Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 1, С. 51–62

УДК **517.98**

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ ПОЛИНОМОВ, СОХРАНЯЮЩИХ ДИЗЪЮНКТНОСТЬ[1]

З. А. Кусраева

Александру Ефимовичу Гутману
в связи с его пятидесятилетием

Цель настоящей работы — дать характеризацию однородных полиномов в векторных решетках, сохраняющих дизъюнктность, и доказать для них теорему о мультипликативном представлении.

Mathematics Subject Classification (2010): 46A40, 47H60, 47H07.

Ключевые слова: степень векторной решетки; однородный полином, сохраняющий дизъюнктность; ортогональная аддитивность; решеточный полиморфизм; мультипликативное представление.

1. Введение

Изучение полиномов в бесконечномерных пространствах в значительной мере стимулировано исследованиями в области бесконечномерной голоморфности. В литературе достаточно хорошо представлены алгебраические свойства полиномов, а также взаимосвязи полиномов с геометрическими и линейно-топологическими свойствами банаховых пространств, см., например, [17].

В то же время, полиномы в векторных решетках обладают интересными порядковыми свойствами и вызывают растущий интерес исследователей, см., например, [22, 23]. Классы полиномов в банаховых решетках, определяемые в смешанных терминах нормы и порядка, имеют богатую структуру и заслуживают самостоятельного изучения [14]. Наибольший прогресс достигнут в изучении ортогонально аддитивных полиномов, см. [6–8, 11, 19, 26]. Эти результаты дают новые возможности для получения детальной информации о строении ортогонально аддитивных полиномов, с одной стороны, и дальнейших приложений в теории операторов в банаховых решетках, с другой.

Цель настоящей работы — исследовать класс полиномов в векторных решетках, сохраняющих дизъюнктность. Этот класс можно рассматривать как абстрактное описание наименьшего множества полиномов, которые можно сконструировать, комбинируя операции взвешенного сдвига, возведения в степень и суммирования.

Структура работы такова. Во втором параграфе вводятся основные понятия и формулируются необходимые для дальнейшего изложения теорема о факторизации ортогонально аддитивного оператора через линейный оператор и канонический полином, теорема о мультипликативном представлении решеточных полиморфизмов и теорема

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-51-53119 ГФЕН-а.

Мейера о строении полилинейных операторов, сохраняющих дизъюнктность. В третьем параграфе даются различные характеризации полинома, сохраняющего дизъюнктность. Основной инструмент здесь — *степень* $E^{s\odot}$ векторной решетки E и *канонический полином* $x \mapsto x^{s\odot} := x \odot \cdots \odot x \in E^{s\odot}$ $(x \in E)$. В частности, показано, что порядково ограниченный полином, сохраняющий дизъюнктность, факторизуется через линейный оператор, сохраняющий дизъюнктность, и канонический полином. В четвертом параграфе показано, что полученное описание полиномов, сохраняющих дизъюнктность, позволит распространить на них теорию А. Е. Гутмана [2, 18] линейных операторов, сохраняющих дизъюнктность, что приводит к результатам о мультипликативном представлении этого класса полиномов.

Общие свойства полиномов см. в [17]; необходимые сведения из теории операторов в векторных решетках см. в [10]. Все рассматриваемые векторные решетки предполагаются вещественными и архимедовыми.

2. Вспомогательные сведения

Введем основные понятия, используемые в дальнейшем. Приведем также необходимые сведения о полилинейных операторах в векторных решетках, большей частью хорошо известных в билинейном случае. Напомним, что *полилинейным* (или, точнее, *s-линейным,* $s \in \mathbb{N}$ — число переменных) называют оператор, линейный по каждой переменной.

Определение 2.1. Пусть E и F — векторные решетки и $1 \leqslant s$ — целое число. Отображение $P : E \to F$ называется *однородным полиномом степени s* (или *s-однородным полиномом*), если существует s-линейный оператор $\varphi : E^s \to F$ такой, что

$$P(x) = \varphi(x, \dots, x) \quad (x \in E). \tag{2.1}$$

Равенство (2.1) можно переписать в виде $P = \varphi \circ \Delta_s$, где $\Delta_s : E \to E^s$ действует по правилу $\Delta_s : x \mapsto (x, \dots, x) \in E^s$. Для любого полинома $P : E \to F$ существует и притом единственный симметричный s-линейный оператор $\varphi : E^s \to F$ такой, что выполняется $P = \varphi \circ \Delta_s$. Этот оператор φ называется *порождающим* для полинома P и часто обозначается символом $\check{P}$, см. [17].

Определение 2.2. Однородный полином $P : E \to F$ называют *ортогонально аддитивным*, если для любых $x, y \in E$ выполняется

$$|x| \wedge |y| = 0 \implies P(x + y) = P(x) + P(y).$$

Возьмем $s \in \mathbb{N}$ векторные решетки $E_1, \dots, E_s$ и фиксированный набор $(a_1, \dots, a_s)$, где $a_i \in E_i$ $(i = 1, \dots, s)$. Обозначим $\overline{a}_k := (a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_s)$. Для отображения $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_s \to F$ определим оператор $\varphi_{\overline{a}_k} : E_k \to F$ формулой

$$\varphi_{\overline{a}_k} : x_k \mapsto \varphi(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_s) \quad (x_k \in E_k). \tag{2.2}$$

В этих обозначениях $k := 1, \dots, s$, причем возникающие при $k = 1$ и $k = s$ символы a_0 и a_{s+1} опускаются. Положительность s-линейного оператора $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_s$ означает, что линейный оператор $\varphi_{\overline{a}_k}$ положителен при всех $k := 1, \dots, s$ и $0 \leqslant a_i \in E_i$, $i \neq k$. Как обычно, $\varphi \leqslant \psi$ означает, что $\psi - \varphi \geqslant 0$. Обозначим символом $L^{\sim}({}^sE, F)$ упорядоченное векторное пространство симметричных s-линейных операторов из E^s в F.

Определение 2.3. Однородный полином $P : E \to F$ называют *положительным* и пишут $P \geqslant 0$, если положительным является порождающий его полилинейный оператор, т. е. $\check{P}(x_1, \dots, x_s) \geqslant 0$ для любых $x_1, \dots, x_s \in E_+$. При этом $P \leqslant Q$ означает, что $Q - P \geqslant 0$.

