Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 2, С. 67–75

УДК **517.165**

ОБ ОДНОМ ДИСКРЕТНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ТИПА ХАРДИ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ВЕСОМ[1]

Р. Г. Насибуллин

Мы доказываем новые дискретные неравенства типа Харди с логарифмическими весами. Логарифмический вес находится под знаком модуля. Константа в неравенстве является точной.

Ключевые слова: неравенства типа Харди, логарифмический вес, точность констант.

1. Введение

В 1920 г. при попытке упростить неравенства Гильберта (см. [20, с. 272]), Г. Х. Харди в статье [19] получил неравенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p, \tag{1}$$

где $p>1$, $a_n>0$ и $A_n=\sum_{i=1}^n a_i$.

Следующее утверждение является аналогом дискретного неравенства (1) в интегральном случае [20]:

$$\int_0^{\infty}\frac{F^p}{x^p}\,dx \leqslant \left(\frac{p}{|p-1|}\right)^p \int_0^{\infty} f^p\,dx, \quad p>1,\ p\neq 1, \tag{2}$$

где $f(x)$ — неотрицательная измеримая функция на $[0,\infty)$, а

$$F(x)=\begin{cases}\int\limits_0^x f(t)\,dt, & p>1,\\ \int\limits_x^{\infty} f(t)\,dt, & p<1.\end{cases}$$

Константа $(p/|p-1|)^p$ в общем случае не может быть заменена меньшей постоянной. Несмотря на то, что константа неулучшаема, не существует функции, на которой эта константа достигается.

Дальнейшие исследования и обобщения неравенств типа Харди можно найти в работах [2–18, 21–37]. Неравенства типа Харди широко распространены, поскольку они

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 12-01-00636-а и № 14-01-00351-а.

находят широкое применение в математической физике, в анализе и в теории дифференциальных уравнений [1, 5, 11, 16, 24]. Например, С. Л. Соболев использовал их в теории вложения функциональных пространств. Ф. Г. Авхадиев [1] использовал неравенства Харди для оценки жесткости кручения. Результаты А. Лаптева, Т. Вейдла из [24], и результаты А. Балинского, А. Лаптева и А. В. Соболева из [11] могут быть применены при изучении отрицательности спектра двумерного оператора Шрёдингера. Другое применение этих результатов относится к проблеме существования резонансных состояний.

Отметим, что в статьях [13, 14, 17, 20, 26] авторы получили дискретные неравенства Харди. Например, в [26] было доказано следующее обобщение неравенства типа Харди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left(\frac{\sum\limits_{n=1}^{n} a_n^{\frac{1}{p}}}{n} \right)^{p} \leqslant \left(\frac{p}{p-1-\alpha} \right)^{p} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2} \right)^{\alpha} a_n, \tag{3}$$

где $a_n \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $p > 1$ и $-1 < \alpha < p-1$.

Ясно, что дискретные неравенства (1) и (3) при $p = 1$ и интегральное неравенство (2) при $p = 1$ теряют смысл. В интегральном неравенстве логарифмический вес помогает устранить эту особенность и позволяет получить аналог неравенства (2) при исключительном случае параметра. Примеры использования логарифмов в неравенствах типа Харди можно увидеть в [2–4, 16, 21, 25, 31, 32]. Приведем лишь результат Ю. А. Дубинского из статьи [16]:

Теорема А. *Пусть* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^1$ *— локально интегрируемая функция такая, что интеграл*

$$\int\limits_{0}^{\infty} |f(r)|^p r^{p-1} dr, \qquad p > 1,$$

сходится. Тогда для любого $R > 0$

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{r \left|\ln \frac{r}{R}\right|^p} \left| \int\limits_{R}^{r} f(t) dt \right|^p dr \leqslant \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int\limits_{0}^{\infty} |f(r)|^p r^{p-1} dr. \tag{4}$$

Обратим внимание, что в (4) логарифмический вес находится под знаком модуля (см. также [3, 16, 25, 31]). Будут ли верны дискретные аналоги неравенства (4)? В этой работе мы попытаемся ответить на этот вопрос. В первой части этой статьи мы приведем основные и вспомогательные утверждения. Вторая часть посвящена доказательству точности констант. Статьи Ф. Г. Авхадиева и К.-Й. Виртца [8–10] также посвящены получению и доказательству точности констант.

