Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 3, С. 3–14

УДК **517.946**

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ В ЛИНЕЙНОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Р. А. Алиев

Исследуется обратная задача нахождения коэффициентов при старших производных эллиптического уравнения с различными граничными условиями в заданном прямоугольнике. Рассматриваемые в обратных задачах неизвестные коэффициенты также входят в дополнительные условия. Доказана теорема существования, единственности и устойчивости решения поставленной обратной задачи. С помощью метода последовательных приближений построен регуляризирующий алгоритм для определения коэффициентов.

Ключевые слова: обратная задача, эллиптическое уравнение.

1. Введение

Обратные задачи по определению коэффициентов дифференциальных уравнений с частными производными представляют интерес во многих прикладных исследованиях. Чаще всего такие задачи допускают только приближенное решение и некорректны в классическом смысле. К ним относятся задачи идентификации неизвестных плотностей источников и коэффициентов. Большое значение имеют коэффициентные задачи для эллиптических уравнений, в которых неизвестные коэффициенты не зависят от одной переменной [1–11]. Задача для прямоугольной области с дополнительным условием совпадения коэффициентов при старших производных исследовалась в [2] при $n = 2$. Нами рассмотрен более широкий класс обратных задач в прямоугольнике.

В настоящей работе исследуются вопросы корректности одного класса обратных задач определения коэффициентов эллиптического уравнения. Построен регуляризирующий алгоритм определения коэффициентов.

1. Постановка задачи

Пусть

$$I_1 = \{1,2\},\ I_2 = \{3,4\},\ I_3 = \{1,3\},\ I_4 = \{2,4\},\ p \in I_1,\ \omega = p + (-1)^{p+1},$$

$$\omega_1 = 1 + \frac{i_0 - p}{2}, \quad \omega_2 = 3 - \omega_1.$$

Пусть при $i_0 \in I_j \cap I_{2+p}$, $i_1 = \frac{(i_0-3)j+4}{(3-j)i_0-j}$, $i_2 = 5 - 2j$, $i_3 = 6 - 2j$, $j = 1, 2$.

Рассмотрим при фиксированных параметрах i_0, p задачу определения функций $a_{i_0}(x_p)$, $u(x_1,x_2)$, удовлетворяющих уравнениям

$$-a_1(x_1)a_2(x_2)u_{x_1x_1} - a_3(x_1)a_4(x_2)u_{x_2x_2} + c(x_1,x_2)u = h(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \in D, \tag{1}$$

$$u(0,x_2) = \phi_1(x_2), \quad u(l_1,x_2) = \phi_2(x_2), \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2, \tag{2}$$

$$u(x_1,0) = \varphi_1(x_1), \quad u(x_1,l_2) = \varphi_2(x_1), \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1, \tag{3}$$

$$a_{i_0}(x_p)a_{i_1}(0)u_{x_\omega}(x_1,x_2)|_{x_\omega=0} = g_{i_0}(x_p), \quad 0 \leqslant x_p \leqslant l_p, \tag{4}$$

при условиях $\phi_1(0) = \varphi_1(0)$, $\phi_1(l_2) = \varphi_2(0)$, $\phi_2(0) = \varphi_1(l_1)$, $\phi_2(l_2) = \varphi_2(l_1)$.

Здесь

$$D = \{(x_1,x_2) :\ 0 < x_1 < l_1,\, 0 < x_2 < l_2\},$$

$a_{i_1}(x_\omega)$, $a_{i_{p+1}}(x_p)$, $a_{i_{4-p}}(x_\omega)$, $c(x_1,x_2)$, $h(x_1,x_2)$, $\phi_i(x_2)$, $\varphi_i(x_1)$, $g_{i_0}(x_p)$, $i = 1,2$, — заданные функции $a_{i_1}(x_\omega), a_{i_{4-p}}(x_\omega) \in C^\alpha[0,l_\omega]$, $a_{i_{p+1}}(x_p) \in C^\alpha[0,l_p]$, $c(x_1,x_2) \in C^\alpha(\bar{D})$, $h(x_1,x_2) \in C^\alpha(\bar{D})$, $\phi_i(x_2) \in C^{2+\alpha}[0,l_2]$, $\varphi_i(x_1) \in C^{2+\alpha}[0,l_1]$, $g_{i_0}(x_p) \in C^\alpha[0,l_p]$, $i = 1,2$, $0 < \alpha < 1$.

В задачах теплофизики условие (4) является выражением теплового потока на границе $(p-1)x_1 + (2-p)x_2 = 0$.

Определение. Функции $\{a_{i_0}(x_p), u(x_1,x_2)\}$ назовем *решением задачи* (1)–(4), если $0 < a_{i_0}(x_p) \in C[0,l_p]$, $u(x_1,x_2) \in C^2(D)\bigcap C(\bar{D})$ и удовлетворяются соотношения (1)–(4).

Нетрудно проверить, что если решение задачи (1)–(4) существует, то при принятых предположениях о гладкости данных задачи $a_{i_0}(x_p) \in C^\alpha[0,l_p]$, $u(x_1,x_2) \in C^{2+\alpha}(\bar{D})$. Действительно, при принятых предположениях из общей теории эллиптических уравнений следует, что $u(x_1,x_2) \in W^2_{p_1}(D) \subset C^{1+\alpha}(\bar{D})$ при $p_1 > 2$. Поэтому из дополнительного условия (4) следует, что $a_{i_0}(x_p) \in C^\alpha[0,l_p]$. Поэтому $u(x_1,x_2) \in C^{2+\alpha}(\bar{D})$ [12, с. 157].

Уравнение (1) также можно записать в следующем виде:

$$-a_{i_0}(x_p)a_{i_1}(x_\omega)u_{x_{\omega_1}x_{\omega_1}} - a_{i_{p+1}}(x_p)a_{i_{4-p}}(x_\omega)u_{x_{\omega_2}x_{\omega_2}} + c(x_1,x_2)u = h(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \in D.$$