Всюду далее множество s-однородных порядково ограниченных ортогонально аддитивных полиномов из E в F будем обозначать символом $\mathscr{P}_o^{\sim}({}^sE, F)$. Легко видеть, что $(\mathscr{P}_o^{\sim}({}^sE, F), \leqslant)$ — упорядоченное векторное пространство. При $s = 1$ получаем упорядоченное векторное пространство порядково ограниченных линейных операторов из E в F, которое принято обозначать символом $L^{\sim}(E, F)$.

Определение 2.4. Полилинейный оператор $\varphi : E_1 \times \dots \times E_n \to F$ называют *решеточным полиморфизмом* или, точнее, *решеточным s-морфизмом,* если для любого $k := 1, \dots, s$ и любых $0 \leqslant a_i \in E_i$, $i \neq k$, оператор $\varphi_{\overline{a}_k}$ является решеточным гомоморфизмом из E в F. Полилинейный оператор $\varphi : E^s \to F$ называют *ортосимметричным,* если $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$, как только $x_i \perp x_j$ для какой-нибудь пары индексов $i \neq j$ из $\{1, \dots, n\}$.

Определение 2.5. Пусть $2 \leqslant s \in \mathbb{N}$ и E — архимедова векторная решетка. Пара $(E^{s\odot}, \odot_s)$ называется *s-ой степенью* E, если выполнены следующие условия:

(1) $E^{s\odot}$ — архимедова векторная решетка;

(2) $\odot_s : E^s \to E^{s\odot}$ — ортосимметричный решеточный s-морфизм, называемый *каноническим полиморфизмом* или *каноническим s-морфизмомом* решетки E;

(3) для любой архимедовой векторной решетки F и любого ортосимметричного решеточного s-морфизма $\varphi : E^s \to F$ существует единственный решеточный гомоморфизм $S : E^{s\odot} \to F$ такой, что $\varphi = S \circ \odot_s$.

Это определение введено в [13, определение 3.1]. Там же установлено, что для любой архимедовой векторной решетки E и любого натурального $2 \leqslant s \in \mathbb{N}$ существует единственная с точностью до решеточного изомофизма s-ая степень $(E^{s\odot}, \odot_s)$, см. [13, теорема 3.2]. Для удобства полагают $E^{1\odot} = E$ и $\odot_1 = I_E$. Далее будем писать $\odot$ вместо $\odot_s$ и $x_1 \odot \dots \odot x_s$ вместо $\odot_s(x_1, \dots, x_s)$.

Стоит различать два отображения $(\cdot)^{s\odot}$, $\iota : E \to E^{s\odot}$, определяемые формулами

$$(\cdot)^{s\odot} : x \mapsto x^{s\odot} := \underbrace{x \odot \dots \odot x}_{s \text{ раз}}, \quad \iota : x \mapsto x \odot \underbrace{|x| \odot \dots \odot |x|}_{s-1 \text{ раз}}. \tag{2.3}$$

Первое из них — специальный ортогонально аддитивный полином, порождаемый каноническим s-морфизмом $\odot$ и называемый *каноническим полиномом* решетки E. Он играет роль отсутствующей в векторной решетке степенной функции. Второе является нечетной ортогонально аддитивной функцией и осуществляет порядковый (нелинейный) изоморфизм из E в $E^{s\odot}$, причем ι будет биекцией, если E равномерно полна. Заметим также, что эти отображения совпадают на конусе положительных элментов E_+.

Лемма 2.6. *Для произвольной векторной решетки E справедливы утверждения:*

(1) *для любого $u \in E^{s\odot}$ существует такой элемент $e_0 \in E_+$, что для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $x_{i,1}, \dots, x_{i,n} \in E$ $(i := 1, \dots, s)$ так, что*

$$\left| u - \sum_{j=1}^{n} x_{1,j} \odot \dots \odot x_{s,j} \right| \leqslant \varepsilon e_0^{s\odot};$$

(2) *для любого $u \in E^{s\odot}$ существует такой элемент $e \in E_+$, что $|u| \leqslant e^{s\odot}$;*

(3) *для любых $x_1, \dots, x_s \in E$ выполняется $x_1 \odot \dots \odot x_s = 0$ в том и только в том случае, когда $|x_1| \wedge \dots \wedge |x_s| = 0$;*

(4) *для каждого $0 < u \in E^{s\odot}$ существует $e \in E_+$ такой, что $0 < e^{s\odot} \leqslant u$.*

$\lhd$ Доказательство утверждений (1), (3) и (4) проводится по той же схеме, что и в [15, теорема 2.1], используя определение *фремлиновского тензорного произведения* $E_1 \bar{\otimes} \ldots \bar{\otimes} E_s$ векторных решеток $E_1, \ldots, E_s$ при $s \geqslant 2$ и его свойства (a), (b) и (c) из [25, § 2]. Если $E_1 = \ldots = E_s$, то $E^{s\odot}$ определяется как фактор-решетка векторной решетки $E_1 \bar{\otimes} \cdots \bar{\otimes} E_s$ по равномерно замкнутому идеалу, порожденному элементами вида $x_1 \otimes \cdots \otimes x_s$, где для некоторой пары индексов $1 \leqslant i, j \leqslant s$ выполняется $x_i \perp x_j$. Утверждение (2) легко вытекает из (1). В самом деле, если $x_{i,j}$, e_0 и ε — те же, что и в (1), и положим $e := sn\varepsilon\big(e_0 + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} |x_{i,j}|\big)$, то $|u| \leqslant e^{s\odot}$. $\rhd$

Для однородных ортогонально аддитивных полиномов справедлива следующая *теорема о факторизации*:

Теорема 2.7. *Пусть E и F — векторные решетки, причем, по меньшей мере, одна из них равномерно полна. Тогда для любого порядково ограниченного ортогонально аддитивного полинома $P : E \to F$ существует единственный порядково ограниченный линейный оператор $T : E^{s\odot} \to F$ такой, что имеет место представление*

$$P(x) = T(x^{s\odot}) = T(\underbrace{x \odot \cdots \odot x}_{s \text{ раз}}) \quad (x \in E). \tag{2.4}$$

Более того, соответствие $P \longleftrightarrow T$ является изоморфизмом упорядоченных векторных пространств $\mathscr{P}_o^{\sim}({}^sE, F)$ и $L^{\sim}(E^{s\odot}, F)$.

