Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 2, С. 12–18

УДК **519.45**

О КАТЕГОРИИ MR-ГРУПП НАД КОЛЬЦОМ R

М. Г. Амаглобели

К 60-летию Владимира Амурхановича Койбаева

В работе [1] определена категория степенных MR-групп для ассоциативного кольца R с единицей. Настоящая статья посвящена изучению частичных степенных MR-групп, которые изоморфно вкладываются в свое тензорное пополнение над кольцом R. Ключом к ее пониманию служит понятие тензорного пополнения, введенное в [1]. Как следствие, получено описание свободных MR-групп и свободных MR-произведений на языке групповых конструкций.

Ключевые слова: степенная R-группа, линдонова R-группа, холлова R-группа, MR-группа, частичная MR-группа, тензорное пополнение.

1. Основные определения

Пусть R — произвольное ассоциативное кольцо с единицей 1. В работе А. Г. Мясникова и В. Н. Ремесленникова [1] была введена новая категория степенных R-групп MR-группы) как естественное обобщение на некоммутативный случай понятия R-модуля.

Напомним основные определение, следуя статьям [1, 2].

Пусть $L_{\mathrm{gr}} = \langle \cdot, {}^{-1}, e\rangle$ — групповой язык (сигнатура), где $\cdot$ — бинарная операция умножения, ${}^{-1}$ — унарная операция обращения элементов группы, e — константный символ для единицы группы.

Обогатим группой язык L_{gr} до языка $L^*_{\mathrm{gr}} = L_{\mathrm{gr}} \cup \{f_\alpha(g) :\ \alpha \in \mathrm{R}\}$, где $f_\alpha(g)$ — унарная алгебраическая операция.

Определение 1. Множество G будем называть *линдоновой* R-*группой*, если на нем определены операции $\cdot$, ${}^{-1}$, e , $\{f_\alpha(g) :\ \alpha \in \mathrm{R}\}$ и выполнены аксиомы:

1) аксиомы группы;

2) для всех $g, h \in G$ и всех элементов $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ выполняются равенства

$$g^1 = g, \quad g^0 = 1, \quad e^\alpha = e; \tag{1}$$

$$g^{\alpha+\beta} = g^\alpha \cdot g^\beta, \quad g^{\alpha\beta} = (g^\alpha)^\beta; \tag{2}$$

$$(h^{-1}gh)^\alpha = h^{-1}g^\alpha h. \tag{3}$$

При записи аксиом мы используем следующее соглашение: для краткости $f_\alpha(g)$ будем записывать в виде g^α, $g \in G$, $\alpha \in \mathrm{R}$.

Обозначим через $\mathrm{L_R}$ категорию всех линдоновых R-групп. Так как аксиомы выше являются универсальными аксиомами языка L^*_{gr}, то $\mathrm{L_R}$ является многообразием алгебраических систем языка L^*_{gr} и, следовательно, из общих теорем универсальной алгебры следует, что можно говорить о многообразии R-групп, об R-гомоморфизмах, R-изоморфизмах, о свободных R-группах и так далее.

Определение 2. Пусть $G, H \in L_{\mathrm{R}}$. Тогда гомоморфизм $\varphi : G \to H$ называется R-*гомоморфизмом*, если $(g^\alpha)^\varphi = (g^\varphi)^\alpha$ для любых $g \in G$, $\alpha \in \mathrm{R}$.

Существуют абелевы линдоновы R-группы, не являющиеся R-модулями (см. [3], где подробно исследована структура свободной абелевой R-группы). В работе [1] А. Г. Мясников и В. Н. Ремесленников добавили к аксиомам Линдона дополнительную аксиому (квазитождество):

$$\text{(MR)} \qquad (\forall\, g, h \in G)\ (\alpha \in \mathrm{R}) \quad [g, h] = e \Longrightarrow (gh)^\alpha = g^\alpha h^\alpha. \tag{4}$$

Определение 3. Группу G будем называть MR-*группой*, если на G определена операция g^α для всех $g \in G$ и при этом выполнены аксиомы (1)–(4).

