty(S_1\cap S_\infty)$, то $\xi(t) \in L_\infty(S_2\cap S_\infty)$.

Очевидно, что данный результат справедлив для любой точки $(p_1,p_2)$, принадлежащей $\triangle$.

**Регулярность ограниченных решений.** Формально дифференцируя уравнение (3) и осуществляя замену $\eta_j = \partial_j\xi$, имеем

$$\eta_j = \partial_j T(t)a + \partial_j \int\limits_0^t T(t-s)\Pi\Big\{\sum \xi_j(s)\eta_j(s) + f(s)\Big\}\,ds. \tag{6}$$

Для оператора $(A\eta)_k(t) = \partial_k \int\limits_0^t T(t-s)\Pi\big\{\sum \xi_j(s)\eta_j(s)\big\}\,ds$ справедлива оценка

$$\|\{(A\eta)_j\}\|_{L_\infty((S_{p_1}\cap S_{p_2})^n)} \leqslant cn\|\xi\|_{L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})}\|\{\eta_j\}\|_{L_\infty((S_{p_1}\cap S_{p_2})^n)}.$$

Здесь константа $c = c_{p_1,p_2}$, $(p_1,p_2) \in \triangle$ из доказательства теоремы.

1. Имеем $cn\|\xi\|_{L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})} \leqslant cnR_{\min}$. Здесь возникает дополнительное требование $cnR_{\min} < 1$. При выполнении этого условия оператор $I - A$ обратим в пространстве

$L_\infty((S_{p_1}\cap S_{p_2})^n)$. Поэтому уравнение (6) имеет единственное решение в этом пространстве. Предположим, что $a\in S_2\cap S_\infty$, $F_k\in L_\infty(S_1\cap S_\infty)$. Аналогично предыдущему устанавливаем, что $\eta_j\in L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})$ для всех $p_1>2$, $p_2<\infty$. Далее, введя обозначение

$$\zeta = T(t)a+\int\limits_0^t T(t-s)\Pi\Big\{\sum\xi_j(s)\eta_j(s)+f(s)\Big\}\,ds, \tag{7}$$

имеем $\eta_j=\partial_j\zeta$ и, следовательно,

$$\zeta = T(t)a+\int\limits_0^t T(t-s)\Pi\Big\{(\xi(s),\nabla)\zeta(s)+f(s)\Big\}\,ds. \tag{8}$$

Так как $\xi$ является также решением этого уравнения, то $\xi=\zeta$ и, следовательно, $\partial_j\xi=\eta_j$.

**Старшие производные.** Выполним некоторые формальные преобразования. Представим $\partial_j\xi$ в виде

$$\partial_j\xi = T(t)\partial_j a+\int\limits_0^t T(t-s)\Pi\Big\{(\xi(s),\nabla)\partial_j\xi(s)+G_j(s)\Big\}\,ds, \tag{9}$$

где $G_j(s)=(\partial_j\xi(s),\nabla)\xi(s)+\partial_j f(s)$. Продифференцировав уравнение (9) и введя обозначение $\eta_{j,k}=\partial_k\partial_j\xi$, получим

$$\eta_{j,k}=\partial_k T(t)\partial_j a+\partial_k\int\limits_0^t T(t-s)\Pi\Big\{\sum\xi_r(s)\eta_{j,r}(s)+G_j(s)\Big\}\,ds. \tag{10}$$

Введем оператор

$$B\{\eta_{j,k}\}(t)=\Big\{\partial_k\int\limits_0^t T(t-s)\Pi\Big\{\sum\xi_r(s)\eta_{j,r}(s)\Big\}\,ds\Big\}.$$

Имеет место оценка

$$\|B\{\eta_{j,k}\}\|_{L_\infty((S_{p_1}\cap S_{p_2})^{n^2})}\leqslant cn\|\xi\|_{L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})}\|\{\eta_{j,k}\}\|_{L_\infty((S_{p_1}\cap S_{p_2})^{n^2})}.$$