$\lhd$ Доказательство см. [6, следствие 3]. $\rhd$

Теорема 2.8. *Предположим, что в универсальном пополнении F^u векторной решетки F фиксирована структура f-алгебры с единицей и умножение обозначено символом $\bullet$. Для произвольного решеточного n-морфизма $\varphi : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ существуют n решеточных гомоморфизмов $S_i : E_i \to F^u$ $(i := 1, \ldots, n)$ таких, что*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = S_1(x_1) \bullet \ldots \bullet S_n(x_n) \quad (x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n).$$

Если, сверх сказанного, $E := E_1 = \ldots = E_n$ и полиморфизм φ симметричен, то в этом представлении можно взять $S := S_1 = \ldots = S_n$, т. е. имеет место представление

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = S(x_1) \bullet \ldots \bullet S(x_n) \quad (x_1, \ldots, x_n \in E).$$

$\lhd$ Доказательство проводится аналогично билинейному случаю (см. [5, теорема 3.2], а также [21, теорема 3.12.A.3]). $\rhd$

Следствие 2.9. *Пусть E и F — векторные решетки. Для произвольного симметричного решеточного s-морфизма $\varphi : E^s \to F$ существуют векторная решетка G и решеточный гомоморфизм $S : E \to G$ такие, что $G^{s\odot} \subset F$ и имеет место представление*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = S(x_1) \odot \ldots \odot S(x_n) \quad (x_1, \ldots, x_n \in E).$$

$\lhd$ Пусть $S : E \to F^u$ — решеточный гомоморфизм из теоремы 2.8 и положим $G := S(E)$. Тогда G — векторная подрешетка решетки F^u, а отображение $\varphi : (u_1, \ldots, u_s) \mapsto u_1 \bullet \ldots \bullet u_s$ представляет собой ортосимметричный решеточный s-морфизм из G^s в F. В силу условия (3) определения 2.5 существует единственный решеточный гомоморфизм $h : G^{s\odot} \to F$ такой, что $\varphi = h \circ \odot_s$. Если $h(u) = 0$ и $0 < |u| \in G^{s\odot}$, то существует $v \in G_+$ такой, что $0 < v \odot \ldots \odot v \leqslant u$ (см. [15, теорема 2.1 (4)]). Следовательно, $v \bullet \ldots \bullet v = h(v \odot \ldots \odot v) \leqslant h(|u|) = |h(u)| = 0$ и получаем противоречие $v = 0$. Тем самым гомоморфизм h инъективен и, так как степень векторной решетки определяется с точностью до решеточного изоморфизма, можем отождествить $G^{s\odot}$ с подрешеткой в F. $\triangleright$

Следствие 2.10. *Решеточный полиморфизм ортосимметричен в том и только в том случае, когда он симметричен.*

$\triangleleft$ Из следствия 2.9 видно, что симметричный полиморфизм ортосимметричен. Обратное верно для любого положительного полилинейного оператора, см., например, [12, теорема 2] и [16, следствие 2]. $\triangleright$

Определение 2.11. Полилинейный оператор $\varphi : E_1 \times \dots \times E_s \to F$ называется *сохраняющим дизъюнктность*, если линейный оператор $\varphi_{\overline{a}_k} : E_k \to F$, $k = 1, \dots, s$, сохраняет дизъюнктность, каковы бы ни были фиксированные $a_i \in E_i$, $i \neq k$, т. е.

$$(\forall\, x, y \in E_k) \quad x \perp y \Rightarrow \varphi_{\overline{a}_k}(x) \perp \varphi_{\overline{a}_k}(y) \quad (k = 1, \dots, s).$$

Теорема 2.12 (теорема Мейера для полилинейных операторов). *Пусть $E_1, \dots, E_s$ и F — векторные решетки, а φ — порядково ограниченный s-линейный оператор из $E_1 \times \dots \times E_s$ в F, сохраняющий дизъюнктность. Тогда φ имеет положительную часть φ^+, отрицательную часть φ^- и модуль $|\varphi|$, являющиеся решеточными полиморфизмами. Более того, $\varphi^+(x_1, \dots, x_s) = (\varphi(x_1, \dots, x_s))^+$ и $\varphi^-(x_1, \dots, x_s) = (\varphi(x_1, \dots, x_s))^-$ для всех $0 \leqslant x_i \in E_i$ и $|\varphi(x_1, \dots, x_s)| = |\varphi|(|x_1|, \dots, |x_s|)$ для всех $x_i \in E_i$ $(i := 1, \dots, s)$.*

$\triangleleft$ Доказательство повторяет рассуждения из [4, теорема 3.4], относящиеся к билинейному случаю. $\triangleright$

3. Полиномы, сохраняющие дизъюнктность

Введем теперь основной объект изучения. Пусть E и F — векторные решетки. Напомним, что все векторные решетки предполагаются вещественными и архимедовыми.

Определение 3.1. Однородный полином $P : E \to F$ степени s называют *сохраняющим дизъюнктность* (соответственно, *решеточным полиморфизмом*), если таковым является порождающий его симметричный полилинейный оператор $\check{P} : E^s \to F$, см. определения 2.4 и 2.11.

Предложение 3.2 (теорема Мейера для полиномов). *Пусть E и F — векторные решетки. Пусть $P : E \to F$ — порядково ограниченный ортогонально аддитивный s-однородный полином, сохраняющий дизъюнктность. Тогда P имеет положительную часть P^+, отрицательную часть P^- и модуль $|P|$, являющиеся полиморфизмами. Более того, $P^+(x) = (Px)^+$, $P^-(x) = (Px)^-$ и $|P|(x) = |P(x)|$ для $x \in E_+$.*

$\triangleleft$ В силу определений 2.3, 2.4 и 3.1 $P \to \check{P}$ устанавливает изоморфизм упорядоченных векторных пространств $\mathscr{P}_o^{\sim}({}^sE, F)$ и $L^{\sim}({}^sE, F)$. Поэтому первая часть требуемого вытекает непосредственно из теоремы 2.12. Кроме того, для любого $x \in E_+$ имеем $P^+(x) = \check{P}^+(x, \dots, x_s) = \check{P}(x, \dots, x_s)^+ = P(x)^+$. Аналогично для P^- и $|P|$. $\triangleright$

Замечание 3.3. Дж. Лоан в своей диссертации [23] определил полиморфизм соотношением $|P(x)| = P(|x|)$ $(x \in E)$. При этом он привел пример полиморфного полинома P, для которого порождающий полилинейный оператор $\check{P}$ не является решеточным полиморфизмом в смысле определения 3.1 (см. [23, предложение 4.22, примеры 4.23 и 4.24]). Дж. Лоан [23, предложение 4.27]) нашел также необходимые и достаточные условия на P, при которых $\check{P}$ является решеточным полиморфизмом: для любого натурального $n \leqslant s$ выполняется $|\hat{d}^n P(x)(y)| = \hat{d}^n P(x)(|y|)$ $(x \in E_+,\, y \in E)$, где $\hat{d}^n P(x)y$ —

n-я однородная производная P в точке x по направлению y определяется формулой $\hat{d}^n P(x)(y) = \binom{s}{n}\varphi(x^{s-n}, y^n)$.

