Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 4, С. 80–85

УДК **517.512**

ОБ ОТКЛОНЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ ИХ ЗНАЧЕНИЙ НА ГРАНИЦЕ

Ю. Х. Хасанов

В работе установлен ряд утверждений, которые позволяют оценить меру отклонений гармонической почти-периодической функции от их граничных значений. В качестве граничных значений рассматриваются равномерные почти-периодические функции, а как характеристики свойств граничных функций — модули непрерывности.

Ключевые слова: почти-периодическая функция, гармоническая функция, граничные значения, модуль непрерывности.

Напомним, что непрерывная на всей действительной оси функция $f(x)$ называется *равномерной почти-периодической*, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число $l = l(\varepsilon)$, что в каждом интервале длины l найдется хотя бы одно число τ, для которого выполняется неравенство

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon \quad (-\infty < x < \infty).$$

Пространство равномерных почти-периодических функций, его обозначим через $\mathbf{B}$, есть замыкание множества тригонометрических полиномов

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k x}, \qquad a_k \in \mathbb{C},\ \lambda_k, x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

по норме

$$\|f\|_B = \sup_x |f(x)|.$$

Основные сведения о функциях из пространства B можно найти в [1] или [2].

Пусть $f(x)$ равномерная почти-периодическая функция с рядом Фурье

$$A + \sum_k A_k \cos \lambda_k x + B_k \sin \lambda_k x.$$

Покажем, что существует гармоническая и непрерывная для $\sigma \geqslant 0$ функция $U(x,\sigma)$, совпадающая с $f(x)$ при $\sigma = 0$ с нормой

$$\|U(x,\sigma)\|_B = \sup_x |U(x,\sigma)|.$$

Рассмотрим функцию, представимую интегралом Пуассона

$$U(x,\sigma) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sigma}{\sigma^2+(t-x)^2}\,dt \qquad (\sigma > 0).$$

Непосредственно проверяется, что функция

$$u(x,\sigma) = \frac{\sigma}{\sigma^2+(t-x)^2}$$

при фиксированном t и $\sigma > 0$ является гармонической. Действительно,

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{(t-x)^2-\sigma^2}{[\sigma^2+(t-x)^2]^2}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} = \frac{2\sigma^3-6\sigma(t-x)^2}{[\sigma^2+(t-x)^2]^3};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2\sigma(t-x)}{[\sigma^2+(t-x)^2]^2}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-2\sigma^3+6\sigma(t-x)^2}{[\sigma^2+(t-x)^2]^3}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

т. е. функция $u(x,\sigma) = \frac{\sigma}{\sigma^2+(t-x)^2}$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Следовательно, она является гармонической, поэтому $U(x,\sigma)$ также гармоническая функция.

Теперь покажем, что при $\sigma > 0$ и $U(x,\sigma)$ по переменной x является почти-периодической функцией и притом равномерно для всех $\sigma > 0$. С помощью подстановки $t - x = \sigma u$ получим

$$U(x,\sigma) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+\sigma u)}{1+u^2}\,du. \tag{1}$$

Если τ есть ε -почти-период функции $U(x,\sigma)$, то в силу определения равномерных почти-периодических функций, имеем

$$|U(x+\tau,\sigma) - U(x,\sigma)| = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x+\sigma u+\tau) - f(x+\sigma u)|}{1+u^2}\,du$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\varepsilon}{\pi}\pi = \varepsilon,$$

что и доказывает почти-периодичность функции $U(x,\sigma)$.

Далее, мы должны показать, что $U(x,\sigma) \to f(x)$ при $\sigma \to 0$. С этой целью построим ряд Фурье функции $U(x,\sigma)$. Если обозначить через

$$M_x\{U(x,\sigma)\cos\lambda x\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} U(x,\sigma)\cos\lambda x\,dx$$

среднее значение функции $U(x,\sigma)\cos\lambda x$, то имеем

$$M_x\{U(x,\sigma)\cos\lambda x\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} M_x\{f(x+\sigma u)\cos\lambda x\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\lambda\sigma u\,du}{1+u^2} M_x\{f(x)\cos\lambda x\} = M_x\{f(x)\cos\lambda x\}\exp(-|\lambda|\sigma).$$

