Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 1, С. 3–8

УДК **517.98+519.46**

О ПРОДОЛЖЕНИИ МАЖОРИРУЕМЫХ ОПЕРАТОРОВ УРЫСОНА[1]

Н. М. Абасов, М. А. Плиев

Александру Ефимовичу Гутману
к его пятидесятилетию

В работе изучается процедура продолжения ортогонально аддитивного отображения, мажорируемого латерально непрерывным оператором, с латерального идеала на все пространство. Показано, что продолженный ортогонально аддитивный оператор является мажорируемым и сохраняет латеральную непрерывность.

Ключевые слова: векторная решетка, решеточно нормированное пространство, мажорируемый оператор Урысона, латеральный идеал, латерально непрерывный оператор.

Введение

Ортогонально аддитивные операторы в векторных решетках впервые попали в поле зрения исследователей в начале 90-х годов прошлого века [1, 2]. Позже в работах [3–5] концепция ортогональной аддитивности была обобщена на отображения, заданные в решеточно нормированных пространствах. В настоящее время теория ортогонально аддитивных операторов является активной областью функционального анализа [6–13].

1. Предварительные сведения

Здесь мы приведем некоторые предварительные сведения, необходимые для дальнейшего. Цель настоящего параграфа — зафиксировать терминологию, обозначения и ввести требуемые понятия. Все необходимые сведения о векторных решетках и решеточно нормированных пространствах можно найти в [14, 15].

Все векторные решетки, рассматриваемые ниже в тексте, являются архимедовыми, а решеточно нормированные пространства — разложимыми. Элемент y решеточно нормированного пространства (V, E) называется *осколком* элемента $x \in V$, если $|y| \perp |x - y|$. Запись $y \sqsubseteq x$ выражает тот факт, что y — осколок x. Множество всех осколков элемента x обозначается через $\mathscr{F}_x$.

Пусть E и F — векторные решетки. Ортогонально аддитивный оператор $T : E \to F$ называется: *положительным*, если $Tx \geqslant 0$ в F для любого $x \in E$; *порядково ограниченным*, если T отображает порядково ограниченные множества в E в порядково ограниченные множества в F.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-91339_ННИО-а.

Порядково ограниченный, ортогонально аддитивный оператор $T : E \to F$ называется *абстрактным оператором Урысона*. Векторное пространство всех абстрактных операторов Урысона из E в F обозначается через $\mathscr{U}(E,F)$.

Пусть E — векторная решетка и X — векторное пространство. Ортогонально аддитивный оператор $T : E \to X$ называется *четным*, если $T(x) = T(-x)$ для любого $x \in E$. Если E, F — векторные решетки, то множество всех четных абстрактных операторов Урысона из E в F обозначается через $\mathscr{U}^{ev}(E,F)$. Отметим, что в случае порядковой полноты векторной решетки F пространство $\mathscr{U}^{ev}(E,F)$ отлично от нуля. Согласно [1, предложение 3.4] для любого $T \in \mathscr{U}(E,F)$ существует четный оператор $\widetilde{T} \in U_+^{ev}(E,F)$, заданный формулой

$$\widetilde{T}f = \sup\{|T|g : \, |g| \leqslant |f|\}.$$

Лемма 1.1 [11, лемма 3.2]. *Пусть E, F — векторные решетки и решетка F порядково полна. Тогда $\mathscr{U}^{ev}(E,F)$ — порядково полная векторная подрешетка в $\mathscr{U}(E,F)$.*

Пусть (V,E) и (W,F) — решеточно нормированные пространства. Оператор $T : V \to W$ называется *ортогонально аддитивным*, если $T(u+v) = Tu + Tv$ для любых $u, v \in V$, $u \perp v$. Ортогонально аддитивный оператор $T : V \to W$ называется *мажорируемым оператором Урысона*, если существует $S \in \mathscr{U}_+^{ev}(E,F)$ такой, что $\lvert Tv \rvert \leqslant S\lvert v \rvert$ для любого $v \in V$. В этом случае говорят, что S — *мажоранта* для T. Множество всех мажорант оператора T обозначается через $\mathrm{Domin}(T)$. Если в множестве $\mathrm{Domin}(T)$ существует наименьший элемент относительно порядка, индуцированного из $\mathscr{U}_+^{ev}(E,F)$, то он называется *наименьшей* или *точной* мажорантой T и обозначается через $\lvert T \rvert$. Множество всех мажорируемых операторов Урысона из V в W обозначается через $\mathscr{D}_U(V,W)$.