Обозначим через $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$ класс всех степенных R-групп с аксиомами (1)–(4). Ясно, что этот класс является квазимногообразием в языке L^*_{gr} и в нем снова есть понятие свободной MR-группы, MR-гомоморфизма и так далее, и, кроме того, выполнено свойство: каждая абелева MR-группа является R-модулем и наоборот.

Большинство естественных примеров степенных R-групп лежат в классе $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$:

1) любая группа является $\mathbb{Z}$-группой;

2) делимая абелева группа является $\mathbb{Q}$-группой;

3) группа периода n является $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-группой;

4) модуль над кольцом R является абелевой MR-группой;

5) произвольная про-p-группа является $\mathbb{Z}_p$-группой над кольцом целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$;

6) произвольная нильпотентная степенная R-группа над биномиальным кольцом R (*холлова* R-*группа*), введенная Ф. Холлом в [4], является MR-группой.

Нильпотентные группы. Пусть $c > 1$ — натуральное число. Обозначим через $\mathfrak{N}_{c,\mathrm{R}}$ категорию нильпотентных R-групп ступени нильпотентности c из класса L_{R}, т. е. всех R-групп, в которых для любых $x_1, \ldots, x_{c+1}$ выполняется тождество $[x_1, \ldots, x_{c+1}] = 1$, а через $\mathfrak{N}^0_{c,\mathrm{R}}$ — категорию нильпотентных R-групп ступени c, в которых выполняется аксиома (MR). Структура R-групп без аксиомы (MR) очень сложна, поэтому в большинстве работ изучаются только R-группы со свойством (MR). Далее, в статье мы будем рассматривать только R-группы с этой аксиомой.

1.2. Холловы нильпотентные R-группы [4]**.** Для того чтобы ввести это понятие, нам необходимо ограничить класс рассматриваемых колец.

Определение 4. Кольцо R называется *биномиальным кольцом*, если R — область целостности, содержащая $\mathbb{Z}$ в качестве подкольца, и с каждым элементом $\alpha \in R$ включает все биномиальные коэффициенты $C^n_\alpha = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

Примерами биномиальных колец являются: любое поле нулевой характеристики, кольцо многочленов над таким полем и кольцо целых чисел.

Определение 5. Нильпотентная группа G ступени нильпотентности c называется R-*группой* (здесь R-*биномиальное кольцо*), если для любого $\alpha \in \mathrm{R}$ и $x \in G$ единственным образом определен элемент $x^\alpha \in G$ и для всех элементов группы G и кольца R выполнены следующие аксиомы (x, y, $x_1, \ldots, x_n \in G$, $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$):

1) $x^1 = x$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$;

2) $(y^{-1}xy)^\alpha = y^{-1}x^\alpha y$;

3) $x_1^\alpha \cdots x_n^\alpha = (x_1 \cdots x_n)^\alpha \tau_2(X)^{C_\alpha^2} \cdots \tau_c(X)^{C_\alpha^c}$, где $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\tau_k(X)$ — k-е слово Петреску.

Напомним, что для любого натурального k рекурсивно определяется k-е слово Петреску формулой

$$x_1^k \cdots x_n^k = \tau_1(X)^{C_k^1} \tau_2(X)^{C_k^2} \cdots \tau_{k-1}(X)^{C_k^{k-1}} \tau_k(X)^{C_k^k}$$

в свободной группе F с порождающими $x_1, \dots, x_n$. В частности,

$$\tau_1(X) = x_1, \dots, x_n, \quad \tau_2(X) = \prod\nolimits_{i>j,\, i,j=1}^{n} [x_i, x_j] \mod \gamma_3(F),$$

где $\gamma_3(F)$ — третий член нижнего центрального ряда группы F. Обозначим категорию холловых R-групп через $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_{c,\mathrm{R}}$.