2. Основные результаты

Верна следующая

Теорема 1. *Пусть* $p > 1$, $l \in [1, p]$, $a_i \geqslant 0$ *и при целом* $n \geqslant 1$ *полагаем, что*

$$A_n = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{[R]-1} a_i - \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i, & 1 \leqslant n \leqslant [R], \\ \sum\limits_{i=0}^{n} a_i - \sum\limits_{i=0}^{[R]+1} a_i, & n \geqslant [R]+1, \end{cases}$$

где $[R]$ — целая часть от числа $R > 1$. Тогда верно следующее неравенство типа Харди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^p}{(n+1)\left|\log \frac{n}{R}\right|^p} \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^{p-l} a_n^l}{(n+1)^{1-l}} \left|\log \frac{n}{R}\right|^{l-p}.$$

Сначала докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Пусть $p \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, и пусть R — произвольное нецелое положительное число. Если $R > n+1$, то*

$$p - (p-1)\left(\frac{1}{(n+1)\left(\log \frac{R}{n}\right)} + \frac{\log \frac{R}{n+1}}{\log \frac{R}{n}}\right) \geqslant 1, \tag{5}$$

и если $R < n-1$, то

$$p - (p-1)\left(\frac{1}{(n+1)\left(\log \frac{n}{R}\right)} + \frac{\log \frac{n-1}{R}}{\log \frac{n}{R}}\right) \geqslant 1. \tag{6}$$

$\lhd$ Преобразуем неравенство (5). Имеем следующие эквивалентные переходы

$$p - 1 \geqslant (p-1)\left(\frac{1}{(n+1)\left(\log \frac{R}{n}\right)} + \frac{\log \frac{R}{n+1}}{\log \frac{R}{n}}\right) \Longleftrightarrow 1 \geqslant \frac{1 + (n+1)\log \frac{R}{n+1}}{(n+1)\log \frac{R}{n}}$$
$$\Longleftrightarrow (n+1)\log \frac{R}{n} \geqslant 1 + (n+1)\log \frac{R}{n+1} \Longleftrightarrow (n+1)\log \frac{n+1}{n} \geqslant 1.$$

Последнее неравенство легко устанавливается.

Теперь перепишем (6). Имеем

$$1 \geqslant \frac{1}{(n+1)\log \frac{n}{R}} + \frac{\log \frac{n-1}{R}}{\log \frac{n}{R}}.$$

После элементарных вычислений можем получить, что

$$(n+1)\log \frac{n}{R} \geqslant 1 + (n+1)\log \frac{n-1}{R} \Longleftrightarrow (n+1)\log \frac{n}{n-1} \geqslant 1.$$

Последнее утверждение также можно легко показать. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы. Пусть $1 \leqslant n \leqslant [R] - 2$. Определим функцию X следующим образом:

$$X(n) = \frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log \frac{R}{n}\right)^p} - \frac{p}{p-1} \frac{A_n^{p-1}}{\left(\log \frac{R}{n}\right)^{p-1}} a_n.$$

Из определения A_n следует, что

$$X(n) = \frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log \frac{R}{n}\right)^p} - \frac{p}{p-1} \frac{A_n^{p-1}}{\left(\log \frac{R}{n}\right)^{p-1}} (A_n - A_{n+1})$$
$$= \frac{A_n^p}{\left(\log \frac{R}{n}\right)^{p-1}} \left(\frac{1}{(n+1)\log \frac{R}{n}} - \frac{p}{p-1}\right) + \frac{p}{p-1} \frac{A_n^{p-1}}{\left(\log \frac{R}{n}\right)^{p-1}} A_{n+1}$$
$$= \frac{A_n^p}{\left(\log \frac{R}{n}\right)^{p-1}} \left(\frac{1}{(n+1)\log \frac{R}{n}} - \frac{p}{p-1}\right) + \frac{p}{p-1} \left(\frac{A_n^p}{\left(\log \frac{R}{n}\right)^{\frac{(p-1)p}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\frac{A_{n+1}^p}{\left(\log \frac{R}{n+1}\right)^p}\right)^{\frac{1}{p}} \log \frac{R}{n+1}.$$