Пример 1.2. Пусть X, Y — нормированные пространства. Рассмотрим решеточно нормированные пространства $(X,\mathbb{R})$ и $(Y,\mathbb{R})$. Тогда отображение $T : X \to Y$ принадлежит $\mathscr{D}_U(X,Y)$ тогда и только тогда, когда существует четная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ такая, что $f(0) = 0$, множество $f(D)$ ограниченно в $\mathbb{R}$ для любого ограниченного подмножества $D \subset \mathbb{R}$ и для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\|Tx\| \leqslant f(\|x\|)$.

Пример 1.3. Пусть E, F — векторные решетки и решетка F порядково полна. Рассмотрим решеточно нормированные пространства (E,E) и (F,F), где векторная норма совпадает с модулем. Можно показать, что векторные пространства $\mathscr{D}_U(E,F)$ и $\mathscr{U}(E,F)$ совпадают. Действительно, если $T \in \mathscr{D}_U(E,F)$, то существует $S \in \mathscr{U}_+^{ev}(E,F)$ такой, что $|Tx| \leqslant S|x|$ для любого $x \in E$. Следовательно, оператор T порядково ограничен. Если же $T \in \mathscr{U}(E,F)$, то согласно [1, предложение 3.4] существует $S \in \mathscr{U}_+^{ev}(E,F)$ такой, что $|Tf| \leqslant S(f) \leqslant S(|f|)$ и $T \in \mathscr{D}_U(E,F)$.

2. Продолжение мажорируемого оператора Урысона

Если для линейного мажорируемого оператора в решеточно нормированном пространстве естественной областью определения является (bo)-идеал, то для ортогонально аддитивного оператора такой областью является в общем случае нелинейное множество, обладающее некоторой специфической структурой. Дадим точное определение.

Подмножество D решеточно нормированного пространства V называется *латеральным идеалом*, если выполняются следующие условия: 1) если $x \in D$, то $y \in D$ для любого $y \in \mathscr{F}_x$; 2) если $x, y \in D$, $x \perp y$, то $x + y \in D$.

Приведем некоторые примеры.

Пример 2.1. Пусть V — решеточно нормированное пространство. Каждый (bo)-идеал в V является латеральным идеалом.

Пример 2.2. Пусть V — решеточно нормированное пространство и $x \in V$. Тогда $\mathscr{F}_x$ — это латеральный идеал. Действительно, пусть $y \sqsubseteq x$ и $z \sqsubseteq y$. Тогда $|x-y| \perp |y|$ и $|y-z| \perp |z|$. Далее имеем

$$\begin{aligned}|x-z| \wedge |z| &= |x-y+y-z| \wedge |z| \leqslant \big(|x-y| + |y-z|\big) \wedge |z| \\ &\leqslant |x-y| \wedge |z| + |y-z| \wedge |z| \leqslant |x-y| \wedge |y| + |y-z| \wedge |z| = 0.\end{aligned}$$

Пусть теперь $y_1 \sqsubseteq x$, $y_2 \sqsubseteq x$ и $y_1 \perp y_2$. Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned}|x-y_1-y_2| \wedge |y_1| &\leqslant \big(|x-y_1| + |y_2|\big) \wedge |y_1| \leqslant |x-y_1| \wedge |y_1| + |y_2| \wedge |y_1| = 0;\\ |x-y_1-y_2| \wedge |y_2| &\leqslant \big(|x-y_2| + |y_1|\big) \wedge |y_2| \leqslant |x-y_2| \wedge |y_2| + |y_1| \wedge |y_2| = 0;\\ |x-y_1-y_2| \wedge |y_1+y_2| &= |x-y_1-y_2| \wedge \big(|y_1| + |y_2|\big) = |x-y_1-y_2| \wedge \big(|y_1| \vee |y_2|\big)\\ &= \big(|x-y_1-y_2| \wedge |y_1|\big) \vee \big(|x-y_1-y_2| \wedge |y_2|\big) = 0.\end{aligned}$$

Пример 2.3. Пусть V, W — решеточно нормированные пространства и $T \in \mathscr{D}_U(V,W)$. Тогда $\mathfrak{K}_T := \{x \in V : Tx = 0\}$ — латеральный идеал в V.