2. Единственность и устойчивость

Пусть кроме задачи (1)–(4) задана еще задача $(\bar{1})$–$(\bar{4})$, где все функции, входящие в (1)–(4), заменены соответствующими функциями с чертой. Положим

$$Z(x_1,x_2) = \bar{u}(x_1,x_2) - u(x_1,x_2), \quad \lambda_{i_0}(x_p) = \bar{a}_{i_0}(x_p) - a_{i_0}(x_p),$$

$$\delta_{i_1}(x_\omega) = \bar{a}_{i_1}(x_\omega) - a_{i_1}(x_\omega), \quad \delta_{i_{p+1}}(x_p) = \bar{a}_{i_{p+1}}(x_p) - a_{i_{p+1}}(x_p),$$

$$\delta_{i_{4-p}}(x_\omega) = \bar{a}_{i_{4-p}}(x_\omega) - a_{i_{4-p}}(x_\omega), \quad \delta_{i_0}(x_1,x_2) = \bar{c}(x_1,x_2) - c(x_1,x_2),$$

$$\delta_5(x_1,x_2) = \bar{h}(x_1,x_2) - h(x_1,x_2), \quad \delta_{i+5}(x_2) = \bar{\phi}_i(x_2) - \phi_i(x_2),$$

$$\delta_{i+7}(x_1) = \bar{\varphi}_i(x_1) - \varphi_i(x_1), \quad \delta_{10}(x_p) = \bar{g}_{i_0}(x_p) - g_{i_0}(x_p), \quad i = 1,2.$$

Через $\tilde{\delta}_p(x_1,x_2)$ обозначим функцию, совпадающую на границе при каждом $p \in I_1$ с $\delta_{i+5}(x_2)$, $\delta_{i+7}(x_1)$, $i = 1,2$, соответственно и принадлежащую $C^{2+\alpha}(\bar{D})$. Обозначим

$$P_i(x_j) = \frac{(2-i)l_j - (-1)^{i+1}x_j}{l_j}, \quad i,j = 1,2.$$

Функция $\tilde{\delta}_p(x_1, x_2)$ определяется следующим образом:

$$\tilde{\delta}_p(x_1,x_2) = \sum_{i=1}^{2} P_i(x_1)\delta_{i+5}(x_2) + P_i(x_2)\Big[\delta_{i+7}(x_1) + \frac{x_1 - l_1}{l_1}\delta_{i+7}(0) + \frac{x_1}{l_1}\delta_7(il_2 - l_2)\Big].$$

Лемма 1. *Пусть решение задачи (1)–(4) существует. Тогда верна следующая оценка:*

$$|u(x_1,x_2)| \leqslant \max\left\{\max_D\left|\frac{h(x_1,x_2)}{c(x_1,x_2)}\right|, \max_{x_1,\,x_2}\max_i\Big[|\phi_i(x_2)|, |\varphi_i(x_1)|\Big]\right\}.$$

$\lhd$ Оценка легко вытекает из принципа максимума. $\rhd$

Единственность решения обратной задачи (1)–(4), в предположении его существования, устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть при фиксированных параметрах i_0, p выполнены условия $g_{i_0}(x_p) \neq 0$, $Nl_1l_2 < 1$. Тогда решение задачи (1)–(4) единственно и верна следующая оценка:*

$$\begin{gathered}
\|\bar{a}_{i_0}(x_p) - a_{i_0}(x_p)\|_{C[0,l_p]} + \|\bar{u} - u\|_{C(\bar{D})} \\
\leqslant N_1\Big\{\|\bar{a}_{i_1}(x_\omega) - a_{i_1}(x_\omega)\|_{C[0,l_\omega]} + \|\bar{a}_{i_{p+1}}(x_p) - a_{i_{p+1}}(x_p)\|_{C[0,l_p]} \\
+ \|\bar{a}_{i_{4-p}}(x_p) - a_{i_{4-p}}(x_p)\|_{C[0,l_p]} + \|\bar{c}(x_1,x_2) - c(x_1,x_2)\|_{C(\bar{D})} \\
+ \|\bar{h}(x_1,x_2) - h(x_1,x_2)\|_{C(\bar{D})} + \sum_{i=1}^{2}\Big[\|\bar{\phi}_i(x_2) - \phi_i(x_2)\|_{C^2[0,l_2]} \\
+ \|\bar{\varphi}_i(x_1) - \varphi_i(x_1)\|_{C^2[0,l_1]}\Big] + \|\bar{g}_{i_0}(x_p) - g_{i_0}(x_p)\|_{C[0,l_p]}\Big\},
\end{gathered} \tag{5}$$

где N, N_1 — положительные постоянные, зависящие от данных задачи и множества решений, соответственно.

$\lhd$ Из $(\bar{1})$–$(\bar{4})$ вычтем (1)–(4) и положим $Z_1(x_1,x_2) = Z(x_1,x_2) - \tilde{\delta}_p(x_1,x_2)$. Тогда получим

$$\begin{gathered}
-\bar{a}_{i_0}(x_p)\bar{a}_{i_1}(x_\omega)Z_{1x\omega_1 x_{\omega_1}} - \bar{a}_{i_{p+1}}(x_p)\bar{a}_{i_{4-p}}(x_\omega)Z_{1x\omega_2 x_{\omega_2}} \\
= \delta_{11}(x_1,x_2) - \bar{c}(x_1,x_2)\tilde{\delta}_p(x_1,x_2) - \bar{c}(x_1,x_2)Z_1 + \eta(x_1,x_2)\lambda_{i_0}(x_p), \quad (x_1,x_2) \in D,
\end{gathered} \tag{6}$$

$$Z_1(0,x_2) = 0, \quad Z_1(l_1,x_2) = 0, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2, \tag{7}$$

$$Z_1(x_1,0) = 0, \quad Z_1(x_1,l_2) = 0, \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1, \tag{8}$$

$$\lambda_{i_0}(x_p) = \delta_{12}(x_p) + \gamma(x_p)\tilde{\delta}_{px_\omega}(x_1,x_2)|_{x_\omega=0} + \gamma(x_p)Z_{1x_\omega}(x_1,x_2)|_{x_\omega=0}, \quad 0 \leqslant x_p \leqslant l_p. \tag{9}$$

Здесь

$$\begin{gathered}
\delta_{11}(x_1,x_2) = \bar{a}_{i_0}(x_p)\bar{a}_{i_1}(x_\omega)\tilde{\delta}_{px_{\omega_1}x_{\omega_1}}(x_1,x_2) + \bar{a}_{i_{p+1}}(x_p)\bar{a}_{i_{4-p}}(x_\omega)\tilde{\delta}_{px_{\omega_2}x_{\omega_2}}(x_1,x_2) \\
+ a_{i_0}(x_p)u_{x_{\omega_1}x_{\omega_1}}(x_1,x_2)\delta_{i_1}(x_\omega) + \bar{a}_{i_{4-p}}(x_\omega)u_{x_{\omega_2}x_{\omega_2}}(x_1,x_2)\delta_{i_{p+1}}(x_p) \\
+ a_{i_{p+1}}(x_p)u_{x_{\omega_2}x_{\omega_2}}\delta_{i_{4-p}}(x_\omega) - u\delta_{i_0}(x_1,x_2) + \delta_5(x_1,x_2), \quad \eta(x_1,x_2) = \bar{a}_{i_1}(x_\omega)u_{x_{\omega_1}x_{\omega_1}},
\end{gathered}$$

$$\gamma(x_p) = \bar{a}_{i_0}(x_p)[-u_{x_\omega}(x_1,x_2)|_{x_\omega=0}]^{-1},$$

$$\delta_{12}(x_1,x_2) = \big[\bar{a}_{i_1}(x_\omega)u_{x_\omega}(x_1,x_2)\big|_{x_\omega=0}\big]^{-1}\big[\delta_{11}(x_p) - \bar{a}_{i_0}(x_p)u_{x_\omega}(x_1,x_2)\big]\big|_{x_\omega=0}\delta_{i_1}(0), \quad i = 1,2.$$