Покажем, что структура групп из $\mathfrak{N}_{c,\mathrm{R}}$ очень сильно отличается от структуры холловых R-групп из класса $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_{c,\mathrm{R}}$. Для этого приведем структуру свободной R-группы в многообразии $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_{c,\mathrm{R}}$, следуя работе [5]. Мы ограничимся рассмотрением двух биномиальных колец $\mathrm{R} = \mathbb{Q}[t]$, $\mathrm{R} = \mathbb{Q}(t)$. Обозначим через G_0 свободную 2-ступенно нильпотентную R-группу с порождающими x и y. Хорошо известно, что мальцевская база этой группы состоит из трех элементов x, y, $[y, x]$. Общий вид элемента $g \in G_0$ следующий: $g = x^\gamma y^\delta [y, x]^\varepsilon$, $\gamma, \delta, \varepsilon \in \mathrm{R}$. В частности, в этой группе коммутант G_0' является свободным R-модулем ранга 1 с порождающим $[y, x]$. Если теперь G — свободная R-группа в многообразии $\mathfrak{N}_{c,\mathrm{R}}^0$, то в работе [5] показано, что G' является свободным R-модулем бесконечного ранга и найдена база этого модуля.

Систематическое изучение MR-групп начато в работах [5]–[11]. Отметим, кстати, что результаты этих работ оказались весьма полезны при решении известных проблем Тарского. Настоящая статья посвящена изучению частичных степенных MR-групп, которые изоморфно вкладываются в свое тензорное пополнение над кольцом R. Ключом к ее пониманию служит понятие тензорного пополнения, введенное в [1]. Как следствие, получено описание свободных MR-групп и свободных MR-произведений на языке групповых конструкций.

2. Тензорное пополнение

Здесь, следуя [1], вводится основная операция в классе степенных MR-групп. Она естественно обобщает на некоммутативный случай понятие расширения кольца скаляров для модулей.

Определение 6. Пусть G — MR-группа, $\mu : \mathrm{R} \to S$ — гомоморфизм колец. Тогда MS-группа G^S называется *тензорным* MS-*пополнением* MR-*группы* G, если G^S удовлетворяет следующему универсальному свойству:

1) существует R-гомоморфизм $\lambda : G \to G^S$ такой, что $\lambda(G)$ MS-порождает G^S, т. е. $\langle \lambda(G) \rangle_S = G^S$;

2) для любой MS-группы H и любого R-гомоморфизма $\varphi : G \to H$, согласованного с μ (т. е. такого, что $(g^\alpha)^\varphi = (g^\varphi)^{\mu(\alpha)}$), существует S-гомоморфизм $\psi : G^S \to H$, делающий коммутативной следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\varphi"'] & G^S \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ H & \end{tikzcd} \qquad (\lambda\psi = \varphi).$$

В [1] доказано, что для любой MR-группы G и любого гомоморфизма $\mu : \mathrm{R} \to S$ тензорное пополнение G^S всегда существует и оно единственно с точностью до изоморфизма. Там же показано, что если G — абелева MR-группа, то $G^S \cong G \underset{R}{\otimes} S$ — тензорное произведение R-модуля G на кольцо S.

Операция тензорного пополнения перестановочна с операциями прямого произведения и взятия прямого предела и, вообще говоря, не перестановочна с операциями декартова произведения и взятия обратного предела [7]. Перестановочность тензорного пополнения с прямыми пределами позволяет многие вопросы о пополнениях сводить к случаю конечно порожденной группы. Действительно, пусть $\{G_i\ (i \in I); \pi_i^j\}$ — прямой спектр группы G, составленный из конечно порожденных групп G_i. Тогда $G = \varinjlim_{t \to I} G_i$ и $G^S \cong \varinjlim_{t \to I} G_i^S$.

Построение тензорного пополнения данной группы удобно вести по шагам, постепенно «доопределяя степени». Это приводит к понятию частичной MR-группы. Также к частичным MR-группам приводят некоторые групповые операции над MR-группами. Пусть R — кольцо, G — группа.

Определение 7. Группу G будем называть *частичной* MR-*группой*, если возведение в степень определено для некоторых пар (g, α), но не обязательно для всех пар; причем, если определена одна часть равенства в аксиомах (1)–(4), то определена и другая часть, и для них выполняются аксиомы (1)–(4) в определении MR-группы.

Класс частичных MR-групп будем обозначать через $\mathscr{P}_{\mathrm{R}}$. Например, если R — подкольцо кольца S, тогда любая MR-группа является частичной MS-группой.

На протяжении всей статьи будем предполагать, что кольцо R в качестве подкольца содержит кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$. Пусть G — частичная MR-группа, т. е. $G \in \mathscr{P}_{\mathrm{R}}$.