Аналогично

$$M_x\{U(x,\sigma)\sin\lambda x\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda\sigma u\,du}{1+u^2}M_x\{f(x)\sin\lambda x\} = M_x\{f(x)\sin\lambda x\}\exp(-|\lambda|\sigma).$$

Поэтому

$$U(x,\sigma)\sim A+\sum_k(A_k\cos\lambda_k x + B_k\sin\lambda_k x)\exp(-\lambda_k\sigma).$$

Из последнего ряда и представления (1) следует, что при $\sigma\to 0$ и $U(x,\sigma)\to f(x)$, притом равномерно по x.

Наряду с функцией $f(x)$ рассмотрим функцию

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\,dt,$$

которая [3] при условии

$$\int\limits_0^1 t^{-1}\omega(f;t)\,dt<\infty \tag{2}$$

будет функцией непрерывной на всей вещественной оси, где $\omega(f;t)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$ в равномерной метрике.

Известно [1], что если равномерно по x

$$\left|\int\limits_0^1 f(x+t)\,dt\right|<M, \tag{3}$$

то $g(x)$ будет также равномерной почти-периодической функцией. Кроме того, функция $V(x,\sigma)$ ($\sigma>0$), сопряженная к гармонической функции $U(x,\sigma)$, при выполнении условия (3) будет также равномерной почти-периодической с рядом Фурье

$$\sum_k(B_k\cos\lambda_k x + A_k\sin\lambda_k x)\exp(-\lambda_k\sigma).$$

Пусть $f(x)\in B$. За меру отклонения функции $U(x,\sigma)$ от ее граничных значений $f(x)$ примем величину

$$\Delta(f;\sigma)_B = \|U(x,\sigma)-f(x)\|_B.$$

Отметим, прежде всего, некоторые свойства величины $\Delta(f;\sigma)_B$.

Лемма. *Если $U(x,\sigma)$ гармоническая функция и имеет своими граничными значениями функцию $f(x)\in B$, то*

$$\Delta(f;\sigma_1+\sigma_2)_B\leqslant\Delta(f;\sigma_1)_B+\Delta(f;\sigma_2)_B, \tag{4}$$

$$\Delta(f;n\sigma)_B\leqslant n\Delta(f;\sigma)_B, \tag{5}$$

где n — любое натуральное число.

$\lhd$ Неравенство (5) является следствием (4). Для доказательства свойства (4) воспользуемся очевидным тождеством

$$U(x, \sigma_1 + \sigma_2) - U(x, \sigma_1) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big\{U(x+t, \sigma_2) - f(x+t)\big\} \frac{\sigma_1}{t^2 + \sigma_1^2}\, dt,$$

справедливым для любой гармонической функции $U(x, \sigma)$. Применяя обобщенное неравенство Минковского, получим

$$\Delta(f, \sigma_1 + \sigma_2)_B - \Delta(f, \sigma_1)_B \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|U(x+t, \sigma_2) - f(x+t)\|_B \frac{\sigma_1}{t^2 + \sigma_1^2}\, dt$$

или

$$\Delta(f, \sigma_1 + \sigma_2)_B \leqslant \Delta(f, \sigma_1)_B + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|U(x+t, \sigma_2) - f(x+t)\|_B \frac{\sigma_1}{t^2 + \sigma_1^2}\, dt.$$

Из последнего неравенства вытекает (4). $\rhd$

Теперь приведем ряд утверждений, которые обеспечивают возможность оценивать поведение величины $\Delta(f, \sigma)_B$ в зависимости от свойств их граничных значений $f(x) \in B$. В качестве характеристики свойств граничных функций рассматриваются модули непрерывности.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ равномерная почти-периодическая функция. Тогда справедлива оценка*

$$\Delta(f, \sigma)_B \leqslant C\sigma \left\{ 1 + \int\limits_0^1 \frac{\omega_k(f; t)}{t^2}\, dt \right\},$$

где $\omega_k(f; t)$ — модуль непрерывности порядка k, а константа C не зависит от σ.