Используя неравенство Гёльдера при соответствующих значениях параметров, мы имеем

$$\begin{aligned} X(n) \leqslant & \frac{A_n^p}{\left(\log \frac{R}{n}\right)^{p-1}} \left(\frac{1}{(n+1)\log \frac{R}{n}} - \frac{p}{p-1} \right) \\ & + \frac{A_n^p}{\left(\log \frac{R}{n}\right)^{\frac{(p-1)p}{p-1}} \left(\log \frac{R}{n+1}\right)^{-1}} + \frac{1}{p-1} \frac{A_{n+1}^p}{\left(\log \frac{R}{n+1}\right)^{p-1}} \\ = & \frac{1}{p-1} \frac{A_{n+1}^p}{\left(\log \frac{R}{n+1}\right)^{p-1}} - \frac{1}{p-1} \frac{A_n^p}{\left(\log \frac{R}{n}\right)^{p-1}} \left(p - \frac{p-1}{(n+1)\log \frac{R}{n}} - (p-1) \frac{\log \frac{R}{n+1}}{\log \frac{R}{n}} \right). \end{aligned}$$

Далее воспользовавшись леммой 1, получаем

$$X(n) \leqslant \frac{1}{p-1} \left(\frac{A_{n+1}^p}{\left(\log \frac{R}{n+1}\right)^{p-1}} - \frac{A_n^p}{\left(\log \frac{R}{n}\right)^{p-1}} \right), \quad 1 \leqslant n \leqslant [R]-2.$$

Очевидно, что $X([R]) = 0$. Осталось оценить $X([R]-1)$. Используя вышеприведенные рассуждения и неравенство

$$1 \leqslant [R] \log \frac{[R]}{[R]-1},$$

несложно показать, что

$$X([R]-1) \leqslant -\frac{1}{p-1} \frac{A_{[R]-1}^p}{\left(\log \frac{R}{[R]-1}\right)^{p-1}}.$$

Далее оценим $\sum_{n=1}^{[R]} X(n)$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{[R]} X(n) = & \sum_{n=1}^{[R]} \left(\frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log \frac{R}{n}\right)^p} - \frac{p}{p-1} \frac{A_n^{p-1}}{\left(\log \frac{R}{n}\right)^{p-1}} a_n \right) \\ \leqslant & \frac{1}{p-1} \sum_{n=1}^{[R]-2} \left(\frac{A_{n+1}^p}{\left(\log \frac{R}{n+1}\right)^{p-1}} - \frac{A_n^p}{\left(\log \frac{R}{n}\right)^{p-1}} \right) \\ & - \frac{1}{p-1} \frac{A_{[R]-1}^p}{\left(\log \frac{R}{[R]-1}\right)^{p-1}} = -\frac{1}{p-1} \frac{A_1^p}{(\log R)^{p-1}} \leqslant 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\sum_{n=1}^{[R]} X(n) \leqslant 0$. Таким образом, справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{[R]} \frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log \frac{R}{n}\right)^p} \leqslant \frac{p}{p-1} \sum_{n=1}^{[R]} \frac{A_n^{p-1}}{\left(\log \frac{R}{n}\right)^{p-1}} a_n. \tag{7}$$

Пусть теперь $n \geqslant [R]+3$. Определим функцию Y следующим образом:

$$Y(n) = \frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log \frac{n}{R}\right)^p} - \frac{p}{p-1} \frac{A_n^{p-1}}{\left(\log \frac{n}{R}\right)^{p-1}} a_n.$$

Используя определение A_n, легко показать, что

$$Y(n)=\frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log\frac{R}{n}\right)^p}-\frac{p}{p-1}\frac{A_n^{p-1}}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{p-1}}(A_n-A_{n-1})$$
$$=\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{p-1}}\left(\frac{1}{(n+1)\log\frac{n}{R}}-\frac{p}{p-1}\right)+\frac{p}{p-1}\frac{A_n^{p-1}}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{p-1}}A_{n-1}$$
$$=\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{p-1}}\left(\frac{1}{(n+1)\log\frac{n}{R}}-\frac{p}{p-1}\right)$$
$$+\frac{p}{p-1}\left(\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{\frac{p(p-1)}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\frac{A_{n-1}^p}{\left(\log\frac{n-1}{R}\right)^p}\right)^{\frac{1}{p}}\log\frac{n-1}{R}.$$

