Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 4, С. 80–85

УДК **517.95**

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

К. У. Хубиев

В работе доказан принцип максимума для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с переменными коэффициентами. Характеристическая нагрузка представляет собой след искомого решения на линии изменения типа. Полученные результаты обобщают принцип максимума для уравнений гиперболо-параболического типа, приведенный в монографии Т. Д. Джураева, а в гиперболической части — известный принцип Агмона — Ниренберга — Проттера.

Ключевые слова: принцип максимума, нагруженное уравнение, уравнение смешанного типа, гиперболо-параболическое уравнение.

Рассмотрим в области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = l$, $y = h > 0$ соответственно при $y > 0$, и характеристиками волнового уравнения $AC : x + y = 0$, $BC : x - y = l$ при $y < 0$, характеристически нагруженное уравнение [1]

$$0 = \begin{cases} L_1u \equiv u_{xx} - u_y + a_1u_x + c_1u + d_1u(x,0), & y > 0, \\ L_2u \equiv u_{xx} - u_{yy} + a_2u_x + b_2u_y + c_2u + d_2u(x+y,0) + e_2u(x-y,0), & y < 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где $u = u(x, y)$ — неизвестная функция; $a_i = a_i(x, y)$, $c_i = c_i(x, y)$, $d_i = d_i(x, y)$, $i = 1, 2$, $b_2 = b_2(x, y)$, $e_2 = e_2(x, y)$ — заданные непрерывные в области своего определения функции.

Обозначим через Ω^+, Ω^- параболическую и гиперболическую части области Ω соответственно.

Принцип экстремума играет важную роль при исследовании задачи Трикоми для уравнений смешанного типа. Впервые принцип экстремума для задачи Трикоми был сформулирован в 1950 г. А. В. Бицадзе [2] для уравнения, которое впоследствии получило название уравнения Лаврентьева — Бицадзе. Дальнейшие исследования в этом направлении велись многими математиками, краткий обзор результатов приведен в работе [3].

В работах [4, 5] были сформулированы принципы экстремума для нагруженных интегральных уравнений и дифференциального уравнения первого порядка. В [6, с. 264], [1, с. 126] доказан принцип максимума для точечно нагруженного уравнения параболического типа, в работе [7] — принцип экстремума для характеристически нагруженного уравнения гиперболического типа второго порядка.

Полученные в данной работе результаты обобщают принцип максимума для уравнения смешанного гиперболо-параболического типа, приведенный в [8, с. 10], и при $d_1 = d_2 = e_2 \equiv 0$ следствие 1 совпадает с вышеуказанным принципом максимума.

Кроме того, при $d_2 = e_2 \equiv 0$ полученный принцип экстремума для нагруженного гиперболического уравнения совпадает с принципом экстремума Агмона — Ниренберга — Проттера, сформулированным для гиперболического уравнения в [6, с. 229], и условия леммы 1 согласуются с условиями, полученными в работе [9].

Докажем сначала принцип максимума для нагруженного гиперболического уравнения в Ω^-.

Уравнение (1) в Ω^- в характеристических координатах $\xi = x+y$, $\eta = x-y$ имеет вид

$$v_{\xi\eta} + pv_\xi + qv_\eta + rv + \lambda v(\xi,\xi) + \mu v(\eta,\eta) = 0, \tag{2}$$

где $4p = a_2 + b_2$, $4q = a_2 - b_2$, $4r = c_2$, $4\lambda = d_2$, $4\mu = e_2$, $v = v(\xi,\eta) = u(x,y)$, а $\Omega^- \cup AB$ перейдет в область $D = \{(\xi,\eta) : 0 < \xi < \eta < l\}$.