$\lhd$ В работе [4] установлено, что всякая гармоническая функция $U(\sigma, x)$ представима интегралом Пуассона

$$U(x, \sigma) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \frac{\sigma}{t^2 + \sigma^2}\, dt \quad (\sigma > 0).$$

Поэтому, как показано в [5] (см. [5, с. 97]), имеем

$$\Delta(f; \sigma)_B = \left\| \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \left\{ \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \tbinom{k}{r} f(x+rt) \right\} \frac{\sigma}{t^2 + \sigma^2}\, dt \right\|_B,$$

где $f(x) \in B$.

Применяя неравенство Минковского и разбивая правую часть полученного неравенства на три слагаемых, находим

$$\Delta(f; \sigma)_B \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \omega_k(f; t)_B \frac{\sigma}{t^2 + \sigma^2}\, dt = \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_0^{\sigma} + \int\limits_{\sigma}^{1} + \int\limits_1^{\infty} \right) \omega_k(f; t)_B \frac{\sigma}{t^2 + \sigma^2}\, dt$$

$$\leqslant \omega_k(f; \sigma)_B + \frac{\sigma}{\pi} \int\limits_{\sigma}^{1} \frac{\omega_k(f; t)_B}{t^2}\, dt + \frac{\sigma}{\pi} \int\limits_1^{\infty} \frac{\omega_k(f; t)_B}{t^2}\, dt = I_1 + I_2 + I_3.$$

Так как функция $f(x) \in B$ почти всюду на $[0, \sigma]$ совпадает с некоторой функцией ограниченной вариации, то (например, см. [3, с. 140])

$$\omega_k(f;\sigma)_B = O(\sigma).$$

Третье слагаемое $I_3 \to 0$ при $\sigma \to 0$, кроме того, интеграл в третьем слагаемом сходится, т. е. является конечным числом. Из оценок для величин I_1, I_2, I_3 получаем утверждения теоремы 1.

При $f(x) \in L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ результаты аналогичного характера получены в работе [5]. В качестве характеристики свойств граничных функций рассмотрены наилучшие приближения целыми функциями экспоненциального типа.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ равномерная почти-периодическая функция и для нее выполнены условия* (2) *и* (3). *Тогда*

$$\Delta(g,\sigma)_B \leqslant C\left\{\sigma + \int\limits_0^\sigma \frac{\omega_k(f;t)}{t}\,dt + \sigma\int\limits_\sigma^1 \frac{\omega_k(f;t)}{t^2}\,dt\right\}.$$

Доказательство этой теоремы основывается на том же приеме, что и в доказательстве теоремы 1, нужно лишь вместо функции $f(x)$ взять $g(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\,dt$, а $U(x,\sigma)$ заменить на $V(x,\sigma)$.

Теорема 3. *Если гармоническая в верхней полуплоскости функция $U(x,\sigma)$ равномерно по σ $(\sigma > 0)$ удовлетворяет условию*

$$|U(x,\sigma)| \leqslant K,$$

а почти-периодическая функция $f(x)$ $(|f(x)| \leqslant K)$ — ее граничные значения в равномерной метрике, то

$$\omega_2(f;\sigma)_B \leqslant C\Delta(f;\sigma)_B. \tag{6}$$

$\lhd$ В силу теоремы Лагранжа для любого $\sigma > 0$ имеем

$$U(x,\sigma) - U(x,2\sigma) = \sigma U'_\sigma(x,\sigma+\theta\sigma) \qquad (0 < \theta = \theta(x,\sigma) < 1).$$

Поскольку функция $U'_z(x,z)$ в верхней полуплоскости также будет гармонической и ограниченной в полуплоскости $z > \sigma$, то применяя к ней принцип максимума для гармонических и ограниченных функций получим

$$\sup_x |U'_z(x,z)| \leqslant \frac{\Delta(f;\sigma)_B + \Delta(f;2\sigma)_B}{\sigma} \qquad (z \geqslant 2\sigma).$$

Поэтому в силу неравенства для производных от гармонических функций [1], имеем

$$\sup_x |U''_{\sigma\sigma}(x,3\sigma)| \leqslant K\frac{\Delta(f;\sigma)_B + \Delta(f;2\sigma)_B}{\sigma^2} \qquad (z \geqslant 2\sigma), \tag{7}$$