В силу неравенства Гёльдера, получим

$$Y(n)\leqslant\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{p-1}}\left(\frac{1}{(n+1)\left(\log\frac{n}{R}\right)}-\frac{p}{p-1}\right)$$
$$+\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{\frac{p(p-1)}{p-1}}\left(\log\frac{n-1}{R}\right)^{\frac{1-p}{p-1}}}+\frac{1}{p-1}\frac{A_{n-1}^p}{\left(\log\frac{n-1}{R}\right)^{p-1}}$$
$$=\frac{1}{p-1}\frac{A_{n-1}^p}{\left(\log\frac{n-1}{R}\right)^{p-1}}-\frac{1}{p-1}\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{p-1}}\left(p-\frac{p-1}{(n+1)\log\frac{n}{R}}-(p-1)\frac{\log\frac{n-1}{R}}{\log\frac{n}{R}}\right).$$

В последнем утверждении мы использовали тот факт, что $p\in(1,p\,]$ и $\log\frac{n-1}{R}/\log\frac{n}{R}<1$.

Из леммы 1 следует оценка

$$Y(n)\leqslant\frac{1}{p-1}\left(\frac{A_{n-1}^p}{\left(\log\frac{n-1}{R}\right)^{p-1}}-\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{p-1}}\right),\quad n\geqslant[R]+3.$$

Теперь оценим $Y([R]+1)$ и $Y([R]+2)$. Очевидно, что $Y([R]+1)=0$. Используя неравенство

$$1\leqslant([R]+3)\log\frac{[R]+2}{[R]+1},$$

имеем

$$Y([R]+2)\leqslant-\frac{1}{p-1}\frac{A_{[R]+2}^p}{\left(\log\frac{[R]+2}{R}\right)^{p-1}}.$$

Следовательно, для фиксированного целого $N>[R]+1$, получаем

$$\sum_{n=[R]+1}^{N}Y(n)\leqslant-\frac{1}{p-1}\frac{A_{[R]+2}^p}{\left(\log\frac{[R]+2}{R}\right)^{p-1}}$$
$$+\sum_{n=[R]+3}^{N}\frac{1}{p-1}\left(\frac{A_{n-1}^p}{\left(\log\frac{n-1}{R}\right)^{p-1}}-\frac{A_n^p}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{p-1}}\right)=-\frac{1}{p-1}\frac{A_N^p}{\left(\log\frac{N}{R}\right)^{p-1}}\leqslant 0,$$

т. е. $\sum_{n=[R]+1}^{N}Y(n)\leqslant 0$. Следовательно,

$$\sum_{n=[R]+1}^{N}\frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log\frac{n}{R}\right)^p}\leqslant\frac{p}{p-1}\sum_{n=[R]+1}^{N}\frac{A_n^{p-1}}{\left(\log\frac{n}{R}\right)^{p-1}}a_n. \tag{8}$$

В итоге из (7) и (8), имеем

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{A_n^p}{(n+1)\left|\log\frac{n}{R}\right|^p}\leqslant\frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N}\frac{A_n^{p-1}}{\left|\log\frac{n}{R}\right|^{p-1}}\,a_n.$$

Используя неравенство Гёльдера, получим

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{A_n^p}{(n+1)\left|\log\frac{n}{R}\right|^p}$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n^p}{(n+1)\left|\log\frac{n}{R}\right|^p}\right)^{1-\frac{1}{l}}\left(\left(\frac{p}{p-1}\right)^l\frac{A_n^{p-l}a_n^l}{(n+1)^{1-l}}\left|\log\frac{n}{R}\right|^{l-p}\right)^{\frac{1}{l}}$$
$$\leqslant\left(1-\frac{1}{l}\right)\sum_{n=1}^{N}\frac{A_n^p}{(n+1)\left|\log\frac{n}{R}\right|^p}+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{p}{p-1}\right)^l\frac{A_n^{p-l}a_n^l}{(n+1)^{1-l}}\left|\log\frac{n}{R}\right|^{l-p}.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{A_n^p}{(n+1)\left|\log\frac{n}{R}\right|^p}\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^l\sum_{n=1}^{N}\frac{A_n^{p-l}a_n^l}{(n+1)^{1-l}}\left|\log\frac{n}{R}\right|^{l-p}.$$

