Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 2, С. 76–85

УДК **517.95**

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Т. К. Юлдашев

Рассмотрены вопросы об однозначной разрешимости обратной задачи для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа Фредгольма в частных производных третьего порядка с вырожденным ядром. Метод вырожденного ядра, разработанный для интегрального уравнения Фредгольма второго рода, модифицирован для случая рассматриваемого интегро-дифференциального уравнения типа Фредгольма в частных производных третьего порядка. С помощью обозначения интегро-дифференциальное уравнение типа Фредгольма сведено к системе алгебраических уравнений. Используя дополнительное условие относительно основной неизвестной функции, получим нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода, и относительно функции восстановления получим интегральное уравнение типа Вольтерра первого рода. Применим принцип сжимающих отображений, который дает и фактический метод нахождения решений — метод последовательных приближений. Далее определяется функция восстановления.

Ключевые слова: обратная задача, интегро-дифференциальное уравнение, уравнение типа Фредгольма, вырожденное ядро, система алгебраических уравнений, однозначная разрешимость.

1. Постановка задачи

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению прямых и обратных задач для уравнений неклассической математической физики. Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков. Многие задачи газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводятся к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков [1]. Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы. Часто изучение задач моделирования фильтрации жидкости в пористых средах сводится к рассмотрению дифференциальных уравнений третьего порядка [2]. К дифференциальным уравнениям в частных производных третьего порядка также сводятся задачи изучения распространения волн в слабодиспергирующих средах, в холодной плазме и магнитной гидродинамике и т. д. Изучению уравнений в частных производных третьего порядка посвящено большое количество работ (см., например, [2–8]).

Теория обратных задач представляет собой активно развивающееся направление современной теории дифференциальных уравнений. Интенсивное исследование обратных задач обусловлено и необходимостью разработки математических методов решения прикладных проблем. Обратную задачу назовем линейной, если функция восстановления входит в данное уравнение линейно. Линейные обратные задачи рассматривались, в частности, в [9–21].

В настоящей работе предлагается методика изучения обратной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа Фредгольма в частных производных третьего порядка с вырожденным ядром.

Итак, рассматривается в области $\Omega \equiv \Omega_T \times \Omega_l$ интегро-дифференциальное уравнение типа Фредгольма третьего порядка с вырожденным ядром

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \lambda \int\limits_0^T K(t,s)\frac{\partial u(s,x)}{\partial s}\,ds\right)$$
$$= p(t)\,\beta(x) + f\left(x, \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(s,y)\,u(s,y)\,dy\,ds\right) \quad (1)$$

с условиями

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \quad u_t(0,x) = \varphi_2(x), \quad x \in \Omega_l, \quad (2)$$

$$u(t,0) = \psi(t), \quad t \in \Omega_T, \quad (3)$$

$$u(t_0,x) = \eta(x), \quad 0 < t_0 < T, \quad x \in \Omega_l, \quad (4)$$

где $p(t) \in C(\Omega_T)$, $f(x,\gamma) \in C(\Omega_l \times R)$, $\varphi_k(x) \in C^1(\Omega_l)$, $k = 1,2$, $\psi(t) \in C^2(\Omega_T)$, $\psi(0) = \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$, $K(t,s) = \sum_{i=1}^n a_i(t)\,b_i(s)$, $0 < a_i(t), b_i(s) \in C(\Omega_T)$, $\eta(x) \in C^1(\Omega_l)$, $\beta(x) \in C(\Omega_l)$ — функция восстановления, $\Omega_T \equiv [0,T]$, $\Omega_l \equiv [0,l]$, λ — спектральный параметр, $0 < \int_0^T \int_0^l |H(t,x)|\,dx\,dt < \infty$.

Под решением обратной задачи (1)–(4) понимаем пару функций $\{u(t,x) \in C^{2,1}(\Omega), \beta(x) \in C(\Omega_l)\}$, удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2)–(4).

