Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 1, С. 72–78

УДК **517.98**

СЖИМАЮЩИЕ ПРОЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Б. Б. Тасоев

В работе приведено описание структуры положительных сжимающих проекторов в пространствах Лебега $L_{p(\cdot)}$ с σ-конечной мерой и с существенно ограниченным переменным показателем $p(\cdot)$. Показано, что всякий положительный сжимающий проектор $P : L_{p(\cdot)} \to L_{p(\cdot)}$ допускает матричное представление, а ограничение P на полосу, порожденную слабой порядковой единицей своего образа, представляет собой взвешенный оператор условного ожидания. Попутно получено описание образа $\mathscr{R}(P)$ положительного сжимающего проектора P. Отметим, что в случае конечной меры при постоянном показателе существование слабой порядковой единицы в $\mathscr{R}(P)$ очевидно. В нашем же случае наличие слабой порядковой единицы в $\mathscr{R}(P)$ требует доказательства и мы строим ее конструктивно. Слабая порядковая единица в образе положительного сжимающего проектора играет ключевую роль в его представлении.

Ключевые слова: оператор условного ожидания, сжимающий проектор, пространство Лебега с переменным показателем, пространство Накано, σ-конечная мера.

1. Введение

Р. Г. Дуглас в своей работе [8] показал, что всякий сжимающий проектор в пространстве $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ с конечной мерой, который оставляет константы неподвижными, представляет собой оператор условного ожидания. Т. Андо в работе [4] обобщил этот результат на $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ с конечной мерой. Посредством оператора условного ожидания П. Г. Доддс, Ч. Б. Хюсманс и Б. де Пахте в работе [7] привели полное описание положительных порядково непрерывных проекторов, действующих в идеальных подпространствах в $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ с конечной мерой. Пользуясь техникой банаховых решеток, Ю. А. Абрамович, К. Д. Алипрантис и О. Буркиншо в [2], для $p = 1$, и Ю. А. Абрамович и К. Д. Алипрантис в [3, § 5.3, 5.4], для $1 \leqslant p < \infty$, привели другое элегантное доказательство результатов Р. Г. Дугласа и Т. Андо. Д. Е. Уолберт в работе [9] показал, что всякий положительный сжимающий проектор в $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ с произвольной мерой есть оператор условного ожидания при условии, что сужение этого оператора на L_∞ также является сжимающим. С. Бернау и Е. Лейси в работе [5] показали, что если положительные сжимающие проекторы в L_p-пространствах с произвольной мерой ограничить на полосы, порожденными элементами из его образа, то эти ограничения описываются с помощью оператора условного ожидания.

В настоящей работе приводится описание структуры положительных сжимающих проекторов в $L_{p(\cdot)}$-пространствах с σ-конечной мерой с переменным показателем $p(\cdot)$.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-91339 ННИО_а.

Попутно мы получили описание образа этого проектора. Следует отметить, что во всех вышеперечисленных работах в случае конечной меры при постоянном показателе существование слабой порядковой единицы в образе положительного сжимающего проектора очевидно. В нашем же случае наличие единицы требует доказательства, и мы строим ее конструктивно. Слабая порядковая единица в образе положительного сжимающего проектора играет ключевую роль в его представлении.

2. Вспомогательные леммы и определения

Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с σ-конечной мерой, т. е. Ω — непустое множество, Σ — σ-алгебра подмножеств множества Ω, μ — полная мера на Σ, и существует возрастающая по включению последовательность $\{\Omega_n\} \subset \Sigma$ такая, что $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, $\mu(\Omega_n) < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Для произвольного множества $A \in \Sigma$ символом $\mathbf{1}_A$ будем обозначать его характеристическую функцию.