Лемма 2.4. *Пусть (V,E) — решеточно нормированное пространство и $D \subset V$. Если D — латеральный идеал в V, то латеральным идеалом в E будет множество $|D| := \big\{|x| : x \in D\big\}$.*

$\lhd$ Пусть $e_i = |x_i|$, $i \in \{1,2\}$, где $x_1, x_2 \in D$ и $e_1 \perp e_2$. Тогда

$$e_1 + e_2 = |x_1| + |x_2| = |x_1 + x_2| \in |D|.$$

Пусть теперь $e = |x| \in |D|$ и $f \sqsubseteq e$. Тогда $|x| = f + (|x| - f)$, и, воспользовавшись разложимостью векторной нормы в V, найдем такие элементы $x_1, x_2 \in V$, что $|x_1| = f$; $|x_2| = |x| - f$. Тогда x_1, x_2 — осколки элемента x, и в силу того, что D — латеральный идеал получаем $x_1, x_2 \in D$ и, следовательно, $f \in |D|$. $\rhd$

Следующая техническая лемма будет использована ниже.

Лемма 2.5. *Пусть (V,E) — решеточно нормированное пространство и D — латеральный идеал в V. Тогда для любого $x \in V$ множество $\mathscr{F}_x \cap D$ направлено вверх относительно отношения порядка $\sqsubseteq$.*

$\lhd$ Пусть $x_1, x_2 \in \mathscr{F}_x \cap D$. Тогда $|x_1|, |x_2| \in \mathscr{F}_{|x|} \cap |D|$. Элементы $|x_1|$ и $|x_2| - \big(|x_2| \wedge |x_2|\big)$ являются взаимно дизъюнктными осколками $|x|$, принадлежащими латеральному идеалу $|D|$, в силу чего $|x_1| + |x_2| - (|x_2| \wedge |x_2|) \in \mathscr{F}_{|x|} \cap |D|$, и найдется такой элемент $y \in \mathscr{F}_x \cap D$, что $x_i \sqsubseteq y$, $i \in \{1,2\}$. $\rhd$

Рассмотрим решеточно нормированное пространство V. Подмножество $D \subset V$ называется *латерально аддитивным*, если для любых $x, y \in D$ таких, что $x \perp y$, их сумма $x + y$ также принадлежит D.

Пусть V — решеточно нормированное пространство, D — латерально аддитивное подмножество V и X — действительное векторное пространство. Отображение $T\colon D \to X$ называется *ортогонально аддитивным*, если $T(x+y) = T(x) + T(y)$ для любых дизъюнктных элементов $x, y \in D$. Пусть теперь (W,F) — решеточно нормированное пространство над порядково полной векторной решеткой F и D — латерально аддитивное подмножество в (V,E). Ортогонально аддитивное отображение $T\colon D\to W$ называется *мажорируемым*, если найдется оператор $S\in\mathscr{U}^{ev}_+(E,F)$ такой, что $|Tx|\leqslant S|x|$ для любого $x\in D$.

Пусть (V,E) — решеточно нормированное пространство. Сеть $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\subset V$ называется *латерально сходящейся* к $x\in V$, если $x_\alpha\sqsubseteq x_\beta\sqsubseteq x$ для любых индексов $\alpha<\beta$ и $x_\alpha\xrightarrow{\text{bo}}x$. В этом случае будем писать $x_\alpha\xrightarrow{\text{lat}}x$.

Пусть (W,F) — другое решеточно нормированное пространство. Ортогонально аддитивный оператор $T:V\to W$ называется *латерально непрерывным* (*σ-латерально непрерывным*), если из соотношения $x_\alpha\xrightarrow{\text{lat}}x$ ($x_n\xrightarrow{\text{lat}}x$) следует, что $Tx_\alpha\xrightarrow{\text{bo}}Tx$ ($Tx_n\xrightarrow{\text{bo}}Tx$).