2. Начальная задача (1)–(3)

В уравнении (1) сделаем замену $u_{tx}(t,x) = \vartheta(t,x)$. Тогда оно приобретает вид

$$\frac{\partial \vartheta(t,x)}{\partial t} + \lambda \int\limits_0^T K(t,s)\,\vartheta(s,x)\,ds = p(t)\,\beta(x) + f\left(x, \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(s,y)\,u(s,y)\,dy\,ds\right). \quad (5)$$

С помощью обозначения

$$c_i(x) = \int\limits_0^T b_i(s)\,\vartheta(s,x)\,ds \quad (6)$$

уравнение (1) перепишется в следующем виде:

$$\frac{\partial \vartheta(t,x)}{\partial t} = -\lambda \sum_{i=1}^n a_i(t)\,c_i(x) + p(t)\,\beta(x) + f\left(x, \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(s,y)\,u(s,y)\,dy\,ds\right).$$

В силу постановки задачи правая часть этого выражения суть непрерывные функции своих аргументов. Путем интегрирования по t из последнего равенства получаем

$$\vartheta(t,x) = D_1(x) - \lambda \sum_{i=1}^{n} \int_0^t a_i(s)\,ds \cdot c_i(x) + q(t)\,\beta(x) + t\,f\left(x, \int_0^T \int_0^l H(s,y)\,u(s,y)\,dy\,ds\right), \quad (7)$$

где $D_1(x) \in C^1(\Omega_l)$ — произвольная функция, которая подлежит определению, $D_1(0)=0$, $q(t) = \int_0^t p(s)ds$.

Подставляя (7) в (6), имеем

$$c_i(x) = \int_0^T b_i(s) \left[D_1(x) - \lambda \sum_{i=1}^{n} \int_0^s a_i(\theta)\,d\theta \cdot c_i(x) + q(s)\,\beta(x) + s\,f\left(x, \int_0^T \int_0^l H(\theta,y)\,u(\theta,y)\,dy\,d\theta\right)\right] ds. \quad (8)$$

Примем обозначение

$$B_i(x) = \int_0^T b_i(s) \left[D_1(x) + q(s)\,\beta(x) + s\,f\left(x, \int_0^T \int_0^l H(\theta,y)\,u(\theta,y)\,dy\,d\theta\right)\right] ds. \quad (9)$$

Пусть

$$A_{ij} = \int_0^T b_i(s) \int_0^s a_i(\theta)\,d\theta\,ds > 0. \quad (10)$$

Тогда выражение в (8) запишем в виде следующей системы алгебраических уравнений (САУ):

$$c_i(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\,c_j(x) = B_i(x), \quad i = 1, \ldots, n. \quad (11)$$

САУ (11) однозначно разрешима при любых конечных $B_i(x)$, если выполняется следующее условие:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+\lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \ldots & \lambda A_{1n} \\ \lambda A_{21} & 1+\lambda A_{22} & \ldots & \lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{n1} & \lambda A_{n2} & \ldots & 1+\lambda A_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (12)$$

Определитель $\Delta(\lambda)$ в (12) есть многочлен относительно λ степени не выше n. Уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ имеет не более n различных корней. Эти корни являются собственными числами ядра интегро-дифференциального уравнения (1). Другие значения λ являются регулярными, при которых условие (12) выполняется. Для регулярных значений λ

система (11) имеет единственное решение при любой конечной правой части. В настоящей работе для таких регулярных значений параметра λ устанавливается однозначная разрешимость поставленной обратной задачи (1)–(4).