Как обычно, символом $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ будем обозначать множество классов эквивалентности измеримых почти всюду конечных функций. Всюду далее функция $p(\cdot) \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ такая, что $\mathbf{1}_\Omega \leqslant p(\cdot)$ почти всюду на Ω. Обозначим символом $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$ множество всех функций $f \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$, для которых $\int_\Omega |f(t)|^{p(t)} d\mu(t) < \infty$. В пространстве $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$ введем норму $\|\cdot\|$ по формуле

$$\|f\| := \inf\left\{\lambda > 0 : \int\limits_\Omega \left|\frac{f(t)}{\lambda}\right|^{p(t)} d\mu(t) \leqslant 1\right\} \quad (f \in L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)).$$

Тогда $(L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu), \|\cdot\|)$ является банаховым пространством ввиду [6, Theorem 2.71]. Кроме того, из определения $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$ видно, что оно идеальное подпространство в $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Алгебраические и решеточные операции в $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$ осуществляются поточечно почти всюду.

Определение 1. Норма произвольной нормированной решетки $(E, \|\cdot\|)$ называется *строго монотонной*, если из соотношения $|x| < |y|$ следует $\|x\| < \|y\|$ для всех $x, y \in E$.

Лемма 1. *Норма в пространстве $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$ строго монотонна и порядково непрерывна.*

$\lhd$ Доказательство порядковой непрерывности нормы в $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$ можно найти в [6, Theorem 2.62]. Покажем строгую монотонность нормы. Возьмем произвольные $f, g \in L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$ такие, что $0 < |f| < |g|$. Предположим от противного, что $\|f\| \geqslant \|g\|$. Так как функция $p(\cdot)$ существенно ограничена, то в силу [6, Proposition 2.21] выполняются соотношения

$$1 = \int\limits_\Omega \left(\frac{|f|}{\|f\|}\right)^{p(\cdot)} d\mu < \int\limits_\Omega \left(\frac{|g|}{\|f\|}\right)^{p(\cdot)} d\mu \leqslant \int\limits_\Omega \left(\frac{|g|}{\|g\|}\right)^{p(\cdot)} d\mu = 1.$$

Из полученного противоречия следует $\|f\| < \|g\|$. $\rhd$

Определение 2. Оператор $T : X \to Y$ между нормированными пространствами X, Y называется *сжимающим*, если его норма меньше единицы.

Всюду далее E — замкнутый по норме порядковый идеал в $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$, $P : E \to E$ — положительный сжимающий проектор, т. е. $P^2 = P$, $Pf \geqslant 0$ для всех $f \geqslant 0$ и $\|P\| \leqslant 1$. Символом $\mathscr{R}(P) := \{P(f) : f \in E\}$ будем обозначать его образ. Напомним, что $f \in E$

называется *слабой порядковой единицей* пространства M, если $\operatorname{supp} f = \operatorname{supp} M$, где $\operatorname{supp} M$ — носитель M (см. [1, глава 4, § 3]). Положим по определению

$$\Sigma_0 := \{A \in \Sigma : \ A = \operatorname{supp} f, \ f \in \mathscr{R}(P), \ f \geqslant 0\},$$

т. е. система множеств Σ_0 состоит из носителей положительных функций, классы эквивалентности которых содержаться в $\mathscr{R}(P)$.

Лемма 2. *Пространство $\mathscr{R}(P)$ является порядково замкнутой банаховой подрешеткой в E со слабой порядковой единицей $e \in \mathscr{R}(P)$.*

$\lhd$ Ввиду того, что $P^2 = P$ и P — непрерывный оператор, пространство $\mathscr{R}(P)$ замкнуто по норме в E. Так как норма порядково непрерывна, $\mathscr{R}(P)$ — порядково замкнутое банахово пространство. Покажем, что $\mathscr{R}(P)$ — векторная решетка. Возьмем произвольный элемент $f \in \mathscr{R}(P)$. В силу положительности P верно неравенство $P(|f|) \geqslant |P(f)| = |f|$. Предположим, что $P(|f|) > |f|$. Тогда в силу строгой монотонности нормы (лемма 1) следует $\|P(|f|)\| > \|f\|$, что противоречит условию $\|P\| \leqslant 1$. Таким образом, $P(|f|) = |f|$ и $|f| \in \mathscr{R}(P)$. Тем самым, $\mathscr{R}(P)$ — порядково замкнутая банахова подрешетка. Чтобы показать существование слабой порядковой единицы положим по определению $M := \{\mathbf{1}_A : A \in \Sigma_0\} \subset L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тогда существует $\sup M \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ и в силу [1, глава 1, § 6, теорема 17] найдется последовательность $(A_n) \subset \Sigma_0$ такая, что $\sup M = \sup\{\mathbf{1}_{A_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Пусть $e := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\|f_n\| 2^n}$, где $f_n \in \mathscr{R}(P)$, $f_n \geqslant 0$, $A_n = \operatorname{supp} f_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Так как $\mathscr{R}(P)$ замкнута по норме в E, то $e \in \mathscr{R}(P)$. Ясно, что $\operatorname{supp} e = \operatorname{supp} \mathscr{R}(P)$. Следовательно, e — слабая порядковая единица в $\mathscr{R}(P)$. $\rhd$