Определение 8. Будем говорить, что группа G является *точной относительно кольца* R, если гомоморфизм $\lambda : G \to G^{\mathrm{R}}$ является вложением.

Определение 9. Будем говорить, что группа G является *точной*, если она является точной относительно любого кольца, содержащего $\mathbb{Z}$.

Пусть R — кольцо, $\mathscr{P}_{\mathrm{R}}^0$ — категория частичных MR-групп. По определению группа G из $\mathscr{P}_{\mathrm{R}}$ принадлежит $\mathscr{P}_{\mathrm{R}}^0$, если выполнены следующие условия:

1) для любой максимальной абелевой подгруппы M из G и любого $x \notin M$ пересечение $M \cap M^x = e$;

2) канонический гомоморфизм $j : M \to M \underset{\mathrm{R}}{\otimes} \mathrm{R}$ является вложением.

Сформулируем основную теорему.

Теорема 1 [9]**.** *Пусть* $\mathbb{Z}$ *— подкольцо кольца* R *и группа* $G \in \mathscr{P}_{\mathrm{R}}^0$*, причем в* G *и* R^+ (*аддитивная группа кольца* R) *нет элементов порядка* 2*. Тогда группа* G^R *точна, т. е. гомоморфизм* $\lambda : G \to G^R$ *является вложением.*

При доказательстве этой теоремы используется способ построения тензорного пополнения, основанный на конструкции свободного произведения групп с объединенной подгруппой и техника комбинаторной теории групп. Данная теорема дает достаточное условие для точности тензорного пополнения. Заметим, что условие 1) из определения класса $\mathscr{P}_{\mathrm{R}}^0$ является также необходимым. В классе $\mathscr{P}_{\mathrm{R}}^0$ содержатся свободные группы. Он замкнут относительно прямых пределов, свободных произведений и расширений специального вида. Важным следствием из этой теоремы является точность тензорного пополнения для кольца R, содержащего кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$. Для конкретных колец, например, для тел нулевой характеристики и кольца многочленов $\mathrm{R} = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ с целыми коэффициентами, эта теорема доказана в работах [11–13].

Замечание. Определим класс групп $\mathscr{P}^*_{\mathrm{R}}$, более широкий, чем класс $\mathscr{P}^0_{\mathrm{R}}$. Будем говорить, что группа $G \in \mathscr{P}^*_{\mathrm{R}}$, если для любой ее максимальной подгруппы M выполнено условие: M либо R-модуль, либо M удовлетворяет условиям 1) и 2) в определении класса $\mathscr{P}^0_{\mathrm{R}}$. Тогда основная теорема справедлива и для групп класса $\mathscr{P}^*_{\mathrm{R}}$.

3. Свободные произведения MR-групп

Сформулируем понятие свободной MR-группы. Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей 1, X — произвольное множество.

Определение 10. MR-группа $F_{\mathrm{R}}(X)$ с множеством R-порождающих X называется *свободной* MR-*группой с базой* X, если выполнено следующее условие: для каждой MR-группы G произвольное отображение $\varphi_0 : X \to G$ продолжается до R-гомоморфизма $\varphi : F_R(X) \to G$. Множество X называется *множеством свободных* MR-*порождающих* $F_R(X)$. Мощность $|X|$ называется *рангом группы* $F_R(X)$.

Теорема 2. *Для любых X и R свободная MR-группа существует и единственна с точностью до R-изоморфизма.*

$\lhd$ Пусть $F(X)$ — свободная группа в классе всех групп. Тогда ее тензорное MR-пополнение является свободной MR-группой с базой X. Действительно, пусть $\varphi_0 : X \to G$ — произвольное отображение из X в MR-группу G:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi_0"'] & F(X) \arrow[r] \arrow[d, "\exists\,\varphi_1"] & (F(X))^{\mathrm{R}} \arrow[dl, "\exists\,\varphi"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Тогда φ_0 продолжается до гомоморфизма $\varphi_1 : F(X) \to G$ по свойству свободной группы, а последнее отображение продолжается до R-гомоморфизма $\varphi : (F(X))^{\mathrm{R}} \to G$. Следовательно, $(F(X))^R$-свободная MR-группа с базой X.