При помощи функции Грина [13] из (6)–(8) определим функцию $Z_1(x_1,x_2)$ через правую часть равенства и это выражение подставим в условие (9). Тогда получим

$$Z(x_1,x_2)=\tilde{\delta}_p(x_1,x_2)+\int\limits_D G(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)$$
$$\times\Big[\delta_{11}(\xi_1,\xi_2)-\bar{c}(\xi_1,\xi_2)Z(\xi_1,\xi_2)+\eta(\xi_1,\xi_2)\lambda_{i_0}(\xi_p)\Big]\,d\xi_1\,d\xi_2,$$

$$\lambda_{i_0}(x_p)=\delta_{12}(x_p)+\gamma(x_p)\int\limits_D G_{x_\omega}(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)\big|_{x_\omega=0}$$
$$\times\Big[\delta_{11}(\xi_1,\xi_2)-\bar{c}(\xi_1,\xi_2)Z(\xi_1,\xi_2)+\eta(\xi_1,\xi_2)\lambda_{i_0}(\xi_p)\Big]\,d\xi_1 d\xi_2,\quad i=1,2.$$

Функция Грина имеет следующую оценку [13]:

$$|G(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)|\leqslant M_1\ln\frac{1}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}},$$

$$|G_{x_i}(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)|\leqslant M_{i+1}\big[(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_1)^2\big]^{-1/2},\quad M_i>0,\ i=1,2,3. \tag{10}$$

Положим

$$\chi=\max_{x_1,\,x_2}|Z(x_1,x_2)|+\max_{x_p}|\lambda_{i_0}(x_p)|.$$

Из (10) при достаточно малой мере D получим

$$\chi\leqslant N_2\Big[\big\|\delta_{i_1}(x_\omega)\big\|_{C[0,l_\omega]}+\big\|\delta_{i_{p+1}}(x_p)\big\|_{C[0,l_p]}+\big\|\delta_{i_{4-p}}(x_\omega)\big\|_{C[0,l_\omega]}$$
$$+\big\|\delta_{i_0}(x_1,x_2)\big\|_{C(\bar{D})}+\big\|\delta_5(x_1,x_2)\big\|_{C(\bar{D})}+\big\|\tilde{\delta}_p(x_1,x_2)\big\|_{C^2(\bar{D})}$$
$$+\|\delta_{10}(x_p)\|_{C[0,l_{p1}]}\Big]+\chi N_3(l_1l_2)^{1/2},$$

где N_2, N_3 — некоторые положительные числа. Учитывая условие теоремы, получим, что при $(x_1,x_2)\in\bar{D}$ верна оценка устойчивости (5). Единственность решения задачи следует из оценки (5). $\rhd$

3. Метод последовательных приближений

Метод последовательных приближений для решения задачи (1)–(4) применяется по схеме

$$\begin{gathered}-a_{i_0}^{(s)}(x_p)a_{i_1}(x_\omega)u^{(s+1)}_{x_{\omega_1}x_{\omega_1}}-a_{i_{p+1}}(x_p)a_{i_{4-p}}(x_\omega)u^{(s+1)}_{x_{\omega_2}x_{\omega_2}}\\+c(x_1,x_2)u^{(s+1)}=h(x_1,x_2),\quad (x_1,x_2)\in D,\end{gathered} \tag{11}$$

$$u^{(s+1)}(0,x_2)=\phi_1(x_2),\quad u^{(s+1)}(l_1,x_2)=\phi_2(x_2),\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2, \tag{12}$$

$$u^{(s+1)}(x_1,0)=\varphi_1(x_1),\quad u^{(s+1)}(x_1,l_2)=\varphi_2(x_1),\quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1, \tag{13}$$

$$a_{i_0}^{(s+1)}(x_p)a_{i_1}(0)u^{(s+1)}_{x_\omega}(x_1,x_2)|_{x_\omega=0}=g_{i_0}(x_p),\quad 0\leqslant x_p\leqslant l_p. \tag{14}$$

Последовательные итерации по схеме (11)–(14) проводятся следующим образом. Сначала выбирается некоторое $a_{i_0}^{(0)}(x_p)>0$, принадлежащее $C^\alpha[0,l_p]$, и подставляется в уравнение (11). Далее решается задача (11)–(13) и находится $u^{(1)}(x_1,x_2)$. По функции $u^{(1)}_{x_\omega}(x_1,x_2)|_{x_\omega=0}$ из условий (14) находится $a^{(1)}_{i_0}(x_p)$ и эта функция используется для проведения следующего шага итерации.

Теорема 2. *Пусть при фиксированных параметрах i_0, p решение задачи (1)–(4) существует и $g_{i_0}(x_p)\neq 0$, $Nl_1l_2<1$, $u^{(s)}(x_1,x_2)\in C^2(D)$, $a^{(s)}_{i_0}(x_p)\in C^\alpha[0,l_p]$, $g_{i_0}(x_p)u^{(s)}_{x_\omega}(x_1,x_2)|_{x_\omega=0}>0$ при всех $s=0,1,\dots;$ N — положительная постоянная, зависящая от данных задачи. Также допустим, что производные функции $u^{(s)}(x_1,x_2)$ по x_1, x_2 до второго порядка равномерно ограничены. Тогда функции $a^{(s)}_{i_0}(x_p)$, $u^{(s)}(x_1,x_2)$, полученные методом последовательных приближений (11)–(14) при $s\to+\infty$, равномерно сходятся к решению задачи (1)–(4) со скоростью геометрической прогрессии.*

$\lhd$ Положим

$$Z^{(s)}(x_1,x_2)=u(x_1,x_2)-u^{(s)}(x_1,x_2),\quad \lambda^{(s)}_{i_0}(x_p)=a_{i_0}(x_p)-a^{(s)}_{i_0}(x_p).$$