Лемма 3. *Пусть e из леммы 2. Система множеств Σ_0 является σ-подкольцом в Σ с единицей $\Omega_0 := \operatorname{supp} e$.*

$\lhd$ В силу леммы 2 $\mathscr{R}(P)$ содержит слабую порядковую единицу e. Следовательно, $\Omega_0 = \operatorname{supp} e$ будет единицей системы Σ_0.

Возьмем произвольную последовательность $(A_n) \subset \Sigma_0$. Тогда $A_n = \operatorname{supp} f_n$, где $f_n \in \mathscr{R}(P)$, $f_n \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Положим по определению $f := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\|f_n\| 2^n}$. В силу леммы 2 $f \in \mathscr{R}(P)$. Ясно, что $\operatorname{supp} f = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Следовательно, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma_0$.

Возьмем произвольные $A, B \in \Sigma_0$ и покажем что их разность $A \setminus B \in \Sigma_0$. Пусть $0 \leqslant f, g \in \mathscr{R}(P)$ такие, что $A = \operatorname{supp} f$ и $B = \operatorname{supp} g$. Положим по определению $f_n := (f - ng) \vee 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В силу леммы 2 последовательность (f_n) содержится в $\mathscr{R}(P)$. Так как (f_n) порядково сходится к функции $\mathbf{1}_{A \setminus B} f \in E$, то по той же лемме 2 $\mathbf{1}_{A \setminus B} f \in \mathscr{R}(P)$. Ясно, что $\operatorname{supp} \mathbf{1}_{A \setminus B} f = A \setminus B$. Следовательно, $A \setminus B \in \Sigma_0$. $\rhd$

Символом $\{e\}^{\perp\perp}$ мы будем обозначать полосу в E, порожденную элементом $e \in E$.

Лемма 4. *Пусть e из леммы 2. Справедливо равенство $P(\mathbf{1}_A f) = \mathbf{1}_A P(f)$ для всех $A \in \Sigma_0$ и $f \in \{e\}^{\perp\perp}$.*

$\lhd$ Пусть $0 \leqslant f \in \{e\}^{\perp\perp}$ и $A \in \Sigma_0$. Тогда $f \wedge ne \uparrow_n f$. Следовательно, в силу линейности и порядковой непрерывности оператора P достаточно доказать лемму для всех $0 \leqslant f \leqslant e$. Итак, пусть $0 \leqslant f \leqslant e$. Возьмем $h \in \mathscr{R}(P)$ такой, что $A = \operatorname{supp} h$. Тогда $e \wedge nh \uparrow_n \mathbf{1}_A e$ и ввиду того, что $\mathscr{R}(P)$ — порядково замкнутая подрешетка (лемма 2), следует $\mathbf{1}_A e \in \mathscr{R}(P)$.

В силу положительности оператора P выполняются неравенства $0 \leqslant P(\mathbf{1}_A f) \leqslant P(f)$ и $0 \leqslant P(\mathbf{1}_A f) \leqslant P(\mathbf{1}_A e) = \mathbf{1}_A e$. Следовательно, ввиду соотношения $A \subset \operatorname{supp} e$ получим $\operatorname{supp} P(\mathbf{1}_A f) \subset A$ и $P(\mathbf{1}_A f) \leqslant \mathbf{1}_A P(f)$.