Лемма 1. *Пусть $v(\xi,\eta)$ — регулярное в области D решение уравнения (2) из $C(\overline{D})$, удовлетворяющее условиям*

$$v_\eta \in C \ \ (0 \leqslant \xi < \eta \leqslant l), \quad v_\eta(0,\eta) + p(0,\eta)v(0,\eta) \leqslant 0. \tag{3}$$

Тогда, если p, p_ξ, q, r, λ и μ принадлежат C $(0 \leqslant \xi < \eta \leqslant l)$,

$$r_1(\xi,\eta) \leqslant 0, \quad \lambda(\xi,\eta) \leqslant 0, \quad \mu(\xi,\eta) \leqslant 0, \tag{4}$$

$$p_1(\xi,\eta) + \int\limits_0^\xi \big[r(\xi_1,\eta) + \lambda(\xi_1,\eta) + \mu(\xi_1,\eta)\big] q_1(\xi_1,\eta)\, d\xi_1 > 0, \tag{5}$$

где $r_1 = rq_1 - p_{1\xi}$, $p_1 = pq_1$, $q_1 = \exp\int_\delta^\xi q(t,\eta)\,dt$, то положительный максимум функции $v(\xi,\eta)$ в $\overline{D}$ достигается только на отрезке $0 \leqslant \xi = \eta \leqslant l$.

$\lhd$ Доказательство леммы 1 проведем методом, предложенным в [6, с. 228]. Действительно, пусть (ε,δ) — произвольным образом фиксированная точка из области D. Если p в области D имеет непрерывную производную по ξ, а q непрерывна в D, то уравнение (2) в классе функций $v = v(\xi,\eta)$, имеющих в D первые и вторые смешанные производные, эквивалентно уравнению

$$(q_1 v_\eta + p_1 v)_\xi + r_1 v + \lambda_1 v(\xi,\xi) + \mu_1 v(\eta,\eta) = 0$$

или нагруженному уравнению первого порядка

$$\begin{gathered} q_1(\xi,\eta)v_\eta(\xi,\eta) + p_1(\xi,\eta)v(\xi,\eta) + \int\limits_\varepsilon^\xi r_1(\xi_1,\eta)v(\xi_1,\eta)\,d\xi_1 \\ = q_1(\varepsilon,\eta)v_\eta(\varepsilon,\eta) + p_1(\varepsilon,\eta)v(\varepsilon,\eta) - \int\limits_\varepsilon^\xi \lambda_1(\xi_1,\eta)v(\xi_1,\xi_1)\,d\xi_1 - \int\limits_\varepsilon^\xi \mu_1(\xi_1,\eta)v(\eta,\eta)\,d\xi_1, \end{gathered} \tag{6}$$

где $\lambda_1 = \lambda q_1$, $\mu_1 = \mu q_1$, $0 < \xi < \eta < l$.

Перепишем (6) в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
q_1(\xi,\eta)v_\eta(\xi,\eta) &= \int\limits_\varepsilon^\xi \big[v(\xi,\eta)-v(\xi_1,\eta)\big]\, r_1(\xi_1,\eta)\,d\xi_1 + q_1(\varepsilon,\eta)\big[v_\eta(\varepsilon,\eta)+p(\varepsilon,\eta)v(\varepsilon,\eta)\big]\\
&+\int\limits_\varepsilon^\xi \big[v(\xi,\eta)-v(\xi_1,\xi_1)\big]\,\lambda_1(\xi_1,\eta)\,d\xi_1 + \int\limits_\varepsilon^\xi \big[v(\xi,\eta)-v(\eta,\eta)\big]\,\mu_1(\xi_1,\eta)\,d\xi_1\\
&-v(\xi,\eta)\left[p_1(\xi,\eta)+\int\limits_\varepsilon^\xi \big[r(\xi_1,\eta)q_1(\xi_1,\eta)+\lambda_1(\xi_1,\eta)+\mu_1(\xi_1,\eta)\big]\,d\xi_1\right]\\
&= \int\limits_\varepsilon^\xi \big[v(\xi,\eta)-v(\xi_1,\eta)\big]\, r_1(\xi_1,\eta)\,d\xi_1 + q_1(\varepsilon,\eta)\big[v_\eta(\varepsilon,\eta)+p(\varepsilon,\eta)v(\varepsilon,\eta)\big]\\
&+\int\limits_\varepsilon^\xi \big[v(\xi,\eta)-v(\xi_1,\xi_1)\big]\,\lambda_1(\xi_1,\eta)\,d\xi_1 + \int\limits_\varepsilon^\xi \big[v(\xi,\eta)-v(\eta,\eta)\big]\,\mu_1(\xi_1,\eta)\,d\xi_1\\
&-v(\xi,\eta)\left[p_1(\varepsilon,\eta)+\int\limits_\varepsilon^\xi \big[r(\xi_1,\eta)+\lambda(\xi_1,\eta)+\mu(\xi_1,\eta)\big]\,q_1(\xi_1,\eta)\;d\xi_1\right].
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Допустим теперь, что положительный максимум функции $v(\xi,\eta)$, являющейся регулярным решением уравнения (2), в $\overline{D}$ достигается в точке (ξ_0,η_0), $0<\xi_0<\eta_0\leqslant l$. Из (7) при $\xi=\xi_0$, $\eta=\eta_0$, $\varepsilon\to 0$, имеем