Из данной оценки следует, что не возникает новых условий по сравнению со случаем первых производных. Предполагая эти условия выполненными, получаем, что оператор $I-B$ обратим в пространстве $L_\infty((S_{p_1}\cap S_{p_2})^{n^2})$. Если предположить, что выполняются условия $\partial_j\partial_k a\in S_2\cap S_\infty$, $\Pi G_j\in L_\infty((S_{p_1}\cap S_{p_2}))$ для всех $1<p_1,p_2<\infty$, то $\eta_{j,k}\in L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})$ для всех $2<p_1,p_2<\infty$. Из уравнения (10) следует, что $\eta_{j,k}=\partial_k\zeta_j$, где

$$\zeta_j=T(t)\partial_j a+\int\limits_0^t T(t-s)\Pi\Big\{\sum\xi_r(s)\,\eta_{j,r}(s)+G_j(s)\Big\}\,ds. \tag{11}$$

Таким образом, $\zeta_j$ являются решением системы

$$\zeta_j=T(t)\partial_j a+\int\limits_0^t T(t-s)\Pi\Big\{\sum\xi_r(s)\,\partial_r\zeta_j(s)+G_j(s)\Big\}\,ds. \tag{12}$$

Представим (12) в виде

$$\zeta_j = T(t)\partial_j a + \partial_r \int\limits_0^t T(t-s)\Pi\Big\{\sum \xi_r(s)\zeta_j(s) + \partial_j\xi_r(s)\,\xi(s) + \partial_j f(s)\Big\}\,ds. \qquad (13)$$

Покажем, что $\partial_j\xi$ также являются решением этой системы. Ввиду очевидного соотношения $\partial_j\partial_r T(t)\Pi\xi_r\xi = \partial_j T(t)\Pi(\xi,\nabla)\xi)$ после подстановки в уравнение (13) преобразуем его к виду

$$\partial_j\xi = T(t)\partial_j a + \partial_j \int\limits_0^t T(t-s)\Pi\Big\{(\xi(s),\nabla)\,\xi + f(s)\Big\}\,ds. \qquad (14)$$

Следовательно, $\zeta_j = \partial_\xi$, $\eta_{j,k} = \partial_k\zeta_j = \partial_j\partial_k\xi$. Таким образом, при приведенных выше условиях $\partial_j\partial_k\xi \in L_\infty(S_{p_1}\cap S_{p_2})$ для всех $2 < p_1, p_2 < \infty$.

**Производная по времени.** В соотношении

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{t-\varepsilon} T(t-s)\Pi\Big\{(\xi(s),\nabla)\xi + f(s)\Big\}\,ds = T(\varepsilon)\Pi\Big\{(\xi(s),\nabla)\xi + f(s)\Big\}$$

$$+\int\limits_0^{t-\varepsilon} \partial_j T(t-s)\Pi\partial_j\Big\{(\xi(s),\nabla)\xi + f(s)\Big\} - \partial_1 T(t-s)\Pi\Big\{(\xi(s),\nabla)\xi + f(s)\Big\}\,ds,$$

переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{t} T(t-s)\Pi\big\{(\xi(s),\nabla)\xi + f(s)\big\}\,ds = \Pi\big\{(\xi(s),\nabla)\xi + f(s)\big\}$$

$$+\int\limits_0^{t} \partial_j T(t-s)\Pi\partial_j\big\{(\xi(s),\nabla)\xi + f(s)\big\} - \partial_1 T(t-s)\Pi\big\{(\xi(s),\nabla)\xi + f(s)\big\}\,ds.$$

Из последнего соотношения следует, что существует производная по времени. Кроме того, имеем

$$(\partial_t - \triangle + \partial_1)\,\xi = (\xi,\nabla)\xi) + f.$$

**Устойчивость ограниченных решений.** Пусть $\theta(t,x) = \xi(t,x) + e_1$ — ограниченное решение. Рассмотрим вопрос об его устойчивости. Для этого исследуем интегральное уравнение для возмущений $v(t,x)$

$$v(t) = T(t)v_0 + \int\limits_0^t T(t-s)\Pi\Big\{(v(s),\nabla)\,\xi(s) + (\xi(s)\nabla)\,v(s) + (v(s),\nabla)v(s)\Big\}\,ds. \qquad (15)$$

Уравнение будем рассматривать в подпространстве $S_{\gamma,p}$ пространства $L_\infty(S_p)$, состоящем из элементов с конечной нормой $\|v\|_{S_{\gamma,p}} = \sup_t(1+t)^\gamma\|v(t)\|_{S_p}$. Найдем условия инвариантности пространства $S_{\gamma,p}$ относительно оператора в правой части уравнения.