Лемма 3.4. *Для порядково ограниченного ортогонально аддитивного однородного полинома $P : E \to F$ равносильны условия:*

(1) P — *решеточный полиморфизм;*

(2) $P(x \vee y) = P(x) \vee P(y)$ *для всех* $x, y \in E_+$;

(3) $P(x \wedge y) = P(x) \wedge P(y)$ *для всех* $x, y \in E_+$;

(4) $x \wedge y = 0$ *влечет* $P(x) \wedge P(y) = 0$ *для всех* $x, y \in E_+$.

$\lhd$ Пусть P — решеточный полиморфизм, т. е. по определению 3.1 решеточным полиморфизмом является $\check{P}$. Решеточный полиморфизм $\check{P}$ будет ортосимметричным, так как он симметричен, см. следствие 2.10. В то же время, порядково ограниченный однородный полином — ортогонально аддитивен, если только порождающий его полилинейный оператор ортосимметричен, см. [6, лемма 4]. Следовательно, P ортогонально аддитивен. В силу условия (3) определения 2.5 существует единственный решеточный гомоморфизм $T : E^{s\odot} \to F$ такой, что $\check{P} = T \circ \odot_s$. Отсюда выводим

$$P(x \wedge y) = T((x \wedge y)^{s\odot}) = T(x^{s\odot} \wedge y^{s\odot}) = T(x^{s\odot}) \wedge T(y^{s\odot}) = P(x) \wedge P(y),$$

и тем самым (1) $\Rightarrow$ (2). Заменив в этих рассуждениях $\wedge$ на $\vee$, получим (1) $\Rightarrow$ (3). Кроме того, очевидна импликация (3) $\Rightarrow$ (4). Остается доказать, что (2) $\Rightarrow$ (1) и (4) $\Rightarrow$ (1).

Предположим, что выполнено (2). Без ограничения общности можно считать, что F равномерно полна. (В противном случае в наших рассуждениях заменим F на F^{ru}). Согласно теореме 2.7 имеет место представление $P = T \circ \odot \circ \Delta_s$ для единственного порядково ограниченного линейного оператора T из $E^{s\odot}$ в F. Возьмем произвольные $u, v \in E^{s\odot}_+$ и докажем, что $T(u \vee v) = Tu \vee Tv = 0$. Пусть E^{ru} — равномерное пополнение E в смысле [24]. Ввиду полноты F существует единственное продолжение P до порядково ограниченного ортогонально аддитивного s-однородного полинома $\widehat{P} : E^{ru} \to F$, см. [6, лемма 3]. При этом $\widehat{P}(x \vee y) = \widehat{P}(x) \vee \widehat{P}(y)$ для всех $x, y \in E^{ru}_+$. Вновь по теореме 2.7 $\widehat{P} = \widehat{T} \circ \odot \circ \Delta_s$ для единственного порядково ограниченного линейного оператора $\widehat{T}$ из $(E^{ru})^{s\odot}$ в F. В силу единственности степени векторной решетки с точностью до решеточного изоморфизма можем считать $E^{s\odot}$ подрешеткой $(E^{ru})^{s\odot}$, а канонический s-морфизм решетки E — совпадающим с ограничением на E^s канонического s-морфизма решетки E^{ru}. Теперь видно, что $T(u \vee v) = \widehat{P}(x \vee y) = \widehat{P}(x) \vee \widehat{P}(y) = T(x) \vee T(y)$. Итак, установлена импликация (2) $\Rightarrow$ (1); (4) $\Rightarrow$ (1) обосновывается аналогичными рассуждениями. $\rhd$

Лемма 3.5. *Полилинейный оператор $\varphi : E_1 \times \dots \times E_s \to F$ сохраняет дизъюнктность в том и только том случае, когда $|\varphi(x_1, \dots, x_s)| = |\varphi(|x_1|, \dots, |x_s|)|$ $(\forall\, x_i \in E_i,\ i = 1, \dots, s)$.*

$\lhd$ Доказательство аналогично билинейному случаю (см. [4, предложение 3.2]). $\rhd$

Лемма 3.6. *Пусть φ — s-линейный порядково ограниченный оператор. Тогда эквивалентны следующие условия:*

(1) φ *сохраняет дизъюнктность;*

(2) $\varphi(x_1, \dots, x_s) \perp \varphi(y_1, \dots, y_s)$, *если существует* $j \in [1, s]$ *такой, что* $x_j \perp y_j$.

$\lhd$ Пусть оператор φ сохраняет дизънктность. Возьмем $x_j \perp y_j$ для некоторого $j \in [1, s]$ и положим $u_i := |x_i| + |y_i|$ $(i \neq j)$. Тогда, используя лемму 3.5 и предложение 3.3, выводим:

$$|\varphi(x_1, \dots, x_s)| \wedge |\varphi(y_1, \dots, y_s)| = |\varphi(|x_1|, \dots, |x_s|)| \wedge |\varphi(|y_1|, \dots, |y_s|)|$$
$$\leqslant |\varphi|(u_1, \dots, u_{j-1}, |x_j|, u_{j+1}, \dots, u_s) \wedge |\varphi|(u_1, \dots, u_{j-1}, |y_j|, u_{j+1}, \dots, u_s) = 0.$$

Тем самым, (1) $\Rightarrow$ (2), а справедливость импликации (2) $\Rightarrow$ (1) очевидна. $\rhd$

Лемма 3.7. *Пусть E и F — векторные решетки. Если $T : E^{s\odot} \to F$ — порядково ограниченный линейный оператор, то для однородного ортогонально аддитивного полинома $P = T \circ \odot_s \circ \Delta_s : E \to F$ эквиваленты следующие утверждения:*

(1) *T сохраняет дизъюнктность;*

(2) *P сохраняет дизъюнктность;*

(2) *$x \perp y \Rightarrow Px \perp Py$ для всех $x, y \in E$.*

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна, а (2) $\Rightarrow$ (3) следует из леммы 3.6. Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) выводится так же, как и в лемме 3.4. $\rhd$

Лемма 3.8. *Однородный полином $P : E \to F$ степени s между векторными решетками ортогонально аддитивен тогда и только тогда, когда $\hat{d}^n P(x)(y) = 0$ для любых дизъюнктных $x, y \in E$ и всех $1 \leqslant n < s$.*