Сначала решения САУ (11) записываем в виде

$$c_i(x) = \frac{\Delta_i(\lambda, x)}{\Delta(\lambda)}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

где

$$\Delta_i(\lambda, x) = \begin{vmatrix} 1+\lambda A_{11} & \ldots & \lambda A_{1(i-1)} & B_1(x) & \lambda A_{1(i+1)} & \ldots & \lambda A_{1n} \\ \lambda A_{21} & \ldots & \lambda A_{2(i-1)} & B_2(x) & \lambda A_{2(i+1)} & \ldots & \lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{n1} & \ldots & \lambda A_{n(i-1)} & B_n(x) & \lambda A_{n(i+1)} & \ldots & 1+\lambda A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Среди элементов определителей $\Delta_i(\lambda, x)$ находятся функции $B_i(x)$. В свою очередь, в составе функций $B_i(x)$ находятся пока неизвестные функции $D_1(x)$, $u(t, x)$ и $\beta(x)$. В самом деле, эти неизвестные функции находились в правой части САУ (11). Чтобы вывести их вне знака определителей, выражение в (9) запишем в следующем виде:

$$B_i(x) = D_1(x)\, B_{1i} + f\left(x, \int_0^T \int_0^l H(\theta, y)\, u(\theta, y)\, dy\, d\theta\right) B_{2i} + \beta(x)\, B_{3i},$$

где

$$B_{1i} = \int_0^T b_i(s)\, ds, \quad B_{2i} = \int_0^T s\, b_i(s)\, ds, \quad B_{3i} = \int_0^T q(s)\, b_i(s)\, ds.$$

В этом случае согласно свойству определителя имеем

$$\Delta_i(\lambda, x) = D_1(x)\, \Delta_{1i}(\lambda) + f\left(x, \int_0^T \int_0^l H(\theta, y)\, u(\theta, y)\, dy\, d\theta\right) \Delta_{2i}(\lambda) + \beta(x)\, \Delta_{3i}(\lambda),$$

где

$$\Delta_{ki}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+\lambda A_{11} & \ldots & \lambda A_{1(i-1)} & B_{k1} & \lambda A_{1(i+1)} & \ldots & \lambda A_{1n} \\ \lambda A_{21} & \ldots & \lambda A_{2(i-1)} & B_{k2} & \lambda A_{2(i+1)} & \ldots & \lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{n1} & \ldots & \lambda A_{n(i-1)} & B_{kn} & \lambda A_{n(i+1)} & \ldots & 1+\lambda A_{nn} \end{vmatrix}, \quad k = 1, \ldots, 3.$$

Тогда формула (13) записывается в виде

$$c_i(x) = D_1(x)\frac{\Delta_{1i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + f\left(x, \int_0^T \int_0^l H(\theta, y)\, u(\theta, y)\, dy\, d\theta\right) \frac{\Delta_{2i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + \beta(x)\frac{\Delta_{3i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}. \tag{14}$$

Итак, мы решили САУ (11):

$$c_i(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, c_j(x) = D_1(x)\, B_{1i} + f\left(x, \int_0^T \int_0^l H(\theta, y)\, u(\theta, y)\, dy\, d\theta\right) B_{2i} + \beta(x)\, B_{3i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и решения представили в виде функций (14).

Подстановка (14) в (7) дает следующее уравнение:

$$u_{tx}(t,x) = D_1(x) - \lambda \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^t a_i(s)\,ds \left\{ D_1(x)\,\frac{\Delta_{1i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right.$$

$$\left. + f\left(x, \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(\theta,y)\,u(\theta,y)\,dy\,d\theta\right) \frac{\Delta_{2i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + \beta(x)\,\frac{\Delta_{3i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right\}$$

$$+ \; q(t)\,\beta(x) + t\,f\left(x, \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(\theta,y)\,u(\theta,y)\,dy\,d\theta\right). \quad (15)$$