В рассуждениях выше вместо f подставим $e - f$. Тогда справедливы соотношения $\mathbf{1}_A e - P(\mathbf{1}_A f) = P(\mathbf{1}_A (e - f)) \leqslant \mathbf{1}_A P(e - f) = \mathbf{1}_A P(e) - \mathbf{1}_A P(f)$. Следовательно, $P(\mathbf{1}_A f) \geqslant \mathbf{1}_A P(f)$. Таким образом, $P(\mathbf{1}_A f) = \mathbf{1}_A P(f)$. $\rhd$

Возьмем порядковую единицу $e \in \mathscr{R}(P)$ (лемма 2) и положим по определению

$$F := e^{-1}\mathscr{R}(P) := \left\{e^{-1}f : f \in \mathscr{R}(P)\right\},$$

где функция $e^{-1}f$ определяется формулой

$$e^{-1}f(t) := \begin{cases} \frac{f(t)}{e(t)}, & t \in \operatorname{supp} e, \\ 0, & t \in \Omega \setminus \operatorname{supp} e. \end{cases}$$

Ясно, что F — векторная подрешетка в $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ с носителем $\Omega_0 := \operatorname{supp} e$. Обозначим ограничение всех функций из F на Ω_0 через $F|_{\Omega_0}$. Тогда отображение $f \mapsto e^{-1}f$ является решеточным изоморфизмом из $\mathscr{R}(P)$ на $F|_{\Omega_0}$.

Лемма 5. *Все функции из $F|_{\Omega_0}$ Σ_0-измеримы, символически, $F|_{\Omega_0} \subset L_0(\Omega_0, \Sigma_0, \mu)$.*

$\lhd$ Возьмем произвольную положительную функцию $f \in F$. Тогда существует положительная функция $g \in \mathscr{R}(P)$ такая, что $f = e^{-1}g$. Возьмем произвольное число $\alpha \geqslant 0$. В силу того, что $\mathscr{R}(P)$ — векторная решетка, $e, g \in \mathscr{R}(P)$ и $\operatorname{supp} g \subset \operatorname{supp} e$, выполняются равенства $\{t \in \Omega : f(t) > \alpha\} = \{t \in \Omega : e^{-1}(t)g(t) > \alpha\} = \{t \in \Omega : g(t) > \alpha e(t)\} = \{t \in \Omega : g(t) \vee \alpha e(t) - \alpha e(t) > 0\} = \operatorname{supp}(g \vee \alpha e - \alpha e) \in \Sigma_0$. $\rhd$

3. Основной результат

Определение 3. Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с σ-конечной мерой и Σ_0 — некоторое σ-подкольцо в Σ с единицей Ω_0. Функция $f \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ называется Σ_0-*измеримой*, если $\operatorname{supp} f \subset \Omega_0$ и ее ограничение $f|_{\Omega_0}$ на Ω_0 Σ_0-измеримо.

Все Σ_0-измеримые функции из $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ будем обозначать символом $L_0(\Omega, \Sigma_0, \mu)$. В частности, $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma_0, \mu) := L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu) \cap L_0(\Omega, \Sigma_0, \mu)$. Ясно, что $L_0(\Omega, \Sigma_0, \mu)$ подалгебра в $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Пусть $0 < e \in L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$ и Σ_0 — некоторое σ-подкольцо в Σ с единицей $\Omega_0 = \operatorname{supp} e$. Так как $1 \leqslant p(\cdot) \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, то в силу [6, Proposition 2.12] $e^{p(\cdot)} \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$. Введем конечную меру $e^{p(\cdot)}\mu$ по формуле $e^{p(\cdot)}\mu(A) := \int_A e^{p(\cdot)} d\mu$ для всех $A \in \Sigma$. Возьмем произвольную функцию $h \in L_1(\Omega, \Sigma, e^{p(\cdot)}\mu)$ и положим по определению $\lambda(A) := \int_A h e^{p(\cdot)} d\mu$ для всех $A \in \Sigma_0$. Тогда $\lambda : \Sigma_0 \to \mathbb{R}$ — конечная мера, и по теореме Радона — Никодима существует единственная функция $\mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(h|\Sigma_0) \in L_1(\Omega_0, \Sigma_0, e^{p(\cdot)}\mu)$ такая, что

$$\int\limits_A h e^{p(\cdot)}\, d\mu = \int\limits_A \mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(h|\Sigma_0) e^{p(\cdot)}\, d\mu \tag{1}$$