$\lhd$ Напомним, что $\hat{d}^n P(x)(y) = \binom{s}{n}\varphi(x^{s-n}, y^n)$, где $\varphi := \check{P}$. Пусть P ортогонально аддитивен, а $x, y \in E$ дизъюнктны. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ элементы x и ty также дизъюнктны, поэтому $P(x + ty) = P(x) + t^s P(y)$. В то же время,

$$P(x + ty) = P(x) + t^s P(y) + \sum_{n=1}^{s-1} \tbinom{s}{n}\varphi(x^{s-nj}, y^n)t^n.$$

Отсюда видно, что для любого $t \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$s\varphi(x^{s-1}, y)t + \tbinom{s}{2}\varphi(x^{s-2}, y^2)t^2 + \ldots + \tbinom{s}{s-1}\varphi(x, y^{s-1})t^{s-1} = 0.$$

Разделив на $st \neq 0$ и обозначив $a := |\varphi(x^{s-2}, y^2)|\binom{s}{2}/s + \ldots + |\varphi(x, y^{s-1})|\binom{s}{s-1}/s$, приходим к оценке $|\varphi(x^{s-1}, y)| \leqslant ta$, справедливой для всех ненулевых $t \in [-1, 1]$. В частности, $n|\varphi(x^{s-1}, y)| \leqslant a$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и ввиду архимедовости F получаем $\varphi(x^{s-1}, y) = 0$. Повторяя эти рассуждения, шаг за шагом выводим $\varphi(x^{s-2}, y^2) = 0, \ldots, \varphi(x, y^{s-1}) = 0$. Обратное утверждение очевидно. $\rhd$

Теорема 3.9. *Пусть E и F — векторные решетки, $P : E \to F$ — порядково ограниченный однородный полином степени s. Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *P сохраняет дизъюнктность;*

(2) *$x \perp y$ влечет $\hat{d}^n P(x)(y) = 0$ и $Px \perp Py$ для всех $x, y \in E$ и $1 \leqslant n < s$;*

(3) *P ортогонально аддитивен и $x \perp y$ влечет $Px \perp Py$ для всех $x, y \in E$;*

(4) *существуют векторная решетка G и решеточные гомоморфизмы $S_1, S_2 : E \to G$ такие, что $G^{s\odot} \subset F$, $S_1(E) \perp S_2(E)$ и $Px = (S_1x)^{s\odot} - (S_2x)^{s\odot}$ для всех $x \in E$;*

(5) *существует сохраняющий дизъюнктность порядково ограниченный линейный оператор $T : E^{s\odot} \to F$ такой, что $Px = T(x^{s\odot})$ для всех $x \in E$.*

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (5). В силу теоремы Мейера для полиномов P имеет положительную P^+ и отрицательную часть P^- и модуль $|P|$, являющиеся полиморфизмами. В силу условия (3) из определения 2.5 существуют решеточные гомоморфизмы $T_1, T_2 : E^{s\odot} \to F$ такие, что $P^+(x) = T_1(x^{s\odot})$ и $P^-(x) = T_2(x^{s\odot})$ для всех $x \in E$. Определим линейный регулярный оператор $T : E^{s\odot} \to F$ равенством $T := T_1 - T_2$ и заметим, что T сохраняет дизъюнктноть и имеет место представление $P(x) = T(x^{s\odot})$ $(x \in E)$.

(5) $\Rightarrow$ (4). Положим $T_1 := T^+$, $T_2 := T^-$ и $T_0 := |T|$. Отображение $x \mapsto T_k(x_1 \odot \cdots \odot x_s)$ является симметричным решеточным полиморфизмом из E^s в F. В силу следствия 2.8 существуют векторная решетка G_k и решеточный гомоморфизм $S_k : E \to G$ такие, что $G_k^{s\odot} \subset F$ и имеет место представление $T_k(x_1 \odot \cdots \odot x_s) = S_k(x_1) \odot \cdots \odot S(x_n)$ для всех $x_1, \ldots, x_n \in E$ и $k = 0, 1, 2$. Более того, $G_1 \cup G_2 \subset G_0$ и $G_1 \perp G_2$. Оператор $S := S_1 - S_2$

действует из E в $G := G_0$, сохраняет дизъюнктность, и для любого $x \in E$ выполняется $T(x^{s\odot}) = T_1(x^{s\odot}) - T_2(x^{s\odot}) = S_1(x)^{s\odot} - S_2(x)^{s\odot}$.

(4) $\Rightarrow$ (3). Если выполнено (4), то P ортогонально аддитивен, так как ортогонально аддитивен полином $x \mapsto x^{s\odot}$ из E в $E^{s\odot}$. Кроме того, для дизъюнктных x и y элементы $x^{s\odot}$ и $y^{s\odot}$ также дизъюнктны, следовательно, $|x^{s\odot} - y^{s\odot}| = |x^{s\odot} + y^{s\odot}|$. Отсюда выводим

$$|P(x) - P(y)| = |T(x^{s\odot}) - T(y^{s\odot})| = |T(x^{s\odot} - y^{s\odot})| = |T(|x^{s\odot} - y^{s\odot}|)|$$
$$= |T(|x^{s\odot} + y^{s\odot}|)| = |T(x^{s\odot} + y^{s\odot})| = |P(x) + P(y)|,$$

что и означает дизъюнктность $P(x)$ и $P(y)$.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3). Эти эквивалентности следуют из лемм 3.7 и 3.8. $\rhd$

Следствие 3.10. *Пусть E и F — векторные решетки, $P : E \to F$ — однородный полином степени s. Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *P — полиморфизм;*

(2) *P ортогонально аддитивен и $P(x \vee y) = P(x) \vee P(y)$ для всех $x, y \in E_+$;*

(3) *P ортогонально аддитивен и $P(x \wedge y) = P(x) \wedge P(y)$ для всех $x, y \in E_+$;*

(4) *P ортогонально аддитивен и $x \wedge y = 0$ влечет $P(x) \wedge P(y) = 0$ для всех $x, y \in E$;*

(5) *существует решеточный гомоморфизм $T : E^{s\odot} \to F$ такой, что справедливо представление $Px = T(x^{s\odot})$ для всех $x \in E$;*

(6) *существуют векторная решетка G и решеточный гомоморфизм $S : E \to G$ такие, что $G^{s\odot} \subset F$ и имеет место представление $Px = (Sx)^{s\odot}$ для всех $x \in E$.*

$\lhd$ Следует непосредственно из теоремы 3.9, предложения 3.2 и леммы 3.4 $\rhd$

4. Мультипликативное представление

Всюду в этом параграфе E и F — фундаменты расширенных K-пространств $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$. В пространствах $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ зафиксируем порядковые единицы $\mathbb{1}_{\mathscr{E}}$ и $\mathbb{1}_{\mathscr{F}}$, а также мультипликативные структуры, превращающие эти пространства в f-алгебры с единицами $\mathbb{1}_{\mathscr{E}}$ и $\mathbb{1}_{\mathscr{F}}$ соответственно. Напомним, что в данной ситуации ортоморфизмы представляют собой операторы умножения и поэтому будут отождествляться с соответствующими мультипликаторами.