Единственность следует из единственности тензорного пополнения. $\rhd$

Сформулируем следствие из основной теоремы 1 и теоремы 2.

Следствие. *Пусть R — кольцо, содержащее $\mathbb{Z}$ в качестве подкольца. Тогда свободная группа $F(X)$ точна относительно кольца $\mathbb{Z}$. Другими словами, $F(X)$ является подгруппой $F_R(X)$.*

$\lhd$ По теореме 2 $F_{\mathrm{R}}(X) \cong (F(X))^{\mathrm{R}}$. Так как $F(X) \in \mathscr{P}^0_{\mathrm{R}}$ и не содержит инволюций, то по теореме 1 гомоморфизм $\lambda : F(X) \to (F(X))^{\mathrm{R}}$ является вложением. $\rhd$

Введем конструкцию свободного произведения в категории MR-групп.

Определение 11. Пусть G_i, $i \in I$, — MR-группы. MR-группа $\underset{R}{*}G_i$ называется *свободным произведением в категории* $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$, если R-гомоморфизмы $\varphi_i : G_i \to \underset{R}{*}G_i$ таковы, что для любых R-гомоморфизмов $\psi_i : G_i \to H$, где H — произвольная MR-группа, существует R-гомоморфизм $\psi : \underset{R}{*}G_i \to H$, делающий коммутативными следующие диаграммы:

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\psi_i"'] & \underset{R}{*}G_i \arrow[dl, dashed, "\exists\,\psi"] \\ H & \end{tikzcd} \qquad (\psi_i = \varphi_i\psi, \;\; i \in I)$$

и $\underset{\mathrm{R}}{*}G_i$ MR-порождается множеством $\{\varphi_i(g_i),\ g_i \in G_i,\ i \in I\}$.

Из категорных соображений следует, что группа $\underset{R}{*}G_i$ определена однозначно с точностью до R-гомоморфизма.

Теорема 3. *Пусть R — кольцо, содержащее кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ в качестве подкольца, G_i, $i \in I$, — некоторое множество MR-групп. Тогда*

1) $\underset{R}{*}G_i \cong (*G_i)^R$;

2) *гомоморфизм* $\lambda : *G_i \to (*G_i)^R$ *является вложением.*

$\lhd$ Пусть $\varphi_i^0 : G_i \to *G_i$ — канонические вложения. Так как класс $\mathscr{P}_{\mathrm{R}}$ замкнут относительно свободных произведений [9], то к нему можно применить конструкцию тензорного пополнения. Пусть $\lambda : *G_i \to (*G_i)^{\mathrm{R}}$ — гомоморфизм из определения тензорного пополнения. Обозначим через $\varphi_i = \lambda \circ \varphi_i^0$, $i \in I$. Тогда $\varphi_i : G_i \to (*G_i)^{\mathrm{R}}$ есть совокупность R-гомоморфизмов. Пусть $\psi_i : G_i \to H$, $i \in I$, — произвольные R-гомоморфизмы. Для того чтобы доказать, что группа $(*G_i)^{\mathrm{R}}$ является свободным произведением в категории $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$ (т. е. доказать, что $\underset{\mathrm{R}}{*}G_i \cong (*G_i)^{\mathrm{R}}$), мы должны замкнуть диаграмму

$$\begin{tikzcd}
G_i \arrow[r, "\varphi_i^0"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & *G_i \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, dashed, "\exists\varphi"] & (*G_i)^R \arrow[dl, dashed, "\exists\psi"] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

до коммутативной.

По определению свободного произведения $\underset{R}{*}G_i$ существует частичный R-гомоморфизм $\varphi : \underset{R}{*}G_i \to H$. В силу универсального свойства тензорного пополнения существует R-гомоморфизм ψ, продолжающий φ. Он и будет искомым. Свойство порождаемости $(*G_i)^R$ образами $\varphi_i(G_i)$ также выполнено, а потому $(*G)^R$ является свободным произведением в $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$, т. е. $\underset{R}{*}G_i \cong (*G_i)^R$.