Устремляя $N\to\infty$, получаем утверждение теоремы. $\rhd$

Следствие 3. *Пусть $a_n\geqslant 0$ при каждом целом $n\geqslant 1$, $p>1$ и*

$$A_n=\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{[R]-1}a_i-\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_i, & 1\leqslant n\leqslant [R],\\ \sum\limits_{i=0}^{n}a_i-\sum\limits_{i=0}^{[R]+1}a_i, & n\geqslant [R]+1,\end{cases}$$

где $[R]$ — целая часть любого неотрицательного $R>1$. Тогда верно следующее неравенство типа Харди

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n^p}{(n+1)\left|\log\frac{n}{R}\right|^p}\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^p}{(n+1)^{1-p}}.$$

3. Точность константы

Покажем, что константа в неравенстве теоремы 1 неулучшаема при $l=p$.

Пусть

$$a_n=\begin{cases}0, & 1\leqslant n\leqslant [R],\\ \frac{1}{(n+1)\left(\log\frac{n}{R}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{p}}}, & n\geqslant [R]+1,\end{cases}$$

причем $p-1-\varepsilon>0$.

Определим Y как

$$Y=\sum_{n=[R]+1}^{\infty}\frac{a_n^p}{(n+1)^{1-p}}.$$

Прямые вычисления дают

$$Y=\sum_{n=[R]+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\left(\log\frac{n}{R}\right)^{1+\varepsilon}}\geqslant\sum_{n=[R]+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\left(\log\frac{n+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}}$$

$$>\int_{n=[R]+1}^{\infty}\frac{1}{(r+1)\left(\log\frac{r+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}}dr=\int_{n=[R]+1}^{\infty}\frac{d\log\frac{r+1}{R}}{\left(\log\frac{r+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}}=\frac{1}{\varepsilon}\left(\log\frac{[R]+2}{R}\right)^{-\varepsilon}.$$

Верно следующее соотношение

$$Y<\frac{1}{([R]+2)\left(\log\frac{[R]+1}{R}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{p}}}+\int_{n=[R]+1}^{\infty}\frac{1}{(r+1)\left(\log\frac{r+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}}\,dr.$$

Таким образом,

$$Y=\frac{1}{\varepsilon}\left(\log\frac{[R]+2}{R}\right)^{-\varepsilon}+O(1).$$

Также имеем неравенство

$$A_n=\sum_{i=[R]+2}^{n}a_i=\sum_{i=[R]+2}^{n}\frac{1}{(i+1)\left(\log\frac{i}{R}\right)^{(1+\varepsilon)/p}}$$

$$>\int_{[R]+2}^{n}\frac{dr}{(r+1)\left(\log\frac{r}{R}\right)^{(1+\varepsilon)/p}}\geqslant\int_{[R]+2}^{n}\frac{dr}{(r+1)\left(\log\frac{r+1}{R}\right)^{(1+\varepsilon)/p}}$$

$$=\frac{p}{p-1-\varepsilon}\left(\left(\log\frac{n+1}{R}\right)^{\frac{p-1-\varepsilon}{p}}-\left(\log\frac{[R]+3}{R}\right)^{\frac{p-1-\varepsilon}{p}}\right)=\frac{p}{p-1-\varepsilon}\,H(n).$$

Следовательно,

$$\frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log\frac{n}{R}\right)^p}\geqslant\left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p\frac{H^p(n)}{(n+1)\left(\log\frac{n+1}{R}\right)^p}$$

$$=\left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p\left(1-\left(\frac{\log\frac{[R]+3}{R}}{\log\frac{n+1}{R}}\right)^{\frac{p-1-\varepsilon}{p}}\right)^p\frac{1}{(n+1)\left(\log\frac{n+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}}$$

$$\geqslant\left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p\frac{1-K_n}{(n+1)\left(\log\frac{n+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}},$$