Легко проверить,что эти функции удовлетворяют системе

$$\begin{gathered}-a_{i_0}(x_p)a_{i_1}(x_\omega)Z^{(s+1)}_{x_{\omega_1}x_{\omega_1}}-a_{i_{p+1}}(x_p)a_{i_{4-p}}(x_\omega)Z^{(s+1)}_{x_{\omega_2}x_{\omega_2}}+c(x_1,x_2)Z^{(s+1)}\\ =\eta^{(s)}(x_1,x_2)\lambda^{(s)}_{i_0}(x_p),\quad (x_1,x_2)\in D,\end{gathered}\tag{15}$$

$$Z^{(s+1)}(0,x_2)=0,\quad Z^{(s+1)}(l_1,x_2)=0,\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2,\tag{16}$$

$$Z^{(s+1)}(x_1,0)=0,\quad Z^{(s+1)}(x_1,l_2)=0,\quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1,\tag{17}$$

$$\lambda^{(s+1)}_{i_0}(x_p)=\gamma^{(s)}(x_p)Z^{(s+1)}_{x_\omega}(x_1,x_2)\big|_{x_\omega=0},\quad 0\leqslant x_p\leqslant l_p,\tag{18}$$

где

$$\eta^{(s)}(x_1,x_2)=a_{i_1}(x_\omega)u^{(s+1)}_{x_{\omega_1}x_{\omega_1}},\quad \gamma^{(s)}(x_p)=a_{i_0}(x_p)\Big[-u^{(s+1)}_{x_\omega}(x_1,x_2)\big|_{x_\omega=0}\Big]^{-1},\quad i=1,2.$$

При помощи функции Грина из (15)–(17) выразим $Z^{(s+1)}(x_1,x_2)$ через правую часть равенства (15) и подставим это выражение в условия (18). Тогда получим

$$\lambda^{(s+1)}_{i_0}(x_p)=\gamma^{(s)}(x_p)\int\limits_D G_{x_\omega}(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)\big|_{x_\omega=0}\eta^{(s)}(\xi_1,\xi_2)\lambda^{(s)}_{i_0}(\xi_p)\,d\xi_1\,d\xi_2.\tag{19}$$

Положим $\chi^{(s)}=\max_{x_p}|\lambda^{(s)}_{i_0}(x_p)|$. Далее, как в доказательстве теоремы 1, из системы (18) следует $\chi^{(s+1)}\leqslant\chi^{(s)}N_3(l_1l_2)^{1/2}$. $\rhd$

4. Существование решения

Обозначим

$$f_i(x_p)=(2-p)\varphi_i(x_1)+(p-1)\phi_i(x_2),$$

$$\tilde f_i(x_\omega)=(2-p)\phi_i(x_2)+(p-1)\varphi_i(x_1),\quad i=1,2.$$

Пусть $\tilde f_i(0)=(2-p)\phi_i(0)+(p-1)\varphi_i(0)$, $i=1,2$.

Лемма 2. *Пусть система*

$$-a_1(x_1)a_2(x_2)u_{x_1x_1}-a_3(x_1)a_4(x_2)u_{x_2x_2}+c(x_1,x_2)u=h(x_1,x_2),\quad (x_1,x_2)\in D,\tag{20}$$

$$u(0,x_2)=\phi_1(x_2),\quad u(l_1,x_2)=\phi_2(x_2),\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2, \tag{21}$$

$$u(x_1,0)=\varphi_1(x_1),\quad u(x_1,l_2)=\varphi_2(x_1),\quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1, \tag{22}$$

$$a_{i_0}(x_p)a_{i_1}(0)u_{x_\omega}(x_1,x_2)\big|_{x_\omega=0}=g_{i_0}(x_p),\quad 0\leqslant x_p\leqslant l_p, \tag{23}$$

с начально-краевыми условиями $\phi_1(0)=\varphi_1(0)$, $\phi_1(l_2)=\varphi_2(0)$, $\phi_2(0)=\varphi_1(l_1)$, $\phi_2(l_2)=\varphi_2(l_1)$ *при заданных* $a_{2i-1}(x_1)$, $a_{2i}(x_2)\geqslant\mu_0>0$, $c(x_1,x_2)>0$, $i=1,2$, *имеет решение, принадлежащие* $C^2(D)\cap C(\bar D)$ *и*

$$0<c(x_1,x_2)\leqslant 1,\quad -M_pl_\omega\leqslant h(x_1,x_2)\leqslant 0,\quad \varphi_1(0)\geqslant 0,$$

$$(2-p)\phi_2(0)+(p-1)\varphi_1(0)\geqslant 0,\quad f_2(x_p)\geqslant 0,\quad f_{1x_px_p}(x_p)=0,$$

$$m(il_p-l_p)l_\omega^{-1}x_\omega\leqslant\tilde f_i(0)-\tilde f_i(x_p)\leqslant M_px_\omega,$$

$$m(x_p)\leqslant f_1(x_p)-f_2(x_p)\leqslant M_pl_\omega,\quad i=1,2.$$

Тогда

$$-M_p-(\sqrt2\mu_0)^{-2}l_\omega f_1(x_p)\leqslant u_{x_\omega}(x_1,x_2)\big|_{x_\omega=0}\leqslant -m(x_p)l_\omega^{-1}, \tag{24}$$

где

$$M_p=\max\Big\{l_\omega^{-1}\max_D|h(x_1,x_2)|,\ (2-p)\max_{x_2}\max_i|\phi_{ix_1}(x_2)|,$$
$$(p-1)\max_{x_1}\max_i|\varphi_{ix_1}(x_1)|,\ \max_{x_2}l_1^{-1}[\phi_1(x_2)-[\phi_1(x_2)]],\ \max_{x_1}l_2^{-1}[\varphi_1(x_1)-\varphi_2(x_1)]\Big\},$$

$$m(x_p)\in C^2[0,l_p],\quad m(x_p)>0,\quad m''(x_p)\geqslant 0.$$

$\lhd$ Положим

$$\upsilon(x_1,x_2)=u(x_1,x_2)+(2-p)m(x_1)l_2^{-1}x_2+(p-1)m(x_2)l_1^{-1}x_1-f_1(x_p),$$

$$V(x_1,x_2)=u(x_1,x_2)-M[(2-p)x_2+(p-1)x_1]$$
$$-(2-p)(\sqrt2\mu_0)^{-2}x_2(l_2-x_2)\varphi_1(x_1)-(p-1)(\sqrt2\mu_0)^{-2}x_2(l_2-x_2)\phi_1(x_2)+f_1(x_p).$$