2) Для доказательства того, что λ есть вложение достаточно доказать, что группа $*G_i \in \mathscr{P}_{\mathrm{R}}^0$ (см. замечание). Последнее легко следует из теоремы Куроша о подгруппах свободного произведения. $\rhd$

Теорема 4. *Класс $\mathscr{P}_{\mathrm{R}}^0$ замкнут относительно свободных произведений.*

$\lhd$ Пусть G_i, $i \in I$, — семейство групп из $\mathscr{P}_{\mathrm{R}}^0$ и $\lambda_i : G_i \to G_i^R$ — гомоморфизмы из определения тензорного пополнения. По условию они являются вложениями. Отсюда следует, что гомоморфизм $\lambda : G_i \to *G_i^R$ также является вложением. По пункту 2) теоремы 3 гомоморфизм $\varphi : G_i^R \to \underset{R}{*}G_i^R$ есть вложение, а по пункту 1) этой теоремы $\underset{R}{*}G_i^R \cong (*G_i^R)^R$. Отсюда и следует утверждение теоремы. $\rhd$

Литература

1. *Мясников А. Г., Ремесленников В. Н.* Степенные группы. I. Основы теории и тензорные пополнения // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 5.—С. 1106–1118.
2. *Lyndon R. C.* Groups with parametric exponents // Trans. Amer. Math. Soc.—1960.—Vol. 96.—P. 518–533.
3. *Baumslag G.* Free abelian X-groups // Illinois J. Math.—1986.—Vol. 30, № 2.—P. 235–245.
4. *Hall Ph.* The Edmonton Notes on Nilpotent Groups. Queen Mary College Math. Notes. Mathematics Department.—London: Queen Mary College, 1969.—iii+76 p.

5. *Myasnikov A. G., Remeslennikov V. N.* Exponential groups. II. Extensions of centralizers and tensor completion of CSA-groups // Internat. J. Algebra Comput.—1996.—Vol. 6, № 6.—P. 687–711.
6. *Baumslag G., Myasnikov A., Remeslennikov V.* Discriminating completions of hyperbolic groups. Dedicated to John Stallings on the occasion of his 65th birthday // Geom. Dedicata.—2002.—Vol. 92.—P. 115–143.
7. *Amaglobeli M. G.* On the permutability of a functor of tensor completion with principal group operations // Appl. Math. Inform. Mech.—2010.—Vol. 15, № 1.—P. 3–10.
8. *Amaglobeli M., Bokelavadze T.* Abelian and nilpotent varieties of power groups // Georgian Math. J.—2011.—Vol. 18, № 3.—P. 425–439.
9. *Amaglobeli M.* Power groups // J. Math. Sci.—2012.—Vol. 186, № 6.—P. 811–865.
10. *Амаглобели М. Г., Ремесленников В. Н.* Свободные 2-ступенно нильпотентные R-группы // Докл. АН.—2012.—Т. 443, № 4.—С. 410–413.
11. *Амаглобели М. Г., Ремесленников В. Н.* Расширения централизаторов в нильпотентных группах // Сиб. мат. журн.—2013.—Т. 54, № 1.—С. 8–20.
12. *Baumslag G.* On free $\mathscr{D}$-groups // Comm. Pure Appl. Math.—1965.—Vol. 18.—P. 25–30.
13. *Полин С. В.* Свободные разложения в многообразиях λ-групп // Мат. сб.—1972.—Т. 87, № 129.—С. 377–395.

Статья поступила 29 октября 2015 г.

Амаглобели Михаил Георгиевич
Тбилисский государственный университет
им. Ив. Джавахишвили
профессор кафедры алгебры и геометрии
ГРУЗИЯ, 0186, Тбилиси, ул. Университетская, 2
E-mail: mikheil.amaglobeli@tsu.ge

CATEGORY OF MR-GROUPS OVER A RING R

Amaglobeli M.

The category of exponential MR-groups for an associative ring R with unity is defined in [1]. The present paper is devoted to the study of partial exponential MR-groups which are isomorphically embedded in their tensor completion over the ring R. The key to its understanding is the notion of tensor completion introduced in [1]. As a consequence, the description of free MR-groups in the language of group constructions is obtained.

Key words: exponential R-group, Lyndon R-group, Hall R-group, MR-group, partial MR-group, tensor completion.