Сформулируем теперь основной результат статьи.

Теорема 2.6. *Пусть (V,E) — решеточно нормированное пространство, (W,F) — пространство Банаха — Канторовича над порядково полной векторной решеткой F, D — латеральный идеал в V и $T:D\to W$ — ортогонально аддитивное отображение, мажорируемое латерально непрерывным (σ-латерально непрерывным) оператором $S\in\mathscr{U}^{ev}_+(E,F)$. Тогда существует мажорируемый, латерально непрерывный оператор Урысона $\widetilde{T}_D\in\mathscr{D}_U(V,W)$ такой, что $\widetilde{T}_Dx=Tx$ для любого $x\in D$.*

$\lhd$ Зададим отображение $\widetilde{T}_D:V\to W$ формулой

$$\widetilde{T}_Dx=\underset{y\in\mathscr{F}_x\cap D}{bo\text{-}\lim}\,Ty. \tag{1}$$

Покажем, что отображение (1) задано корректно. В силу леммы 2.5, множество $\mathscr{F}_x\cap D$ направлено вверх и может быть представлено как $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, где $x_\alpha\sqsubseteq x_\beta$, $\alpha\leqslant\beta$ и Λ — некоторое индексное множество. Напомним некоторые полезные формулы:

$$(x_\beta-x_\alpha)\perp x_\alpha;\quad |x_\beta|=|x_\beta-x_\alpha|+|x_\alpha|;\quad S|x_\beta|=S|x_\beta-x_\alpha|+S|x_\alpha|.$$

Теперь воспользуемся следующими оценками:

$$|Tx_\beta-Tx_\alpha|=|T(x_\beta-x_\alpha)|\leqslant S\bigl(|x_\beta-x_\alpha|\bigr)=\bigl(S|x_\beta|-S|x_\alpha|\bigr)\xrightarrow{\text{o}}0.$$

Таким образом, сеть $(Tx_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ (bo)-фундаментальна и в силу полноты пространства W сходится к единственному пределу в W. Установим ортогональную аддитивность отображения $\widetilde{T}_D$. Возьмем произвольные элементы $v_1,v_2\in V$, $v_1\perp v_2$, и пусть $y\in\mathscr{F}_{v_1+v_2}\cap D$. Тогда можем написать $|y|\sqsubseteq(|v_1|+|v_2|)$, и согласно декомпозиционной лемме Рисса и тому факту, что $|D|$ — латеральный идеал, найдутся $e_1,e_2\in|D|$ такие, что $|y|=e_1+e_2$. В силу разложимости векторной нормы в V и того факта, что D — латеральный идеал в V, существуют элементы $y_1,y_2\in D$ такие, что $y=y_1+y_2$ и $y_1\perp y_2$. Таким образом, любой осколок $y\in\mathscr{F}_{v_1+v_2}\cap D$ представляется в виде суммы осколков $y_1\in\mathscr{F}_{v_1}\cap D$, $y_2\in\mathscr{F}_{v_2}\cap D$. Ясно, что сумма двух осколков указанного вида будет осколком вида $y\in\mathscr{F}_{v_1+v_2}\cap D$. Так как $Ty=Ty_1+Ty_2$, то, переходя к пределу в правой и левой частях по всем осколкам $y\in\mathscr{F}_{v_1+v_2}\cap D$, получаем, что $\widetilde{T}_D(v_1+v_2)=\widetilde{T}_Dv_1+\widetilde{T}_Dv_2$, устанавливая тем самым ортогональную аддитивность оператора $\widetilde{T}_D$. Пусть теперь x — произвольный элемент V и $y\in\mathscr{F}_v\cap D$. Мажорируемость оператора $\widetilde{T}_D$ вытекает из оценок $|Ty|\leqslant S|y|\leqslant S|x|$. Переходя к пределу в левой части по всем осколкам $y\in\mathscr{F}_v\cap D$, получаем $|\widetilde{T}_Dx|\leqslant S|x|$ для любого $x\in V$.