Путем интегрирования по x и по t из (15) получаем

$$u(t,x) = D_2(x) + \int\limits_0^t E(s)\,ds + t \int\limits_0^x D_1(y)\,dy - \lambda \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^t (t-s)\,a_i(s)\,ds$$

$$\times \int\limits_0^x \left\{ D_1(y)\,\frac{\Delta_{1i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + f\left(y, \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(\theta,z)\,u(\theta,z)\,dz\,d\theta\right) \frac{\Delta_{2i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + \beta(y)\frac{\Delta_{3i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right\} dy \quad (16)$$

$$+ \overline{q}(t) \int\limits_0^x \beta(y)\,dy + \frac{t^2}{2} \int\limits_0^x f\left(y, \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(\theta,z)\,u(\theta,z)\,dz\,d\theta\right) dy,$$

где $D_2(x)$, $E(t)$ — произвольные непрерывные функции, которые будут определяться из условий (2) и (3), $\overline{q}(t) = \int_0^t q(s)\,ds$.

Из (16), используя условия (2) и (3), получаем следующие равенства:

$$\varphi_1(x) = D_2(x), \quad \psi(t) = \int\limits_0^t E(s)\,ds, \quad \varphi_2(x) = \int\limits_0^x D_1(y)\,dy.$$

Тогда интегральное уравнение (16) запишется в виде

$$u(t,x) = Q(t,x) + \mu(t) \int\limits_0^x \beta(y)\,dy + \nu(t) \int\limits_0^x f\left(y, \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(s,z)\,u(s,z)\,dz\,ds\right) dy, \quad (17)$$

где

$$Q(t,x) = \varphi_1(x) + \psi(t) + \varphi_2(x) \left[t - \lambda \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^t (t-s)\,a_i(s)\,ds\,\frac{\Delta_{1i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right],$$

$$\mu(t) = \overline{q}(t) - \lambda \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^t (t-s)\,a_i(s)\,ds\,\frac{\Delta_{3i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

$$\nu(t) = \frac{t^2}{2} - \lambda \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^t (t-s)\,a_i(s)\,ds\,\frac{\Delta_{2i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}.$$

Итак, исходную задачу (1)–(3) свели к интегральному уравнению (17). Уравнение (17) относительно основной неизвестной функции $u(t,x)$ является интегральным уравнением типа Вольтерра второго рода, а относительно функции восстановления $\beta(x)$ является интегральным уравнением типа Вольтерра первого рода.

3. Теорема об однозначной разрешимости обратной задачи

Учет дополнительного условия (4) в (17) дает

$$\mu(t_0)\int\limits_0^x \beta(y)\,dy + \nu(t_0)\int\limits_0^x f\left(y, \int\limits_0^T\int\limits_0^l H(s,z)\,u(s,z)\,dz\,ds\right)dy = g(x), \tag{18}$$

где $g(x) = \eta(x) - Q(t_0,x)$.

Путем дифференцирования из (18) для функции восстановления $\beta(x)$ получаем следующее соотношение:

$$\beta(x) = \overline{g}(x) - \overline{F}(t_0)\,f\left(x, \int\limits_0^T\int\limits_0^l H(s,z)\,u(s,z)\,dz\,ds\right), \tag{19}$$

где $\overline{g}(x) = \frac{g'(x)}{\mu(t_0)}$, $\overline{F}(t_0) = \frac{\nu(t_0)}{\mu(t_0)}$.

Подставляя (19) в (17), относительно основной неизвестной функции $u(t,x)$ окончательно получим следующее интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода:

$$u(t,x) = \Re u(t,x) \equiv h(t,x) + \Phi(t)\int\limits_0^x f\left(y, \int\limits_0^T\int\limits_0^l H(s,z)\,u(s,z)\,dz\,ds\right)dy, \tag{20}$$

где

$$h(t,x) = Q(t,x) + \mu(t)\int\limits_0^x \overline{g}(y)\,dy, \quad \Phi(t) = \nu(t) - \overline{F}(t_0)\,\mu(t).$$

Для произвольной функции $l(t,x) \in C(\Omega)$ рассматривается следующая норма:

$$\|l(t,x\|_C = \max\left\{\big|l(t,x)\big| : (t,x)\in\Omega\right\}.$$

Теорема. *Пусть*

1) *выполняются условия* (10), (12), $\mu(t_0) \neq 0$;