Нетрудно проверить, что $\upsilon(x_1,x_2)$ удовлетворяет условиям задачи

$$-a_1(x_1)a_2(x_2)\upsilon_{x_1x_1}-a_3(x_1)a_4(x_2)\upsilon_{x_2x_2}+c(x_1,x_2)\upsilon=a_{2p-1}(x_1)a_{2p}(x_2)m''(x_p)l_\omega^{-1}x_\omega$$
$$+c(x_1,x_2)\big[m(x_p)l_\omega^{-1}-f_1(x_p)\big]+h(x_1,x_2),\quad (x_1,x_2)\in D,$$

$$\upsilon(0,x_2)=(2-p)\big[\phi_1(x_2)+m(0)l_2^{-1}x_2-\varphi_1(0)\big],\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2,$$

$$\upsilon(l_1,x_2)=(2-p)\big[\phi_2(x_2)+m(l_1)l_2^{-1}x_2-\varphi_1(l_1)\big]$$
$$+(p-1)\big[\phi_1(x_2)+m(x_2)-\phi_1(x_2)\big],\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2,$$

$$\upsilon(x_1,0)=(p-1)[\varphi_1(x_1)+m(0)l_1^{-1}x_1-\phi_1(0)],\quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1$$

$$\upsilon(x_1,l_2)=(2-p)\big[\varphi_2(x_1)+m(x_1)-\varphi_1(x_1)\big]$$
$$+(p-1)\big[\varphi_2(x_1)+m(l_2)l_1^{-1}x_1-\phi_1(l_2)\big],\quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1.$$

По условию леммы, наибольшее положительное значение функции $v(x_1,x_2)$ достигается при $(p-1)x_1+(2-p)x_2=0$. Тогда $v_{x_\omega}(x_1,x_2)\big|_{x_\omega=0}\leqslant 0$. Учитывая, что $v(x_1,x_2)=u(x_1,x_2)+m(x_p)l_\omega^{-1}x_\omega-f_1(x_p)$, получаем

$$u_{x_\omega}(x_1,x_2)\big|_{x_\omega=0}\leqslant -m(x_p)l_\omega^{-1}. \tag{25}$$

Как и выше, после подстановки $V(x_1,x_2)$ в (20)–(22) получим

$$-a_1(x_1)a_2(x_2)V_{x_1x_1}-a_3(x_1)a_4(x_2)V_{x_2x_2}+c(x_1,x_2)V=\mu_0^{-2}a_{5-2p}(x_1)a_{6-2p}(x_1)f_1(x_p)$$
$$+c(x_1,x_2)\big[1-(\sqrt{2}\mu_0)^{-2}x_\omega(l_\omega-x_\omega)\big]f_1(x_p)-M_px_\omega c(x_1,x_2)-h(x_1,x_2),\quad (x_1,x_2)\in D,$$

$$V(0,x_2)=(2-p)\big[-\phi_1(x_2)-Mx_2+\varphi_1(0)-(\sqrt{2}\mu_0)^{-2}x_2(l_2-x_2)\varphi_1(0)\big],\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2,$$

$$V(l_1,x_2)=(2-p)\big[-\phi_2(x_2)-Mx_2+\varphi_1(l_1)-(\sqrt{2}\mu_0)^{-2}x_2(l_2-x_2)\varphi_1(l_1)\big]$$
$$+(p-1)\big[-\phi_2(x_2)+\phi_1(x_2)-Ml_2\big],\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2,$$

$$V(x_1,0)=(p-1)\big[-\varphi_1(x_1)-Mx_1+\phi_1(0)-(\sqrt{2}\mu_0)^{-2}x_1(l_1-x_1)\phi_1(0)\big],\quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1,$$

$$V(x_1,l_2)=(p-1)[-\varphi_2(x_1)-Mx_1+\phi_1(l_2)-(\sqrt{2}\mu_0)^{-2}x_1(l_1-x_1)\phi_1(l_2)]$$
$$+(2-p)[-\varphi_2(x_1)-Ml_2+\varphi_1(x_1),\quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1.$$

По условию леммы, наибольшее положительное значение функции $V(x_1,x_2)$ достигается при $(p-1)x_1+(2-p)x_2=0$. Поэтому $V_{x_\omega}(x_1,x_2)\leqslant 0$. Учитывая, что

$$V(x_1,x_2)=u(x_1,x_2)-Mx_\omega-(\sqrt{2}\mu_0)^{-2}x_\omega(l_\omega-x_\omega)f_1(x_p)-f_1(x_p),$$

получаем

$$-M_p-(\sqrt{2}\mu_0)^{-2}l_\omega f_1(x_p)\leqslant u_{x_\omega}(x_1,x_2)|_{x_\omega=0}. \tag{26}$$

Объединяя оценки (25) и (26), получим оценку (24). $\triangleright$

Теорема 3. *Пусть*

$$0<c(x_1,x_2)\leqslant 1,\quad -M_pl_\omega\leqslant h(x_1,x_2)\leqslant 0,\quad \varphi_1(0)\geqslant 0,$$

$$(2-p)\phi_2(0)+(p-1)\varphi_1(0)\geqslant 0,\quad f_2(x_p)\geqslant 0,\quad f_{1x_px_p}(x_p)=0,$$

$$m(il_p-l_p)l_\omega^{-1}x_\omega\leqslant \tilde f_i(0)-\tilde f_i(x_p)\leqslant M_px_\omega,$$

$$m(x_p)\leqslant f_1(x_p)-f_2(x_p)\leqslant M_pl_\omega,$$

$$g_{i_0}(x_p)<0,\quad g_p\leqslant -g_{i_0}(x_p)\frac{\mu_0}{a_{i_1}(0)}-\frac{1}{2}l_\omega f_1(x_p),\quad i=1,2.$$

где $m(x_p)$ — такие неотрицательные функции, что $g_{i_0}(x_p)[m(x_p)]^{-1}$ ограничено, g_p — положительное число. Тогда задача (1)–(4) имеет хотя бы одно решение.