$$
\begin{aligned}
q_1(\xi_0,\eta_0)v_\eta(\xi_0,\eta_0) &= \int\limits_0^{\xi_0} \big[v(\xi_0,\eta_0)-v(\xi_1,\eta_0)\big]\, r_1(\xi_1,\eta_0)\,d\xi_1\\
&+\int\limits_0^{\xi_0} \big[v(\xi_0,\eta_0)-v(\xi_1,\xi_1)\big]\,\lambda_1(\xi_1,\eta_0)\,d\xi_1 + \int\limits_0^{\xi_0} \big[v(\xi_0,\eta_0)-v(\eta_0,\eta_0)\big]\,\mu_1(\xi_1,\eta_0)\,d\xi_1\\
&-v(\xi_0,\eta_0)\left[p_1(\xi_0,\eta_0)+\int\limits_0^{\xi} \big[r(\xi_1,\eta_0)+\lambda(\xi_1,\eta_0)+\mu(\xi_1,\eta_0)\big]\,q_1(\xi_1,\eta_0)\,d\xi_1\right]\\
&+q_1(0,\eta)\big[v_\eta(0,\eta)+p(0,\eta)v(0,\eta)\big].
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Из (8), учитывая, что $q_1(\xi,\eta)>0$, и условия (3)–(5), получаем, что $v_\eta(\xi_0,\eta_0)<0$. Но это противоречит сделанному допущению, так как в точке (ξ_0,η_0) положительного максимума $v_\eta(\xi_0,\eta_0)\geqslant 0$. Следовательно, положительный максимум функции $v(\xi,\eta)$ в $\overline{D}$ достигается только на отрезке $0\leqslant\xi=\eta\leqslant l$. $\rhd$

Аналогично доказывается, что при замене условия (3) леммы 1 на условие

$$v_\eta\in C(0\leqslant\xi<\eta\leqslant l),\quad v_\eta(0,\eta)+p(0,\eta)v(0,\eta)\geqslant 0,$$

отрицательный минимум функции $v(\xi,\eta)$ в $\overline{D}$ достигается только на отрезке $0\leqslant\xi=\eta\leqslant l$.

В параболической части Ω^+ смешанной области Ω справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $u(x,y)$ — регулярное в Ω^+ решение уравнения (1) из $C(\bar{\Omega}^+)$, удовлетворяющее условию $L_1 u \geqslant 0$ ($\leqslant 0$), $a_1(x,y), c_1(x,y), d_1(x,y) \in \overline{\Omega}^+$ и*

$$c_1(x,y) + d_1(x,y) < 0, \quad d_1(x,y) \geqslant 0. \tag{9}$$

Тогда положительный максимум (отрицательный минимум) функции $u(x,y)$ в $\overline{\Omega}^+$ может достигается только на AA_0, AB, BB_0.

$\lhd$ Доказательство леммы 2 проведем аналогично [6, с. 263]. Достаточно доказать лемму 2 для случая положительного максимума, так как случай отрицательного минимума сводится к нему заменой u на $-u$. Пусть решение u уравнения $L_1 u = 0$ достигает положительного максимума в точке $(x_0, y_0) \in \Omega^+$. Необходимое условие максимума функции u в точке (x_0, y_0) имеет следующий вид: $u_x = 0$, $u_y = 0$, $u_{xx} \leqslant 0$. Принимая это во внимание, из (1) находим

$$c_1(x_0,y_0)u(x_0,y_0) + d_1(x_0,y_0)u(x_0,0) = -u_{xx}(x_0,y_0) \geqslant 0.$$