$$\left\|\int\limits_0^t T(t-s)\Pi\big\{(v(s),\nabla)v(s)\big\}\,ds\right\|_{S_p} \leqslant c\int\limits_0^t (t-s)^{-1/2-n/(2p)}(1+s)^{-2\gamma}\|v\|^2_{S_{\gamma,p}}.$$

Считаем, что $1/2 + n/(2p) < 1$. Тогда интегрируя, получаем оценку

$$\left\| \int\limits_0^t T(t-s)\Pi\big\{(v(s),\nabla)v(s)\big\}\,ds \right\|_{S_p} \leqslant c\,\max\big(t^{-1/2-n/(2p)},\, t^{1/2-n/(2p)-2\gamma}\big)\|v\|^2_{S_{\gamma,p}}.$$

Таким образом, условия инвариантности для рассматриваемого оператора имеют вид $p > n$, $1/2 - n/(2p) \leqslant \gamma \leqslant 1/2 + n/(2p)$. Для линейной части при выполнении оценки для $\gamma$ имеем

$$\left\| \int\limits_0^t T(t-s)\Pi\{(v(s),\nabla)\xi(s) + (\xi(s),\nabla)v(s)\}\,ds \right\|_{S_{\gamma,p}} \leqslant c\sup\|\xi(s)\|_{S_{r_1}\cap S_{r_2}}(1+t)^{-\gamma}\|v\|_{S_{\gamma,p}},$$

где $r_1 < n < r_2$, $1/r_1 + 1/p < 1$.

Далее, для выполнения включения $T(t)v_0 \in S_{\gamma,p}$ необходимо и достаточно чтобы $v_0 \in S_q \cap S_p$, $\frac{n}{2}(1/q - 1/p) \geqslant \gamma$. Выясним когда вес максимален. Подставляя $\gamma = 1/2 + n/(2p)$ в последнее неравенство, получаем $1/q \geqslant 1/n + 3/p$. Отсюда при $n = 3$ должно быть $p > 9/2$, а при $n > 3$ остается $p > n$.

Введем обозначения для операторов

$$Bv(t) = -\int\limits_0^t T(t-s)\Pi\big\{(v(s),\nabla)\xi(s) + (\xi(s),\nabla)v(s)\big\}\,ds,$$

$$Av(t) = -\int\limits_0^t T(t-s)\Pi\big\{(v(s),\nabla)v(s)\big\}\,ds.$$

**Теорема 2.** *Пусть пространство $S_{\gamma,p}$ инвариантно относительно операторов $A$, $B$, оператор $I + B$ обратим в этом пространстве. Тогда существуют числа $\varepsilon > 0$, $R > 0$ такие, что при $\|T(t)v_0\|_{S_{\gamma,p}} < \varepsilon$ уравнение*

$$v(t) = T(t)v_0 - Bv(t) - Av(t)$$

*в шаре $B_R = \{\|v\|_{S_{\gamma,p}} < R\}$ имеет единственное решение.*

$\lhd$ Условия инвариантности операторов определены выше. Обращая оператор $I + B$, сведем рассматриваемое уравнение к виду

$$v(t) = (I+B)^{-1}\{T(t)v_0 - Av(t)\}.$$

Имеет место оценка

$$\|(I+B)^{-1}\{T(t)v_0 - Av(t)\}\|_{S_{\gamma,p}} \leqslant \|(I+B)^{-1}\|(\|T(t)v_0\| + c\|v\|^2).$$

Правую часть этого неравенства оценим через $C(\|T(t)v_0\| + \|v\|^2)$, где

$$C = \max\{\|(I+B)^{-1}\|(1,c)\}.$$

Пусть выполняется условие теоремы для $T(t)v_0$. Тогда условие инвариантности шара $B_R$ выполняется при $C(\varepsilon + R^2) \leqslant R$, а условие сжимаемости в этом шаре имеет вид $2CR < 1$. Очевидно, оба эти неравенства выполняются, если $1/(2C) - \sqrt{1/(4C^2) - \varepsilon} \leqslant R < 1/(2C)$. Тогда применим принцип сжимающих отображений, гарантирующий существование единственного решения в рассматриваемом шаре. $\rhd$

Замечание. Важным условием применимости теоремы является условие обратимости оператора $I+B$. Из оценки оператора $B$ следует, что для этого достаточно подходящей малости величины $\sup_{r_1<n<r_2}\|\xi\|_{S_{r_i}}$.