2) $\Delta = \max\{|h(t,x)| : (t,x)\in\Omega\} < \infty$;

3) $M = \max\left\{\left|\int_0^x \Phi(t)\,f\,(y,\gamma)\,dy\right| : (t,x)\in\Omega\right\} < \infty$;

4) $|f(x,\gamma_1) - f(x,\gamma_2)| \leqslant L(x)|\gamma_1-\gamma_2|$, $\delta_1 = |\gamma| \leqslant \int_0^T\int_0^l |H(t,x)|\,dx\,dt < \infty$;

5) $\delta_2 = \max\left\{\int_0^x |\Phi(t)|\,L(y)\,dy : (t,x)\in\Omega\right\} < \infty$, $\rho = \delta_1\delta_2 < 1$.

Тогда существует единственная пара решений $\left\{u(t,x)\in C^{2,1}(\Omega),\ \beta(x)\in C(\Omega_l)\right\}$ *обратной задачи* (1)–(4).

$\lhd$ Рассмотрим следующий итерационный процесс для уравнения (20):

$$u_0(t,x) = 0, \quad u_{k+1}(t,x) = \Re u_k(t,x), \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{21}$$

В силу условий теоремы из (21) получаем следующие оценки:

$$\|u_1(t,x)-u_0(t,x)\|_C \leqslant \max\left\{\left|h(t,x)+\Phi(t)\int\limits_0^x f(y,0)\,dy\right|:\ (t,x)\in\Omega\right\}\leqslant \Delta+M, \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\|u_{k+1}(t,x)-u_k(t,x)\|_C \leqslant \max\Bigg\{&\big|\Phi(t)\big| \\ &\times\int\limits_0^x L(y)\int\limits_0^T\int\limits_0^l |H(s,z)|\,\|u_k(s,z)-u_{k-1}(s,z)\|_C\,dz\,ds\,dy:\ (t,x)\in\Omega\Bigg\}\\ &\leqslant \delta_1\max\left\{\big|\Phi(t)\big|\int\limits_0^x L(y)\,\|u_k(t,y)-u_{k-1}(t,y)\|_C\,dy:\ (t,x)\in\Omega\right\}\\ &\leqslant \rho\,\|u_k(t,x)-u_{k-1}(t,x)\|_C. \end{aligned}\tag{23}$$

В силу последнего условия теоремы из оценки (23) следует, что оператор в правой части (20) является сжимающим. Из оценок (22) и (23) заключаем, что для оператора (20) существует единственная неподвижная точка (см., например, [22, с. 389–401]). Следовательно, интегральное уравнение (20) имеет единственное решение $u(t,x)\in C(\Omega)$. Здесь предполагается, что неподвижная точка оператора автоматически попадает в $C^{2,1}(\Omega)$ благодаря соотношению

$$u(t,x)=\Re u(t,x)\in C^{2,1}(\Omega).$$

Кроме того, справедлива оценка скорости сходимости

$$\|u_{k+1}(t,x)-u(t,x)\|_C\leqslant \frac{\rho^{k+1}}{1-\rho}\,(\Delta+M).$$

Подставляя решение уравнения (20) в формулу (19), однозначно восстановим вторую неизвестную функцию $\beta(x)$. $\triangleright$

Отметим, что условие $\mu(t_0)\neq 0$ в теореме эквивалентно следующему условию:

$$p(t)\neq\lambda\sum_{i=1}^n a_i(t)\,\frac{\Delta_{3i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}.$$

4. Пример решения обратной задачи

Рассмотрим простейший пример. В области $\Omega\equiv\Omega_1\times\Omega_1$ решаем интегро-дифференциальное уравнение с вырожденным ядром

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}+\int\limits_0^1 t\cdot s\frac{\partial u(s,x)}{\partial s}\,ds\right)=\left(1+\frac{t}{3}\right)\cdot\beta(x) \tag{24}$$

при условиях

$$u(0,x)=3x,\quad u_t(0,x)=1,\quad u(t,0)=t, \tag{25}$$

$$u\left(\frac{1}{2},x\right)=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{1}{2}, \tag{26}$$

где $\beta(x)\in C\big(\Omega_1\big)$ — функция восстановления, $\Omega_1\equiv[0;1]$.