С другой стороны, с учетом (9), получим

$$\begin{aligned} c_1(x_0,y_0)u(x_0,y_0) + d_1(x_0,y_0)u(x_0,0) &= c_1(x_0,y_0)u(x_0,y_0) + d_1(x_0,y_0)u(x_0,0) \\ &\quad + d_1(x_0,y_0)u(x_0,y_0) - d_1(x_0,y_0)u(x_0,y_0) \\ = [c_1(x_0,y_0) + d_1(x_0,y_0)]u(x_0,y_0) &- d_1(x_0,y_0)[u(x_0,y_0) - u(x_0,0)] < 0. \end{aligned}$$

Полученное противоречие — результат неверного допущения, и $(x_0, y_0) \notin \Omega^+$. Утверждение, что точка максимума не принадлежит $A_0 B_0$, доказывается также, как и в случае, когда $y_0 < h$, но с той лишь разницей, что необходимое условие экстремума $u_y(x_0, y_0) = 0$ при $y_0 < h$ заменяется условием $u_y(x_0, y_0) \geqslant 0$ при $y_0 = h$.

Отметим, что замена $u = v\exp(\alpha y)$, где постоянная $\alpha > 0$, приводит к уравнению вида $L_1 v = 0$ с коэффициентом при v, равным $c_1 - \alpha$, и коэффициентом при $v(x,0)$, равным $d_1 \exp(-\alpha y)$. Если функции c_1 и d_1 непрерывны в замыкании Ω, то при достаточно больших α этот коэффициент при v строго отрицателен, кроме того, можно подобрать α таким образом, чтобы выполнялось $c_1(x,y) - \alpha + d_1(x,y)\exp(-\alpha y) < 0$. $\rhd$

Для уравнения (1) имеет место следующий принцип максимума.

Теорема 1. *Пусть*

1) *$u(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega^-) \cap C^2_x(\Omega^+)$, $u(x,y)$ удовлетворяет неравенству $L_1 u \geqslant 0$ в Ω^+, и $L_2 u \leqslant 0$ в Ω^-, кроме того, функция $u(x,y)|_{AC} = 0$ и обладает свойством*

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u \in C\big(\overline{\Omega}^- \setminus \overline{AB}\big);$$

2) *в $\overline{\Omega}^-$ коэффициенты $a_2, b_2 \in C^1(\overline{\Omega}^-)$, $c_2, d_2, e_2 \in C(\overline{\Omega}^-)$, и удовлетворяют условиям леммы 1;*

3) *в $\overline{\Omega}^+$ коэффициенты a_1, c_1, d_1 непрерывны и удовлетворяют условиям леммы 2.*

Тогда функция $u(x,y)$ свой положительный максимум в $\overline{\Omega}$ принимает на отрезках AA_0 и BB_0.

$\lhd$ Из леммы 1 следует, что функция $u(x,y)$ свой положительный максимум в $\overline{\Omega}^-$ принимает в точке $(x_0, 0)$ отрезка AB, причем в точке положительного максимума

$$\nu(x_0) \geqslant 0, \tag{10}$$

где $\nu(x) = u_y(x, 0)$.

В $\overline{\Omega}$ из леммы 1 и леммы 2 при выполнении условий теоремы 1 следует, что положительный максимум функции $u(x,y)$ может достигаться только на отрезках AA_0, BB_0, AB. Покажем теперь, что для функции $u(x,y)$ любая внутренняя точка $(x_0,0)$ отрезка AB не может быть точкой положительного максимума. В самом деле, в силу непрерывности производных u_x, u_y, u_{xx} из неравенства $L_1u \geqslant 0$ мы можем перейти к пределу при $y \to +0$

$$\tau''(x) + a_1(x,0)\tau'(x) + [c_1(x,0) + d_1(x,0)]\tau(x) - \nu(x) \geqslant 0, \tag{11}$$

где $\tau(x) = u(x,0)$. Из (11) в силу условий (9) леммы 2 в точке положительного максимума имеем $\nu(x_0) < 0$, что противоречит неравенству (10), откуда следует, что функция $u(x,y)$ не может достигать положительного максимума во внутренней точке $(x_0,0)$ отрезка AB. Таким образом, при выполнении условий теоремы 1 положительный максимум функции $u(x,y)$ может достигаться только на отрезках AA_0 и BB_0, что и требовалось доказать. $\triangleright$