Пусть возмущение $v\in S_{\gamma,p}$ и $\gamma=1/2+n/(2p)$. Рассмотрим вопрос о принадлежности $v$ другим пространствам $S_{\mu,q}$. Для этого обратимся к интегральному уравнению возмущений (15). Отдельно для линейного и нелинейного операторов выясним вопрос о действии из $S_{\gamma,p}$ в $S_{\mu,q}$.

Имеем

$$\|Av(t)\|_{S_q}\leqslant c\int\limits_0^t(t-s)^{-1/2-(n/p-n/(2q))}(1+s)^{-2\gamma}\|v\|^2_{S_{\gamma,p}}\leqslant c(1+t)^{-1/2-(n/p-n/(2q))}\|v\|^2_{S_{\gamma,p}}$$

при выполнении условия $2/p-1/n<1/q\leqslant 2/p$.

$$\|Bv(t)\|_{S_q}\leqslant c\int\limits_0^t(t-s)^{-1/2-(1/r+1/p-1/q)n/2)}(1+s)^{-\gamma}\|v\|_{S_{\gamma,p}}\|\xi\|_{L_\infty(S_r)}\leqslant c(1+t)^{-\gamma}\|v\|_{S_{\gamma,p}}$$

при условии, что показатель $r>2$ можно менять так, чтобы на разных участках интегрирования показатель $1/2+(1/r+1/p-1/q)n/2$ был больше или меньше единицы. Кроме того, должны выполняться условия $1/r+1/p-1/q\geqslant 0$, $1/r+1/p<1$. Легко показать, что все эти условия выполняются, если $0<1/q<1/2+1/p-1/n$.

Таким образом, приходим к выводу: *оператор, определяемый правой частью уравнения возмущений, действует из $S_{\gamma,p}$ в $S_{\mu,q}$, $\mu=\min(1/2+n/(2p),1/2+(2/p-1/q)n/2)$ при выполнении условия $2/p-1/n<1/q<\min(2/p,1/2+1/p-1/n)$.*

Изложенное приводит к следующему результату об устойчивости.

**Теорема 3.** *Существует такое число $\varepsilon_p>0$, что при выполнении условия $\sup_{r_1<n<r_2}\|\xi\|_{L_\infty(S_{r_i})}<\varepsilon_p$ ограниченное решение $\xi(x,t)+e_1$ асимптотически устойчиво в пространстве $S_p$, $p>n$, причем для возмущений справедлива оценка $\|v(t)\|_{S_p}\leqslant c(1+t)^{-\gamma}$, $\gamma=1/2+n/(2p)$. Как следует из предыдущего замечания возмущение принадлежит $S_q$ и $\|v\|_{S_q}\leqslant c(1+t)^{-\mu}$, где $q$, $\mu$ указаны выше.*

**Замечание.** В работах [1, 2] установлены критерии устойчивости стационарных и периодических решений задачи обтекания без предположения об их малости.

## Литература

1. *Сазонов Л. И.* Обоснование метода линеаризации в задаче обтекания // Изв. РАН. Сер. мат.—1994.—Т. 58, № 5.—С. 85–109.
2. *Сазонов Л. И.* Об устойчивости периодических решений системы Навье — Стокса в трехмерной внешней области // Изв. РАН. Сер. мат.—2003.—Т. 67, № 4.—С. 155–170.

*Статья поступила 23 марта 2015 г.*

Сазонов Леонид Иванович
Южный математический институт ВНЦ РАН,
*старший научный сотрудник отдела диф. уравнений*
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

Южный федеральный университет,
*доцент кафедры выч. мат-ки и математической физики*
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а

# ON THE STABILITY OF BOUNDED SOLUTIONS TO THE NAVIER–STOKES EQUATIONS IN THE WHOLE SPACE

Sazonov L. I.

Stability in the whole space of bounded solutions to the Navier–Stokes system is considered. Preliminarily, the existence of such solutions is studied.

**Key words:** Navier–Stokes system, bounded solution, stability, space of solenoidal fields.