$\triangleleft$ Доказательство проводится методом последовательных приближений. Из утверждения леммы следует, что

$$-M_p-(\sqrt{2}\mu_0)^{-2}l_\omega f_1(x_p)\leqslant u^{(s+1)}_{x_\omega}(x_1,x_2)|_{x_\omega=0}\leqslant -m(x_p)l_\omega^{-1},\quad 0<x_p<l_p.$$

Тогда

$$g_pM_p^{-1}\mu_0^{-1}\leqslant a^{(s+1)}_{i_0}(x_p)\leqslant \max_{x_p}\big\{-g_{i_0}(x_p)[m(x_p)]^{-1}\big\}\cdot l_\omega.$$

Таким образом, при всех приближениях $a_{i_0}^{(s)}(x_p)$ — строго положительная, непрерывная и равномерно ограниченная функция. Тогда из общей теории эллиптических уравнений следует, что при условиях теоремы последовательность $\{u^{(s)}(x_1,x_2)\}$ равномерно ограничена по норме $W^2_{p_1}$, $p_1>2$. Поэтому $\{u^{(s)}(x_1,x_2)\}$ компактна в $C^1(\bar D)$. При этом из условия (14) следует, что последовательность $a_{i_0}^{(s+1)}(x_p)$ будет компактна в $C[0,l_p]$. Отсюда и из (11)–(13) вытекает компактность $\{u^{(s)}(x_1,x_2)\}$ в $C^2(\bar D)$. В системе (11)–(14), переходя к пределу при $s\to+\infty$, получим, что существует пара функций $\{a_{i_0}(x_1),u(x_1,x_2)\}$, удовлетворяющих условиям (1)–(4). $\rhd$

5. Другие постановки обратных задач

Рассмотрим задачу при фиксированных параметрах i_0, p, определения функций $a_{i_0}(x_p), u(x_1,x_2)$, удовлетворяющих уравнениям

$$-a_1(x_1)a_2(x_2)u_{x_1x_1}-a_3(x_1)a_4(x_2)u_{x_2x_2}+c(x_1,x_2)u=h(x_1,x_2),\quad (x_1,x_2)\in D,\tag{27}$$

$$(2-p)u_{x_1}(0,x_2)+(p-1)u(0,x_2)=\phi_1(x_2),\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2,\tag{28}$$

$$(2-p)u_{x_1}(l_1,x_2)+(p-1)u(l_1,x_2)=\phi_2(x_2),\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2,\tag{29}$$

$$(p-1)u_{x_2}(x_1,0)+(2-p)u(x_1,0)=\varphi_1(x_1),\quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1,\tag{30}$$

$$(p-1)u_{x_2}(x_1,l_2)+(2-p)u(x_1,l_2)=\varphi_2(x_1),\quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1,\tag{31}$$

$$a_{i_0}(x_p)a_{i_1}(0)u_{x_\omega}\big|_{x_\omega=0}=g_{i_0}(x_p),\quad 0\leqslant x_p\leqslant l_p,\tag{32}$$

при условиях $(p-1)[\phi_{ix_2}(jl_2-l_2)-\varphi_j(il_1-l_1)]=(2-p)[\phi_i(jl_2-l_2)-\varphi_{jx_1}(il_1-l_1)]$, $i,j=1,2$.

Здесь $\phi_i(x_2)\in C^{p+\alpha}[0,l_2], \varphi_i(x_1)\in C^{3-p+\alpha}[0,l_1]$, $i=1,2$. Функция $\tilde\delta_p(x_1,x_2)$ определяется следующим образом:

$$\tilde\delta_p(x_1,x_2)=\sum_{i,j=1}^{2}P_i(x_\omega)\Big[\delta_{i-2p+9}(x_p)+(1-x_p)\delta_{(i-2p+9)x_p}(0)$$
$$-\frac{x_p^2}{2l_p}\delta_{(i-2p+9)x_p}(l_p)\Big]+\Big(1-\frac{x_p}{2l_p}\Big)x_p\delta_{2p+4}(x_\omega)+\frac{x_p^2}{2l_p}\delta_{2p+5}(x_\omega).$$

Лемма 3. *Пусть решение задачи (27)–(32) существует и*

$$\tilde f_i(x_\omega)\geqslant 0,\quad \phi_{ix_2}(x_2)\leqslant 0,\quad \varphi_{ix_1}(x_1)\leqslant 0.$$

Тогда верна следующая оценка:

$$|u(x_1,x_2)|\leqslant\max\left[\max_D\left|\frac{h(x_1,x_2)}{c(x_1,x_2)}\right|,(2-p)\max_{x_2}\max_i\left|\phi_i(x_2)\right|,(p-1)\max_{x_1}\max_i|\varphi_i(x_1)|\right].$$

Теорема 4. *Пусть*

$$0<c(x_1,x_2)\leqslant 1,\quad -M_pl_\omega\leqslant h(x_1,x_2)\leqslant 0,$$

$$f_2(x_p)\geqslant 0,\quad f_{1x_px_p}(x_p)=0,$$

$$(\sqrt2\mu_0)^{-2}x_\omega(x_\omega-l_\omega)\tilde f_1(0)\leqslant\tilde f_1(0)-\tilde f_i(x_\omega)\leqslant m'(0)l_\omega^{-1}x_\omega,$$

$$m'(l_p)l_\omega^{-1}x_\omega \leqslant \tilde f_2(0)-\tilde f_2(x_\omega)\leqslant (\sqrt{2}\mu_0)^{-2}x_\omega(x_\omega-l_\omega)\tilde f_2(0),$$
$$m(x_p)\leqslant f_1(x_p)-f_2(x_p)\leqslant M_p l_\omega,$$
$$g_{i_0}(x_p)<0,\quad g_p\leqslant -g_{i_0}(x_p)\frac{\mu_0}{a_{i_1}(0)}-\frac{1}{2}l_\omega f_1(x_p),\quad i=1,2,$$

где $m(x_p)$ — такие неотрицательные функции, что $g_{i_0}(x_p)[m(x_p)]^{-1}$ ограничено, g_p — положительное число. Тогда задача (27)–(32) имеет хотя бы одно решение.

Рассмотрим при фиксированных параметрах i_0 и p задачу определения функций $a_{i_0}(x_p)$, $u(x_1,x_2)$, удовлетворяющих уравнениям

$$-a_1(x_1)a_2(x_2)u_{x_1x_1}-a_3(x_1)a_4(x_2)u_{x_2x_2}+c(x_1,x_2)u=h(x_1,x_2),\quad (x_1,x_2)\in D, \tag{33}$$

$$(2-p)u_{x_1}(0,x_2)+(p-1)u(0,x_2)=\phi_1(x_2),\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2, \tag{34}$$

$$u(l_1,x_2)=\phi_2(x_2),\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2, \tag{35}$$

$$(p-1)u_{x_2}(x_1,0)+(2-p)u(x_1,0)=\varphi_1(x_1),\quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1, \tag{36}$$

$$u(x_1,l_2)=\varphi_2(x_1),\quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1, \tag{37}$$

$$a_{i_0}(x_p)a_{i_1}(0)u_{x_\omega}\big|_{x_\omega=0}=g_{i_0}(x_p),\quad 0\leqslant x_p\leqslant l_p, \tag{38}$$