Из теоремы 1 легко получить

Следствие 1. *Пусть*

1) *выполнены условия* 1) *теоремы* 1;

2) *в* $\overline{\Omega}^+$ *коэффициенты* a_1, c_1, d_1 *непрерывны и выполняются условия* (9);

3) *в* $\overline{\Omega}^-$ *коэффициенты* $a_2, b_2 \in C^1(\overline{\Omega}^-)$, $c_2, d_2, e_2 \in C(\overline{\Omega}^-)$, *и выполняются условия*

$$a_2^2 - b_2^2 + 2a_{2x} + 2b_{2x} + 2a_{2y} + 2b_{2y} - 4c_2 \geqslant 0, \tag{12}$$

$$a_2 + b_2 > 0, \quad c_2 + d_2 + e_2 \geqslant 0, \quad d_2 \leqslant 0, \quad e_2 \leqslant 0. \tag{13}$$

Тогда функция $u(x,y)$ *свой положительный максимум в* $\overline{\Omega}$ *принимает на отрезках* AA_0 *и* BB_0.

Действительно, легко видеть, что условия (12) и (13) гарантируют выполнение условий (4) и (5) леммы 1, и все остальные условия теоремы 1 выполнены.

При $d_1 = d_2 = e_2 \equiv 0$ следствие 1 совпадает с принципом максимума для уравнения смешанного гиперболо-параболического типа, приведенного в [8, с. 10]. Заметим, что условия (12), (13) следствия 1 при $|a_2| = |b_2| \equiv \mathrm{const}$ не имеют места, если $c_2 \neq 0$, так же, как и в [8, с. 17], поэтому этот случай должен быть рассмотрен отдельно.

Замечание 1. Если в условии теоремы 1 функция $u(x,y)$ удовлетворяет строгим неравенствам $L_1u > 0$ в Ω^+, и $L_2u < 0$ в Ω^-, то в формулах (5) и (9) неравенства будут нестрогие.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применения.—М.: Наука, 2012.—232 с.
2. *Бицадзе А. В.* О некоторых задачах смешанного типа // Докл. АН СССР.—1950.—Т. 70, № 4.—С. 561–565.
3. *Сабитов К. Б.* О принципе максимума для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения.—1988.—Т. 24, № 11.—С. 1967–1976.
4. *Нахушев А. М.* К теории краевых задач для нагруженных интегральных уравнений // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. академии наук.—2014.—Т. 16, № 3.—С. 30–34.
5. *Хубиев К. У.* О принципе экстремума для нагруженных уравнений // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. академии наук.—2014.—Т. 16, № 3.—С. 47–50.
6. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии.—М.: Высш. шк., 1995.—301 с.

7. *Хубиев К. У.* О принципе максимума для характеристически нагруженного уравнения гиперболического типа // Материалы III Междунар. Российско-Казахского симп. «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» (Нальчик–Терскол, 3–7 декабря 2014 г.).—С. 219–221.
8. *Джураев Т. Д., Сопуев А. С., Мамажанов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа.—Ташкент: ФАН, 1986.—220 с.
9. *Agmon S., Nirenberg L., Protter M.* A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type // Commun. Pure Appl. Math.—1953.—Vol. 6.—P. 455–470.

Статья поступила 21 апреля 2016 г.

Хубиев Казбек Узеирович
Институт прикладной математики и автоматизации,
старший научный сотрудник отдела уравнений смешанного типа
РОССИЯ, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а
E-mail: khubiev_math@mail.ru

A MAXIMUM PRINCIPLE FOR A LOADED HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATION

Khubiev K. U.

We prove the maximum principle for a loaded equation of hyperbolic-parabolic type with variable coefficients. The characteristic load term is given on the degenerate line. The obtained results generalize the maximum principle for hyperbolic-parabolic equations provided in T. D. Dzhuraev's monograph, and in the hyperbolic domain the well-known Agmon–Nirenberg–Protter principle.

Key words: maximum principle, loaded equation, equation of mixed type, hyperbolic-parabolic equation.