В уравнении (24) сделаем замену $u_{tx}(t,x)=\vartheta(t,x)$. Тогда оно приобретает вид

$$\frac{\partial\vartheta(t,x)}{\partial t}+\int\limits_0^1 t\,s\,\vartheta(s,x)\,ds=\left(1+\frac{t}{3}\right)\beta(x). \tag{27}$$

С помощью обозначения

$$c(x)=\int\limits_0^1 s\,\vartheta(s,x)\,ds \tag{28}$$

уравнение (24) перепишется в следующем виде:

$$\frac{\partial\vartheta(t,x)}{\partial t}+t\,c(x)=\left(1+\frac{t}{3}\right)\beta(x).$$

Путем интегрирования по t из последнего равенства получаем

$$\vartheta(t,x)=D_1(x)-\frac{t^2}{2}\,c(x)+\left(t+\frac{t^2}{6}\right)\beta(x), \tag{29}$$

где $D_1(x)$ — произвольная функция, которая подлежит определению.

Подставляя (29) в (28), имеем

$$c(x)=\frac{4}{9}D_1(x)+\frac{1}{3}\,\beta(x). \tag{30}$$

Теперь, подставляя выражение (30) в (29), имеем следующее соотношение:

$$u_{tx}(t,x)=\frac{9-2t^2}{9}D_1(x)+t\,\beta(x). \tag{31}$$

Путем интегрирования по x и по t из (31) получаем

$$u(t,x)=D_2(x)+\int\limits_0^t E(s)\,ds+\frac{27t-2t^3}{27}\int\limits_0^x D_1(y)\,dy+\frac{t^2}{2}\int\limits_0^x\beta(y)\,dy, \tag{32}$$

где $D_2(x)$, $E(t)$ — произвольные функции, которые подлежат определению.

Используя условия (25), из (32) приходим к следующему соотношению:

$$u(t,x)=3x+t+\frac{t^2}{2}\int\limits_0^x\beta(y)\,dy. \tag{33}$$

Учет дополнительного условия (26) в (33) дает $\int_0^x\beta(y)\,dy=4x^2$ или $\beta(x)=8x$. Подставляя это в (33), получим $u(t,x)=2t^2x^2+3x+t$. Подстановка полученных выше результатов $\beta(x)=8x$ и $u(t,x)=2t^2x^2+3x+t$ в первоначальное интегро-дифференциальное уравнение (24) дает тождество $8x\left(1+\frac{t}{3}\right)\equiv 8x\left(1+\frac{t}{3}\right)$. Кроме того, функция $u(t,x)=2t^2x^2+3x+t$ удовлетворяет поставленным условиям (25) и (26). Следовательно, решением обратной задачи (24)–(26) в области $\Omega\equiv\Omega_1\times\Omega_1$ является пара функций $\left\{2t^2x^2+3x+t;8x\right\}$.