при условиях

$$(p-1)\phi_{1x_2}(0)+(2-p)\phi_1(0)=(p-1)\varphi_1(0)+(2-p)\varphi_{1G_1}(0),$$
$$(p-1)\phi_{2x_2}(0)+(2-p)\phi_2(0)=\varphi_1(l_1),$$
$$(2-p)\varphi_{2x_1}(0)+(p-1)\varphi_2(0)=\phi_1(l_2),\quad \phi_2(l_2)=\varphi_2(l_1).$$

Здесь $\phi_1(x_2)\in C^{p+\alpha}[0,l_2]$, $\phi_2(x_2)\in C^{2+\alpha}[0,l_2]$ $\varphi_1(x_1)\in C^{3-p+\alpha}[0,l_1]$, $\varphi_2(x_1)\in C^{2+\alpha}[0,l_1]$, $i=1,2$. Функция $\tilde\delta_p(x_1,x_2)$ определяется следующим образом:

$$\tilde\delta_p(x_1,x_2)=\sum_{i,j=1}^{2}P_i(x_\omega)\Big[\delta_{i-2p+9}(x_p)-(x_p-l_p)\delta_{(i-2p+9)x_p}(0)$$
$$-\frac{x_p^2}{2l_p}\delta_{2p+5}(il_\omega-l_\omega)\Big]+(x_p-l_p)\delta_{2p+4}(x_\omega)+\frac{x_p^2}{2l_p}\delta_{2p+5}(x_\omega).$$

Лемма 4. *Пусть решение задачи (33)–(38) существует и*

$$\tilde f_i(x_\omega)\geqslant 0,\quad \phi_{1x_2}(x_2)\leqslant 0,\quad \varphi_{1x_1}(x_1)\leqslant 0.$$

Тогда верна следующая оценка:

$$|u(x_1,x_2|\leqslant \max\Big[\max_D\Big|\frac{h(x_1,x_2)}{c(x_1,x_2)}\Big|,(p-1)\max_{x_2}\big|\phi_1(x_2)\big|,$$
$$\max_{x_2}\big|\phi_1(x_2)\big|,(2-p)\max_{x_1}\big|\varphi_1(x_1)\big|,\max_{x_1}\big|\varphi_2(x_1)\big|\Big].$$

Теорема 5. *Пусть*

$$0<c(x_1,x_2)\leqslant 1,\quad -M_pl_\omega\leqslant h(x_1,x_2)\leqslant 0,$$

$$f_2(x_p) \geqslant 0, \quad f_{1x_px_p}(x_p) = 0,$$

$$(\sqrt{2}\mu_0)^{-2}x_\omega(x_\omega - l_\omega)\tilde{f}_1(0) \leqslant \tilde{f}_1(0) - \tilde{f}_i(x_\omega) \leqslant m'(0)l_\omega^{-1}x_\omega,$$

$$m(l_p)l_\omega^{-1}x_\omega \leqslant \tilde{f}_2(0) - \tilde{f}_2(x_\omega) \leqslant (\sqrt{2}\mu_0)^{-2}x_\omega(x_\omega - l_\omega)\tilde{f}_2(0) + (p-1)Mx_1,$$

$$m(x_p) \leqslant f_1(x_p) - f_2(x_p) \leqslant M_p l_\omega.$$

$$g_{i_0}(x_p) < 0, \quad g_p \leqslant -g_{i_0}(x_p)\frac{\mu_0}{a_{i_1}(0)} - \frac{1}{2}l_\omega f_1(x_p), \quad i = 1, 2,$$

где $m(x_p)$ — такие неотрицательные функции, что $g_{i_0}(x_p)[m(x_p)]^{-1}$ ограничено, g_p — положительное число. Тогда задача (33)–(38) *имеет хотя бы одно решение.*

$\lhd$ Рассмотрим при фиксированных параметрах i_0 и p задачу определения функций $a_{i_0}(x_p)$, $u(x_1, x_2)$, удовлетворяющих уравнениям

$$-a_1(x_1)a_2(x_2)u_{x_1x_1} - a_3(x_1)a_4(x_2)u_{x_2x_2} + c(x_1, x_2)u = h(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in D, \tag{39}$$

$$u(0, x_2) = \phi_1(x_2), \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2, \tag{40}$$

$$(2-p)u_{x_1}(l_1, x_2) + (p-1)u(l_1, x_2) = \phi_2(x_2), \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2, \tag{41}$$

$$u(x_1, 0) = \varphi_1(x_1), \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1, \tag{42}$$

$$(p-1)u_{x_2}(x_1, l_2) + (2-p)u(x_1, l_2) = \varphi_2(x_1), \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1, \tag{43}$$

$$a_{i_0}(x_p)a_{i_1}(0)u_{x_\omega}|_{x_\omega=0} = g_{i_0}(x_p), \quad 0 \leqslant x_p \leqslant l_p, \tag{44}$$

при условиях $\phi_1(0) = \varphi_1(0)$,

$$(p-1)\phi_{1x_2}(l_2) + (2-p)\phi_2(l_2) = \varphi_2(0), \quad (2-p)\varphi_{1x_1}(l_1) + (p-1)\varphi_1(l_1) = \phi_2(0),$$
$$(p-1)\phi_{2x_2}(l_2) + (2-p)\phi_1(l_2) = (p-1)\varphi_2(l_1) + (2-p)\varphi_{2x_1}(l_1).$$

Здесь $\phi_1(x_2) \in C^{2+\alpha}[0, l_2]$, $\phi_2(x_2) \in C^{p+\alpha}[0, l_2]$, $\varphi_1(x_1) \in C^{2+\alpha}[0, l_1]$, $\varphi_2(x_1) \in C^{3-p+\alpha}[0, l_1]$, $i = 1, 2$.

Функция $\tilde{\delta}_p(x_1, x_2)$ определяется следующим образом:

$$\tilde{\delta}_p(x_1, x_2) = \sum_{i,j=1}^{2} P_i(x_\omega)\Big[-\Big(\frac{l_p - x_p}{l_p}\Big)^2 \delta_{2p+4}(il_\omega - l_\omega) + \delta_{i+2p+9}(x_p)$$
$$- x_p\delta_{(i-2p+9)x_p}(l_p)\Big] + \Big(\frac{l_p - x_p}{l_p}\Big)^2 \delta_{2p+4}(x_\omega) + x_p\delta_{2p+5}(x_\omega).$$

Лемма 5. *Пусть решение задачи* (39)–(44) *существует и*

$$\phi_1(x_2) \geqslant 0, \quad \varphi_1(x_1) \geqslant 0, \quad \phi_{2x_2}(x_2) \leqslant 0, \quad \varphi_{2x_1}(x_1) \leqslant 0.$$