где $K_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Таким образом,

$$X=\sum_{n=[R]+1}^{\infty}\frac{A_n^p}{(n+1)\left(\log\frac{n}{R}\right)^p}\geqslant\left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p\sum_{n=[R]+1}^{N}\frac{1-K_n}{(n+1)\left(\log\frac{n+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}}$$

$$>\left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p\int_{[R]+1}^{N}\frac{dr}{(r+1)\left(\log\frac{r+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}}-\left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p\sum_{n=[R]+1}^{N}\frac{K_n}{(n+1)\left(\log\frac{n+1}{R}\right)^{1+\varepsilon}}$$

$$=\left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p\frac{1}{\varepsilon}\left(\log\frac{[R]+2}{R}\right)^{-\varepsilon}+O(1).$$

Ясно, что
$$\frac{X}{Y} > \frac{\left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p \left(\log\frac{[R]+2}{R}\right)^{-\varepsilon} + \varepsilon O(1)}{\left(\log\frac{[R]+2}{R}\right)^{-\varepsilon} + \varepsilon O(1)}.$$
Устремляя $\varepsilon \to 0$, получим
$$\frac{X}{Y} \geqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p.$$
Таким образом, при любом $\varepsilon_0 > 0$ существует $a_n = a_n(\varepsilon)$ такое, что выполнено неравенство
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n^p}{(n+1)\left|\log\frac{n}{R}\right|^p} \geqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p (1-\varepsilon_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^p}{(n+1)^{1-p}}.$$
Это показывает, что константа неравенства теоремы 1 при $l = p$ является точной.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора Ф. Г. Авхадиева за ценные советы и замечания.

Литература

1. *Авхадиев Ф. Г.* Неравенства для интегральных характеристик областей.—Казань: КГУ, 2006.—140 с.
2. *Авхадиев Ф. Г., Насибуллин Р. Г., Шафигуллин И. К.* Неравенства типа Харди со степенными и логарифмическими весами в областях евклидова пространства // Изв. вузов. Матем.—2011.—№ 9.—С. 90–94.
3. *Насибуллин Р. Г.* Обобщения неравенств типа Харди в форме Ю. А. Дубинского // Мат. заметки.—2014.—Vol. 95, № 1.—С. 109–122.
4. *Насибуллин Р. Г., Тухватуллина А. М.* Неравенства типа Харди с логарифмическими и степенными весами для специального семейства невыпуклых областей // Уфимский мат. журн.—2013.—Т. 5, № 2.—С. 43–55.
5. *Соболев Л. С.* Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных производных.—М.: Наука, 1989.—254 с.
6. *Ancona A.* On strong barriers and an inequality of Hardy's for domains in R^n // J. London Math. Soc.—1986.—Vol. 34.—P. 274–290.
7. *Avkhadiev F. G.* Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants // Lobachevskii J. Math.—2006.—Vol. 21.—P. 3–31.
8. *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains // Z. Angew. Math. Mech.—2007.—Vol. 87.—P. 632–642.
9. *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* Weighted Hardy inequalities with sharp constants // Lobachevskii J. Math.—2010.—Vol. 31.—P. 1–7.
10. *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.—2011.—Vol. 18.—P. 723–736.
11. *Balinsky A., Laptev A., and Sobolev A. V.* Generalized Hardy inequality for the magnetic Dirichlet forms // J. of Statistical Physics.—2004.—Vol. 116, № 1–4.—P. 507–521.
12. *Brezis H., Marcus M.* Hardy's inequality revisited // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 4.—1997.—Vol. 25, № 1–2.—P. 217–237.
13. *Chen C., Luor D., and Ou Z.* Extensions of Hardy's inequality // J. Math. Anal. Appl.—2002.—Vol. 273.—P. 160–171.
14. *Čžmešija A.* On weighted discrete Hardy's inequality for negative power numbers // J. Math. Inequal. Appl.—2005.—Vol. 8, № 2.—P. 273–285.
15. *Davies E. B.* A review of Hardy's inequalities // The Maz'ya anniversary Collection. Vol. 2. Oper. Theory Adv. Appl.—1999.—Vol. 110.—P. 55–67.
16. *Dubinskii Yu. A.* A Hardy-type inequality and its applications // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.—2010.—Vol. 269.—P. 106–126.
17. *Gao P.* Hardy type inequalities via auxiliary sequences // J. Math. Anal. Appl.—2008.—Vol. 343.—P. 48–57.