Для произвольного $f \in \mathscr{E}$ существует единственный элемент $g \in \mathscr{E}$, для которого $fg = [f]\mathbb{1}_{\mathscr{E}}$ и $[f]^{\perp}g = 0$, где $[f]$ — проектор на полосу $\{f\}^{\perp\perp}$. Этот элемент g будем обозначить символом $1/f := \mathbb{1}_{\mathscr{E}}/f$. Произведение $e(1/f)$ короче обозначается символом e/f. Идеал в K-пространстве $\mathscr{E}$, порожденный элементом $1 := \mathbb{1}_{\mathscr{E}}$, обозначается через $\mathscr{E}(\mathbb{1})$.

Будем обозначать через $\mathfrak{P}(\mathscr{E})$ булеву алгебру порядковых проекторов в векторной решетке E. Пусть $h : \mathfrak{P}(\mathscr{E}) \to \mathfrak{P}(\mathscr{F})$ — булев гомоморфизм и обозначим символом $\mathscr{E}(1, h)$ h-замыкание идеала $\mathscr{E}_{\mathbb{1}}$, порожденного в $\mathscr{E}$ единицей $\mathbb{1}$, т. е. множество всех элементов $x \in \mathscr{E}$, представимых в виде $x = o\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n x_n$, где (x_n) — произвольная последовательность в $\mathscr{E}_{\mathbb{1}}$ и π_n — счетное разбиение единицы в $\mathfrak{P}(\mathscr{E})$ такое, что $(h(\pi_n))$ — разбиение единицы в $\mathfrak{P}(\mathscr{F})$, см. предложения 5.6.3 и 5.6.4 в [18]. Очевидно, что $\mathscr{E}(\mathbb{1}, h)$ — идеал в $\mathscr{E}$.

Определение 4.1. *Тенью* оператора $P : E \to F$ называем отображение $\mathrm{sh}(P) : \mathfrak{P}(\mathscr{E}) \to \mathfrak{P}(\mathscr{F})$, определенное формулой $\mathrm{sh}(\pi) = [P(\pi(E))]$. Тем самым, $\mathrm{sh}(\pi)$ — порядковый проектор на полосу $(P\pi(E))^{\perp\perp}$.

Лемма 4.2. *Пусть E и F — векторные решетки с проекциями. Ортогонально аддитивный полином $P : E \to F$ сохраняет дизъюнктность в том и только том случае, когда* $\mathrm{sh}(P)$ *— булев гомоморфизм.*

$\lhd$ Остаются в силе те же рассуждения, что и в [18, п. 5.4.2] (или [3, п. 5.2.2 (1)]) для случая линейного оператора. При этом вместо линейности работает ортогональная аддитивность. $\rhd$

Лемма 4.3. *Для произвольного кольцевого гомоморфизма $h : \mathfrak{P}(\mathscr{E}) \to \mathfrak{P}(\mathscr{F})$ существует единственный регулярный оператор $S_h : \mathscr{E}(1,h) \to \mathscr{F}$ такой, что тень S_h совпадает с h и $S_h(\mathbb{1}_{\mathscr{E}}) = h(\mathbb{1})\mathbb{1}_{\mathscr{F}}$. Более того, $\mathscr{E}(1,h)$ является f-подалгеброй $\mathscr{E}$, а оператор S_h мультипликативен, т. е. $S_h(xy) = S_h(x)S_h(y)$ для всех $x, y \in \mathscr{E}(1,h)$.*

$\lhd$ См. [18, предложения 5.6.4 и 5.6.7, теорема 5.6.10]. $\rhd$

Определение 4.4. Оператор S, существование которого утверждается в лемме 4.3, называют *сдвигом посредством* h и обозначают символом S_h. Пусть E — фундамент $\mathscr{E}$ и F — фундамент $\mathscr{F}$. Оператор $S : E \to F$ назовем *оператором сдвига*, если существует кольцевой гомоморфизм $h : \mathfrak{P}(\mathscr{E}) \to \mathfrak{P}(\mathscr{F})$ такой, что $E \subset \mathscr{E}(1,h)$ и $S = S_h$ на E. Если h — тень полинома P, то оператор сдвига S будем называть *сдвигом полинома* P. Заметим, что понятие сдвига посредством гомоморфизма и оператора сдвига зависят от выбора единиц $\mathbb{1}_{\mathscr{E}}$ и $\mathbb{1}_{\mathscr{F}}$ в K-пространствах $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$, см. [18, п. 5.6.8].

Теорема 4.5 (А. Е. Гутман [2])**.** *Пусть E — векторная решетка, F — K-пространство, $T : E \to F$ — порядково ограниченный линейный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Тогда существует разбиение единицы $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в булевой алгебре $\mathfrak{P}(F)$ и семейство положительных элементов $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в E такие, что имеет место представление*

$$Tx = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} W \circ \rho_\xi S \circ (x/e_\xi) \quad (x \in E), \tag{4.1}$$

где оператор S — сдвиг оператора T, а ортоморфизм $W : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ представляет собой оператор умножения на $o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \rho_\xi T(e_\xi)$.

$\lhd$ См. [18, теорема 5.7.5] и [3, теорема 5.3.7]. $\rhd$

Лемма 4.6. *Если полином P сохраняет дизъюнктность, то P и $|P|$ имеют один и тот же сдвиг. Если $Px = (Tx)^{s\odot}$ $(x \in E)$ для некоторого решеточного гомоморфизма $T : E \to G \subset \mathscr{F}$, то сдвиги P и T совпадают.*

$\lhd$ Доказательство следует непосредственно из определения 4.1 и конструкции сдвига (см. [18, предложение 5.6.7]), учитывая предложение 3.2 и тот факт, что множества $B \subset G$ и $\{g^{s\odot} : g \in G\}$ порождают одну и ту же полосу в $\mathscr{F}$. $\rhd$

Теперь все готово для доказательства основной теоремы данного параграфа.