где K — константа, не зависящая от функции $f(x) \in B$ и $\sigma > 0$. Оценим вторую разность функции $f(x)$ с шагом σ:

$$\begin{gathered}|f(x) - 2f(x+\sigma) + f(x+2\sigma)| \leqslant |f(x) - U(x,3\sigma)| + 2|f(x+\sigma) - U(x+\sigma,3\sigma)| \\ +|f(x+2\sigma) - U(x+2\sigma,3\sigma)| + |U(x,3\sigma) + U(x+2\sigma,3\sigma) - 2U(x+\sigma,3\sigma)| \\ \leqslant 4\Delta(f;3\sigma)_B + \left\|\int\limits_0^\sigma d\theta_1 \int\limits_0^\sigma U''_{xx}(x+\theta_1+\theta_2,3\sigma)\,d\theta_2\right\|_B.\end{gathered}$$

Выше было доказано, что функция $U(x,\sigma)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е. является гармонической. Следовательно, в силу (7) получим

$$\omega_2(f;\sigma)_B \leqslant C_1\Delta(f;3\sigma)_B + \sigma^2 \sup_x |U''_{\sigma\sigma}(x,3\sigma)| \leqslant C_2\Delta(f;3\sigma)_B + \Delta(f;\sigma)_B + \Delta(f;2\sigma)_B.$$

Отсюда, если в последнем неравенстве использовать свойство (7), получаем

$$\omega_2(f;\sigma)_B \leqslant C_3\Delta(f;\sigma)_B. \ \rhd$$

В работе [3, с. 275] установлена оценка снизу величины $\omega_k(f^{(r)};h)_{L_p}$, имеющая при любом $1 \leqslant p \leqslant \infty$ вид

$$\omega_k\left(f^{(r)};\frac{1}{\sigma}\right)_{L_p} \geqslant C\sigma^r A_\sigma(f)_{L_p}, \qquad (8)$$

где $A_\sigma(f)_{L_p}$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ посредством целых функций степени не выше σ в заданной метрике $L_p(-\infty,\infty)$.

Из (6) с помощью оценки (8) при $r=0$, $k=2$ для функции $f(x)\in B$ и $\sigma>0$ легко можно установить, что

$$A_\sigma(f)_B \leqslant C\Delta(f;\sigma)_B.$$

В заключение отметим, что теоремы 1 и 2 ранее приведены автором без доказательства в работе [6].

Литература

1. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции.—М.–Л.: Гостехиздат, 1947.
2. *Бор Г.* Почти периодические функции.—М.: Книжный дом «Либроком», 2009.
3. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного.—М.: Физматгиз, 1960.
4. *Hill E., Tamarkin I.* On the absolute integrability of Fourier transforms // Fundam. Math.—1935.—Vol. 25.—P. 329–352.
5. *Тиман М. Ф.* Приближение функций, заданных на всей вещественной оси, целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Математика.—1969.—№2.—С. 89–101.
6. *Хасанов Ю. Х.* Об отклонении гармонических почти-периодических функций от их значений на границе // Матер. 17-й междунар. Саратовской зимней школы, посвящ. 150-летию со дня рождения В. А. Стеклова «Современные проблемы теории функций и их приложений».—Саратов, 2014.—С. 282–285.

Статья поступила 5 апреля 2015 г.

Хасанов Юсуфали Хасанович
Российско-Таджикский (славянский) университет,
профессор кафедры информатики и информационных систем
ТАДЖИКИСТАН, 734025, Душанбе, ул. М. Турсунзода, д. 30
E-mail: yukhas60@mail.ru

ON DEVIATION OF HARMONIC ALMOST PERIODIC FUNCTIONS FROM THEIR BOUNDARY VALUES

Khasanov Yu. Kh.

Some estimates of a measure of displacements of harmonic almost periodic functions from their boundary values are obtained. Uniform almost periodic functions are considered as boundary functions and the estimates are stated in terms of modulus of continuity.

Key words: almost periodic function, harmonic function, boundary values, modulus of continuity.