Литература

1. *Алгазин С. Д., Кийко И. А.* Флаттер пластин и оболочек.—М.: Наука, 2006.—248 с.
2. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Диф. уравнения.—1982.—Т. 18, № 4.—С. 689–699.
3. *Андреев А. А., Яковлева Ю. О.* Характеристическая задача для системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка общего вида с некратными характеристиками // Вестн. Самарского гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2013.—Т. 30, № 1.—С. 31–36.
4. *Бештоков М. Х.* Априорные оценки решения нелокальных краевых задач для псевдопараболического уравнения // Владикавк. мат. журн.—2013.—Т. 15, вып. 3.—С. 19–36.
5. *Зикиров О. С.* О задаче Дирихле для гиперболических уравнений третьего порядка // Изв. вузов. Математика.—2014.—№ 7.—С. 63–71.
6. *Сабитов К. Б.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области // Диф. уравнения.—2011.—Т. 47, № 5.—С. 705–713.
7. *Репин О. А., Кумыкова С. К.* Задача со смещением для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами // Вестн. Самарского гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2012.—Т. 29, № 4.—С. 17–25.
8. *Сопуев А., Аркабаев Н. К.* Задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка // Вестн. Томского гос. ун-та. Математика. Механика.—2013.—Т. 21, № 1.—С. 16–23.
9. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач.—М.: МГУ, 1994.—285 с.
10. *Денисов А. М.* Обратная задача для квазилинейной системы уравнений в частных производных с нелокальным краевым условием // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2014.—Т. 54, № 10.—С. 1571–1579.
11. *Кононенко Л. И.* Прямая и обратная задачи для сингулярной системы с медленными и быстрыми переменными в химической кинетике // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, вып. 1.—С. 39–46.
12. *Костин А. Б.* Обратная задача восстановления источника в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения // Мат. сб.—2013.—Т. 204, № 10.—С. 3–46.
13. *Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я.* Линейные операторы и некорректные задачи.—М.: Наука, 1991.—331 с.
14. *Мегралиев Я. Т.* Об одной обратной краевой задаче для эллиптического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода // Тр. ИММ УрО РАН.—2014.—Т. 19, № 1.—С. 226–235.
15. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Мат. сб.—1992.—Т. 183, № 4.—С. 49–88.
16. *Прилепко А. И., Ткаченко Д. С.* Свойства решений параболического уравнения и единственность решения обратной задачи об источнике с интегральным переопределением // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2003.—Т. 43, № 4.—С. 562–570.
17. *Романов В. Г.* Обратные задачи для математической физики.—М.: Наука, 1984.—264 с.
18. *Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В.* Обратная задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа с нелокальным граничным условием // Сиб. мат. журн.—2012.—Т. 53, № 3.—С. 633–647.
19. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка // Вестн. Самарского гос. ун-та. Сер. Естеств. науки.—2013.—№ 1.—С. 58–66.
20. *Юлдашев Т. К.* Об обратной задаче для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений высшего порядка // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. Физика. Математика.—2014.—№ 1.—С. 153–163.
21. *Юлдашев Т. К.* Об одной обратной задаче для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. Физика. Математика.—2015.—№ 2.—С. 180–189.
22. *Треногин В. А.* Функциональный анализ.—М.: Наука, 1980.—495 с.

Статья поступила 19 мая 2015 г.

Юлдашев Турсун Камалдинович
Сибирский государственный аэрокосмический
университет им. М. Ф. Решетнева,
доцент кафедры высшей математики
РОССИЯ, 660014, Красноярск, пр. им. газ. «Красноярский рабочий»
E-mail: tursunbay@rambler.ru

INVERSE PROBLEM FOR A THIRD ORDER FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH DEGENERATE KERNEL

Yuldashev T. K.

It is considered the questions of one value solvability of the inverse problem for a third order nonlinear partial Fredholm type integro-differential equation with degenerate kernel. The method of degenerate kernel for second kind Fredholm integral equations is modified for the case of third order partial Fredholm type integro-differential equation. The Fredholm type integro-differential equation is reduced to a system of algebraic equations. By the aid of additional condition it is obtained a second kind nonlinear Volterra type integral equation with respect to main unknown function and a first kind linear Volterra type integral equation with respect to restore function. It is used the method of compressing maps, which gave us the real method of finding the solutions — the method of successive approximations. Further is defined the restore function.

Key words: inverse problem, integro-differential equation, Fredholm type equation, degenerate kernel, system of algebraic equations, one valued solvability.