Теорема 4.7 (о представлении ортогонально аддитивных полиномов, сохраняющих дизъюнктность)**.** *Пусть E — векторная решетка, F — K-пространство, $P : E \to F$ — s-однородный порядково ограниченный полином, сохраняющий дизъюнктность. Тогда существуют разбиение единицы $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в булевой алгебре $\mathfrak{P}(F)$ и семейство положительных элементов $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в E такие, что имеет место представление*

$$P(x) = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} W \circ \rho_\xi S(x/e_\xi)^{s\odot} \quad (x \in E), \tag{4.2}$$

где оператор S — сдвиг полинома P, а ортоморфизм $W : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ представляет собой оператор умножения на $o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \rho_\xi P(e_\xi)$.

$\lhd$ Предположим сначала, что полином P положителен. В силу следствия 3.10 (6) существуют векторная решетка G и решеточный гомоморфизм $T : E \to G$ такие, что $G^{s\odot} \subset F$ и имеет место представление

$$P(x) = (Tx)^{s\odot} \quad (x \in E). \tag{4.3}$$

Так же, как и в теореме 2.8 и следствии 2.9, умножение в $\mathscr{F}$ обозначим символом $\bullet$. Тогда $G^{s\odot}$ можно отождествить с подрешеткой $E_{(s)} := \{u_1 \bullet \ldots \bullet u_s : u_1, \ldots, u_s \in T(E)\}$ f-алгебры $\mathscr{F}$, а также считать $u^{s\odot} = u^{s\bullet} = u \bullet \ldots \bullet u$ для $u \in E_{(s)}$, см. [13, теорема 4.1].

Для решеточного гомоморфизма по теорема Гутмана 4.5 имеет место представление (4.1), в котором S — сдвиг T. Пусть $v := o\text{-}\sum_{\xi \in \Xi} \rho_\xi T(e_\xi)$ и $\mathbb{1}_\xi$ обозначает осколок $\mathbb{1}_{\mathscr{F}}$, соответствующий проектору ρ_ξ. Подставив (4.1) в (4.3), получим

$$P(x) = \Bigg(o\text{-}\sum_{\xi \in \Xi} v \bullet \mathbb{1}_\xi \bullet S(x/e_\xi) \Bigg)^{s\bullet} = o\text{-}\sum_{\xi \in \Xi} v^{s\bullet} \bullet \mathbb{1}_\xi \bullet S(x/e_\xi)^{s\bullet}.$$

Обозначив буквой W оператор умножения в $\mathscr{F}$ на элемент $v^{s\bullet}$, получим требуемое представление. Если полином P произволен, то в силу доказанного имеем представление

$$|P|(x) = o\text{-}\sum_{\xi \in \Xi} W_0\big(\rho_\xi S(x/e_\xi)^{s\odot}\big) \quad (x \in E),$$

где S — сдвиг $|P|$ и $W_0 \geqslant 0$. Так как $P = \pi|P| - \pi^\perp|P|$ для некоторого проектора π, то остается положить $W := \pi W_0 - \pi^\perp W_0$ и сослаться на лемму 4.6. $\rhd$

Пусть теперь K и Q — экстремально несвязные компакты, а E и F — фундаменты в расширенных K-пространствах $\mathscr{E} := C_\infty(K)$ и $\mathscr{F} := C_\infty(Q)$ соответственно. Пусть $C_0(Q, K)$ обозначает множество всех непрерывных функций $\sigma : Q_0 \to K$, определенных на открыто-замкнутых подмножествах $\operatorname{dom}(\sigma) := Q_0 \subset Q$.

Определение 4.8. Для произвольного $\sigma \in C_0(Q, K)$ и $x \in C_\infty(K)$ определим функцию $x \bullet \sigma : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ формулой

$$(x \bullet \sigma)(q) := \begin{cases} x(\sigma(q)), & \text{если } q \in \operatorname{dom}(\sigma), \\ 0, & \text{если } q \in Q \setminus \operatorname{dom}(\sigma). \end{cases}$$

Замечание 4.9. Функция $x \bullet \sigma$, как очевидно, непрерывна, но не принадлежит, вообще говоря, пространству $C_\infty(Q)$, поскольку она может принимать бесконечные значения на некотором подмножестве $U \in Q$ с непустой внутренностью. Однако, если $x \bullet \sigma \in C_\infty(Q)$ для всех $x \in E$, то нетрудно видеть, что отображение $x \mapsto x \bullet \sigma$ $(x \in E)$ является оператором сдвига. Несмотря на это, произведение $W(x \bullet \sigma)$ корректно определяет функцию из $C_\infty(Q)$, если W обращается в ноль на внутренности U. Иначе говоря, рассматривая произведение fg двух функций $f, g \in C_\infty(Q, \overline{\mathbb{R}})$, считаем $(fg)(q) = 0$, если либо f, либо g равняется нулю тождественно в окрестности $q \in Q$, подробности см. [18, 5.8.5]. Именно в этом смысле понимается произведение $W_\xi((w_\xi x)^s \bullet \sigma)$ в следующей теореме.

Теорема 4.9 (о мультипликативном представлении ортогонально аддитивных полиномов, сохраняющих дизъюнктность)**.** *Пусть E и F — фундаменты в пространствах $C_\infty(K)$ и $C_\infty(Q)$ соответственно, а $P : E \to F$ — порядково ограниченный ортогонально аддитивный s-однородный полином, сохраняющий дизъюнктность. Тогда существуют* *отображение $\sigma \in C_0(Q, K)$, семейство $(w_\xi)_{\xi\in\Xi}$ положительных функций в $C_\infty(K)$ и семейство $(W_\xi)_{\xi\in\Xi}$ попарно дизъюнктных функций из $C_\infty(Q)$ такие, что $1/w_\xi \in E$ для всех $\xi \in \Xi$, и справедливо представление:*

$$P(x) = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} W_\xi((w_\xi x) \bullet \sigma)^s \quad (x \in E). \tag{4.4}$$

$\triangleleft$ Этот факт следует непосредственно из теоремы 4.6. Нужно лишь заметить, что если $S : E \to F$ — оператор сдвига, то существует функция $\sigma \in C_0(Q, K)$ такая, что $Sx = x \bullet \sigma$ для всех $x \in E$, см. [18, предложение 5.8.7]. $\triangleright$

Замечание 4.10. Внутренний вес, фигурирующий в представлениях (4.2) и (4.4), впервые ввел А. Е. Гутман, см. [2, 18]. Без привлечения внутренних весов указанные представления возможны лишь на части области определения, ср., например, [1, 9].