Тогда верна следующая оценка:

$$|u(x_1, x_2| \leqslant \max\Big[\max_D\Big|\frac{h(x_1, x_2)}{c(x_1, x_2)}\Big|, \max_{x_2}|\phi_1(x_2)|, (p-1)\max_{x_2}|\phi_2(x_2)|,$$
$$\max_{x_1}|\varphi_1(x_1)|, (2-p)\max_{x_1}|\varphi_1(x_1)|\Big].$$

Теорема 6. *Пусть*

$$0 < c(x_1, x_2) \leqslant 1, \quad -M_p l_\omega \leqslant h(x_1, x_2) \leqslant 0,$$

$$f_2(x_p) \geqslant 0, \quad f_{1x_p x_p}(x_p) = 0,$$

$$m^{(i-1)}(il_p - l_p) l_\omega^{-1} x_\omega \leqslant \tilde{f}_i(0) - \tilde{f}_i(x_p) \leqslant (\sqrt{2}\mu_0)^{-2} x_\omega (x_\omega - l_\omega)\tilde{f}_2(0) + (2-i)Mx_\omega,$$

$$m(x_p) \leqslant f_1(x_p) - f_2(x_p) \leqslant M_p l_\omega,$$

$$g_{i_0}(x_p) < 0, \quad g_p \leqslant -g_{i_0}(x_p)\frac{\mu_0}{a_{i_1}(0)} - \frac{1}{4} l_\omega f_1(x_p), \quad i = 1, 2.$$

где $m(x_p)$ — такие неотрицательные функции, что $g_{i_0}(x_p)[m(x_p)]^{-1}$ ограничено, g_p — положительное число. Тогда задача (40)–(44) имеет хотя бы одно решение.

Для задачи (27)–(32) функция $\tilde{\delta}_p(x_1, x_2)$ в явном виде получает следующее выражение:

$$\tilde{\delta}_p(x_1, x_2) = \frac{l_\omega - x_\omega}{l_\omega}\left[\delta_{10-2p}(x_p) + \left(1 - \frac{x_p}{2l_p}\right) x_p \delta_{(10-2p)x_p}(0) - \frac{x_p^2}{2l_p}\delta_{(10-2p)x_p}(l_p)\right]$$
$$+ \frac{x_\omega}{l_\omega}\left[\delta_{11-2p}(x_p) - \left(1 - \frac{x_\omega}{l_\omega}\right) x_\omega \delta_{(11-2p)x_p}(0) - \frac{x_p^2}{2l_p}\delta_{(11-2p)x_p}(l_p)\right]$$
$$+ \left(1 - \frac{x_p}{2l_p}\right) x_p \delta_{2p+4}(x_\omega) + \frac{x_p^2}{2l_p}\delta_{2p+5}(x_\omega).$$

При $i_0 = p = 1$ для решения задачи (1)–(4) можно брать следующие функции:

$$u(x_1, x_2) = -\left(\frac{x_1^2}{2} + x_1 + 2 - x_2\right) x_2 + x_1 + \frac{5}{2}, \quad a_1(x_1) = x_1 + 1, \quad a_2(x_2) = 1,$$

$$a_3(x_1) = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{5}{2}\right), \quad a_4(x_2) = 1, \quad c(x_1, x_2) = 1.$$

В этом случае

$$m(x_1) = \left(\frac{x_1^2}{2} + 1\right) l_2.$$

Эти функции удовлетворяют условиям теоремы 3.

Теоремы 4, 5, 6 доказываются аналогично теореме 3. Доказательства лемм 3, 4, 5 легко получаются из принципа максимума. Для рассмотренных в этом разделе задач доказательства априорных оценок и сходимости итерационного алгоритма аналогичны теоремам 1, 2.

Литература

1. *Искендеров А. Д.* Обратная задача об определении коэффициентов квазилинейного эллиптического уравнения // Изв. АН. АзССР.—1978.—№ 2.—С. 80–85.
2. *Искендеров А. Д.* Обратная задача об определении коэффициентов эллиптического уравнения // Диф. уравнения.—1979.—Т. 20, № 11.—С. 858–867.
3. *Клибанов М. В.* Обратные задачи в целом и Карлемановские оценки // Диф. уравнения.—1984.—Т. 20, № 6.—С. 1035–1041.
4. *Клибанов М. В.* Единственность в целом обратных задач для одного класса дифференциального уравнения // Диф. уравнения.—1984.—Т. 20, № 11.—С. 1947–1953.

5. *Хайдаров А.* Об одной обратной задаче для эллиптических уравнений // Некорректные задачи мат. физики и анализа / Под. ред. С. А. Алексева.—Новосибирск, 1984.—С. 245–249.
6. *Вабищевич П. Н.* О единственности некоторых обратных задач для эллиптических уравнений // Диф. уравнения.—1988.—Т. 24, № 12.—С. 2125–2129.
7. *Соловьев В. В.* Обратные задачи определения источника и коэффициента в эллиптическом уравнении в прямоугольнике // Журн. вычислительной математики и мат. физики.—2007.—Т. 47, № 8.—С. 1365–1377.
8. *Yang R., Ou Y.* Inverse coefficient problems for elliptic equations // Anziam J.—2008.—Vol. 49, № 2.—P. 271–279.
9. *Пятков С. Г.* О некоторых обратных задача для эллиптических уравнений и систем // Сиб. журн. индустриальной математики.—2010.—Т. 13, № 4.—С. 83–96.
10. *Вахитов И. С.* Обратная задача идентификации старшего коэффициента в уравнении диффузии-реакции // Дальневост. мат. журн.—2010.—Т. 10, № 2.—С. 93–105.
11. *Алиев Р. А.* Об определении неизвестных коэффициентов при старших производных в линейном эллиптическом уравнении // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2014.—№ 3.—С. 31–43.
12. *Ладыженская О. Г., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.—М.: Наука, 1973.—576 с.
13. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1957.—252 с.

Статья поступила 5 февраля 2016 г.

Алиев Рамиз Аташ оглы
Азербайджанский университет кооперации
доцент кафедры информатики
АЗЕРБАЙДЖАН, 1106, г. Баку, ул. Н. Нариманова, 8 в
E-mail: ramizaliyev3@rambler.ru

ABOUT THE DETERMINATION OF UNKNOWN COEFFICIENTS IN THE LINEAR ELLIPTIC EQUATION

Aliyev R. A.

Inverse problems of restoration of coefficients to partial differential equations are of interest in many applied researches. In this work an inverse problem for elliptic equation with various boundary values in a given rectangle is considered. The existence, uniqueness and stability of a solution to inversion problems under consideration are proved. Using successive approximation method a regularizing algorithm for determining of coefficients is also constructed.

Key words: inversion problem, elliptic equation.