18. *Gord Sinnamon.* Weighted inequalities for positive operators // J. Math. Inequal. Appl.—2005.—Vol. 8, № 3.—P. 419–440.
19. *Hardy G. H.* Note on a theorem of Hilbert // Math. Zeitschr.—1920.—Vol. 6.—P. 314–317.
20. *Hardy G. H., Littlewood J. E., and Polya G.* Inequalities.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1973.
21. *Hoffmann-Ostenhof M., Hoffmann-Ostenhof T., and Laptev A.* A geometrical version of Hardy's inequality // J. Funct. Anal.—2002.—Vol. 189, № 2.—P. 539–548.
22. *Kufner A., Persson L.-E.* Weighted Inequalities of Hardy's type.—World Sci. Publ. Co Inc., 2003.—376 p.
23. *Landau E.* A note on a theorem concerning series of positive terms: extract from a letter of Prof. E. Landau to Prof. J. Schur // J. London Math. Soc.—1926.—Vol. 1.—P. 38–39.
24. *Laptev A., Weidl T.* Hardy inequalities for magnetic Dirichlet forms // Operator Theory: Advances and Appl.—1999.—Vol. 108.—P. 299–305.
25. *Ling-Yau Chan.* Some extensions of Hardy's inequality // Canad. Math. Bull.—1979.—Vol. 22, № 2.—P. 165–169.
26. *Liu J., Xuande Zhang, and Bo Jiang.* Some generalizations and improvements of discrete Hardy's inequality // Comp. Math. Appl.—2012.—Vol. 63.—P. 601–607.
27. *Miclo L.* An example of application of discrete Hardy's inequalities // Markov Processes Relat. Fields.—1999.—Vol. 5, № 3.—P. 319–330.
28. *Miklyukov V. M., Vuorinen M. K.* Hardy's inequalities for $W_0^{1,p}$ — functions on Riemannian manyfolds // Proc. Amer. Math. Soc.—1999.—Vol. 127, № 9.—P. 2745–2754.
29. *Muckenhoupt B.* Hardy's inequality with weights // Stud. Math.—1972.—Vol. 44, № 1.—P. 31–38.
30. *Okpoti Ch. A., Persson L.-E., and Wedestig A.* Weight characterizations for the discrete Hardy inequality with kernel // J. Math. Inequal. Appl.—2006.—Vol. 2006.—P. 1–14.
31. *Pachpatte B. G.* A note on certain inequalities related to Hardy's inequality // Indian J. Pure Appl. Math.—1992.—Vol. 23, № 11.—P. 773–776.
32. *Pečarić J. E., Love E. R.* Still more generalization of Hardy's inequality // J. Austral. Math. Soc. Ser. A.—1995.—Vol. 59.—P. 214–224.
33. *Qiang Chen, Bicheng Yang.* Half-discrete Hardy-Hilbert's inequality with two interval variables // J. Math. Inequal. Appl.—2013.—Vol. 485.
34. *Stepanov V. D.* The weighted Hardy's inequality for nonincreasing functions // Trans. Amer. Math. Soc.—1993.—Vol. 338, № 1.—P. 173–186.
35. *Talenti G.* Osservazione sopra una classe di disuguaglianze // Rend. Semin. Mat. Efis. Milano.—1969.—Vol. 39.—P. 171–185.
36. *Tomaselli G.* A class of inequalities // Boll. Unione Mat. Ital. Ser.—1969.—Vol. 4, № 6.—P. 622–631.
37. *Wannebo A.* Hardy Inequalities // Proc. Amer. Math. Soc.—1990.—Vol. 109, № 1.—P. 85–95.

Статья поступила 28 августа 2014 г.

Насибуллин Рамиль Гайсаевич
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
старший преподаватель каф. теории функций и приближений
Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского
РОССИЯ, 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18
E-mail: `NasibullinRamil@gmail.com`

ON A DISCRETE HARDY TYPE INEQUALITY WITH LOGARITHMIC WEIGHT

Nasibullin R. G.

We prove a new discrete Hardy type inequality with logarithmic weight. Logarithmic factors are located under the module sign. The constant in this inequality is sharp.

Key words: Hardy type inequality, logarithmic weight, sharpness of constants.