Литература

1. *Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В.* Об операторах, сохраняющих дизъюнктность // Докл. АН СССР.—1979.—Т. 248, № 5.—С. 1033–1036.
2. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН.—1995.—С. 63–211.
3. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
4. *Кусраев А. Г., Табуев С. Н.* О билинейных операторах, сохраняющих дизъюнктность // Владикавк. мат. журн.—2004.—Т. 6, вып. 1.—С. 58–70.
5. *Кусраев А. Г., Табуев С. Н.* О мультипликативном представлении билинейных операторов // Сиб. мат. журн.—2008.—Т. 49, № 2.—С. 357–366.
6. *Кусраева З. А.* О представлении ортогонально аддитивных полиномов // Сиб. мат. журн.—2011.—Т. 52, № 2.—С. 315–325.
7. *Кусраева З. А.* О продолжении ортогонально аддитивных регулярных полиномов // Владикавк. мат. журн.—2011.—Т. 13, вып. 4.—С. 28–34.
8. *Кусраева З. А.* Однородные ортогонально аддитивные полиномы в векторных решетках // Мат. заметки.—2012.—Т. 91, № 5.—С. 704–710.
9. *Abramovich Yu. A.* Multiplicative representation of disjointness preserving operators // Indag. Math. N.S.—1983.—Vol. 45, № 3.—P. 265–279.
10. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—N. Y.: Acad. Press, 1985.—xvi+367 p.
11. *Benyamini Y., Lassalle S., and Llavona J. G.* Homogeneous orthogonally additive polynomials on Banach lattices // Bull. London Math. Soc.—2006.—Vol. 38, № 3.—P. 459–469.
12. *Boulabiar K.* Products in almost f-algebras // Comment. Math. Univ. Carolin.—2000.—Vol. 41, № 4.—P. 747–759.
13. *Boulabiar K., Buskes G.* Vector lattice powers: f-algebras and functional calculus // Comm. Algebra.—2006.—Vol. 34, № 4.—P. 1435–1442.
14. *Bu Q., Buskes G.* Polynomials on Banach lattices and positive tensor products // J. Math. Anal. Appl.—2011.—Vol. 388.—P. 845–862.
15. *Buskes G., Kusraev A.* Extension and representation of orthoregular maps // Vladikavkaz Math. J.—2007.—Vol. 9, № 1.—P. 16–29.
16. *Buskes G., van Rooij A.* Almost f-algebras: commutativity and the Cauchy–Schwarz inequality // Positivity.—2000.—Vol. 4, № 3.—P. 227–231.
17. *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces.—Berlin: Springer, 1999.—xv+543 p.
18. *Gutman A. E.* Disjointness preserving operators // Vector Lattices and Integral Operators / Ed. S. S. Kutateladze.—Dordrecht etc.: Kluwer, 1996.—P. 361–454.
19. *Ibort A., Linares P., and Llavona J. G.* A representation theorem for orthogonally additive polynomials on Riesz spaces.—2012.—arXiv: 1203.2379vl [math.Fa].

20. *Kusraev A. G.* A Radon–Nikodým type theorem for orthosymmetric bilinear operators // Positivity.—2010.—Vol. 14, № 2.—P. 225–238.
21. *Kusraev A.G., Kutateladze S. S.* Boolean Valued Analysis: Selected Topics.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2014.—iv+400 p.—(Trends in Science: The South of Russia. Math. Monogr. Issue 6).
22. *Linares P.* Orthogonally Additive Polynomials and Applications. PhD Thesis.—Universidad Complutense de Madrid, 2009.
23. *Loane J.* Polynomials on Riesz Spaces. PhD Thesis.—Galway: National Univ. of Ireland, 2008.
24. *Quinn J.* Intermediate Riesz spaces // Pacific J. of Math.—1975.—Vol. 56, № 1.—P. 225–263.
25. *Schep A. R.* Factorization of positive multilinear maps // Illinois J. Math.—1984.—Vol. 28, № 4.—P. 579–591.
26. *Toumi M. A.* Orthogonally additive polynomials on Dedekind σ-complete vector lattices // Proc. Irish Royal Academy.—2011.—Vol. 110.—P. 83–94.

Статья поступила 13 января 2016 г.

Кусраева Залина Анатольевна
Южный математический институт ВНЦ РАН,
научный сотрудник отдела функционального анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `zali13@smath.ru`

CHARACTERIZATION AND MULTIPLICATIVE REPRESENTATION OF HOMOGENEOUS DISJOINTNESS PRESERVING POLYNOMIALS

Kusraeva Z. A.

Let E and F be vector lattices and $P : E \to F$ an order bounded orthogonally additive (i. e. $|x| \wedge |y| = 0$ implies $P(x + y) = P(x) + P(y)$ for all $x, y \in E$) s-homogeneous polynomial. P is said to be disjointness preserving if its corresponding symmetric s-linear operator from E^s to F is disjointness preserving in each variable. The main results of the paper read as follows:

Theorem 3.9. The following are equivalent: (1) P is disjointness preserving; (2) $\hat{d}^n P(x)(y) = 0$ and $Px \perp Py$ for all $x, y \in E$, $x \perp y$, and $1 \leqslant n < s$; (3) P is orthogonally additive and $x \perp y$ implies $Px \perp Py$ for all $x, y \in E$; (4) there exist a vector lattice G and lattice homomorphisms $S_1, S_2 : E \to G$ such that $G^{s\odot} \subset F$, $S_1(E) \perp S_2(E)$, and $Px = (S_1x)^{s\odot} - (S_2x)^{s\odot}$ for all $x \in E$; (5) there exists an order bounded disjointness preserving linear operator $T : E^{s\odot} \to F$ such that $Px = T(x^{s\odot})$ for all $x \in E$.

Theorem 4.7. Let E and F be Dedekind complete vector lattices. There exists a partition of unity $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ in the Boolean algebra of band projections $\mathfrak{P}(F)$ and a family $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ in E_+ such that $P(x) = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} W \circ \rho_\xi S(x/e_\xi)^{s\odot}$ $(x \in E)$, where S is the shift of P and $W : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ is the orthomorphism multiplication by $o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \rho_\xi P(e_\xi)$.

Key words: power of a vector lattice, homogeneous polynomial, disjointness preserving polynomial, orthogonal additivity, lattice polymorphism, multiplicative representation.