Покажем, наконец, что $\widetilde{T}_D$ является латерально непрерывным оператором, σ-непрерывность доказывается аналогично. Возьмем латерально сходящуюся сеть $(v_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\subset$

V такую, что $v_\alpha \xrightarrow{\mathrm{lat}} v$. Тогда можем написать

$$|\widetilde{T}_D v - \widetilde{T}_D v_\alpha| = |\widetilde{T}_D(v - v_\alpha)| \leqslant S|v - v_\alpha| = S(|v| - |v_\alpha|) = (S|v| - S|v_\alpha|) \xrightarrow{\mathrm{o}} 0,$$

и латеральная непрерывность оператора $\widetilde{T}_D$ установлена. $\rhd$

Литература

1. *Mazón J. M., Segura de León S.* Order bounded orthogonally additive operators // Rev. Roumaine Math. Pures Appl.—1990.—Vol. 35, № 4.—P. 329–353.
2. *Mazón J. M., Segura de León S.* Uryson operators // Rev. Roumaine Math. Pures Appl.—1990.—Vol. 35, № 5.—P. 431–449.
3. *Кусраев А. Г., Плиев М. А.* Ортогонально аддитивные операторы в решеточно нормированных пространствах // Владикавк. мат. журн.—1999.—Т. 1, вып. 3.—С. 33–43.
4. *Кусраев А. Г., Плиев М. А.* Слабое интегральное представление мажорируемого ортогонально аддитивного оператора // Владикавк. мат. журн.—1999.—Т. 1, вып. 4.—С. 22–39.
5. *Плиев М. А.* Мажорируемые операторы Урысона в пространствах со смешанной нормой // Владикавк. мат. журн.—2007.—Т. 9, вып. 3.—С. 47–57.
6. *Abasov N., Pliev M.* Order properties of the space of dominated Uryson operators // Int. J. of Math. Anal.—2015.—Vol. 9, № 45.—P. 2211–2219.
7. *Ben Amor M. A., Pliev M.* Laterally continuous part of an abstract Uryson operator // Int. J. of Math. Anal.—2013.—Vol. 7, № 58.—P. 2853–2860.
8. *Getoeva A., Pliev M.* Domination problem for orthogonally additive operators in lattice-normed spaces // Int. J. of Math. Anal.—2015.— Vol. 9, № 27.—P. 1341–1352.
9. *Gumenchuk A. V., Pliev M. A., Popov M. M.* Extensions of orthogonally additive operators // Math. Stud.—2014.—Vol. 41, № 2.—P. 214–219.
10. *Pliev M., Popov M.* Narrow orthogonally additive operators // Positivity.—2014.—Vol. 18, № 4.—P. 641–667.
11. *Pliev M., Popov M.* Dominated Uryson operators // Int. J. of Math. Anal.—2014.—Vol. 8, № 22.—P. 1051–1059.
12. *Pliev M.* Domination problem for narrow orthogonally additive operators // Positivity.—DOI 10.1007/s11117-016-0401-9.
13. *Pliev M. A., Weber M. R.* Disjointness and order projections in the vector lattices of abstract Uryson operators // Positivity.—DOI 10.1007/s11117-015-0381-1.
14. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
15. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—Dordrecht: Springer, 2006.

Статья поступила 20 января 2016 г.

Абасов Нариман Магамедович
МАТИ — Российский государственный
технологический университет им. К. Э. Циолковского,
доцент кафедры высшей математики
РОССИЯ, 121552, Москва, ул. Оршанская, 3
E-mail: `abasovn@mail.ru`

Плиев Марат Амурханович
Южный математический институт ВНЦ РАН,
старший научный сотрудник
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `plimarat@yandex.ru`

ON EXTENSION OF DOMINATED URYSON OPERATORS

Abasov N. M., Pliev M. A.

We investigate the procedure of extension of a dominated orthogonally additive map dominated by a laterally continuous operator from laterally ideal to the whole space. It is established that such operator admits an extension that is dominated and laterally continuous.

Key words: vector lattice, lattice-normed space, dominated Uryson operator, lateral ideal, lateral band, laterally continuous operator.