для всех $A \in \Sigma_0$. Продолжим функцию $\mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(h|\Sigma_0)$ на Ω, полагая $\mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(h|\Sigma_0)(t) = 0$ для всех $t \in \Omega \setminus \Omega_0$, и обозначим это продолжение снова через $\mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(h|\Sigma_0)$. Тогда в силу определения 2 $\mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(h|\Sigma_0)$ — единственный элемент из $L_1(\Omega, \Sigma_0, e^{p(\cdot)}\mu)$, удовлетворяющий соотношению (1).

Определение 4. Отображение $\mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(\cdot|\Sigma_0) : h \mapsto \mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(h|\Sigma_0)$ из $L_1(\Omega, \Sigma, e^{p(\cdot)}\mu)$ в $L_1(\Omega, \Sigma_0, e^{p(\cdot)}\mu)$, определяемое соотношением (1), называется *оператором условного ожидания* для меры $e^{p(\cdot)}\mu$ относительно σ-кольца Σ_0 с единицей Ω_0.

Лемма 6. *Оператор условного ожидания $\mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(\cdot|\Sigma_0) : L_1(\Omega, \Sigma, e^{p(\cdot)}\mu) \to L_1(\Omega, \Sigma_0, e^{p(\cdot)}\mu)$ является линейным положительным порядково непрерывным проектором с нормой меньшей единицы.*

$\lhd$ Доказательство леммы легко следует из теоремы Радона — Никодима и определения оператора $\mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(\cdot|\Sigma_0)$. $\rhd$

Теорема 1. *Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с σ-конечной мерой, E — замкнутый по норме порядковый идеал в $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$, $P : E \to E$ — положительный сжимающий проектор. Тогда существуют $0 < e \in \mathscr{R}(P)$, σ-подкольцо Σ_0 в Σ с единицей $\Omega_0 := \operatorname{supp} e$ и единственная положительная функция $w \in L_0(\Omega, \Sigma, e^{p(\cdot)}\mu)$ такие, что $\operatorname{supp}\mathscr{R}(P) = \Omega_0$, $\operatorname{supp} w \subset \operatorname{supp}\Omega_0$ и справедливо представление $P(f) = e\mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(e^{-1}wf|\Sigma_0)$ для всех $f \in \{e\}^{\perp\perp} \subset E$.*

$\lhd$ Пусть e, $\Omega_0 = \operatorname{supp} e$ и Σ_0 из лемм 2 и 3. В силу леммы 5 функция $e^{-1}P(f) \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ Σ_0-измерима для всех $f \in E$, в частности, для $f \in \{e\}^{\perp\perp}$. Осталось доказать представление

$$\int\limits_A e^{-1}P(f)e^{p(\cdot)}d\mu = \int\limits_A e^{-1}wfe^{p(\cdot)}d\mu$$

для всех $f \in \{e\}^{\perp\perp}$ и $A \in \Sigma_0$.

Положим по определению $M := \{e^{-1}f : f \in \{e\}^{\perp\perp}\}$. Тогда M — порядковый идеал в $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Более того, так как мера $e^{p(\cdot)}\mu$ конечна, то ввиду [6, Corollary 2.48] справедливы включения $M \subset L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, e^{p(\cdot)}\mu) \subset L_1(\Omega, \Sigma, e^{p(\cdot)}\mu)$. Введем оператор $T : M \to M$ по формуле $T(g) := e^{-1}P(eg)$ для всех $g \in M$. Тогда T — положительный порядково непрерывный оператор в M. С помощью оператора T определим порядково непрерывный функционал $\Phi : M \to \mathbb{R}$ по формуле $\Phi(g) := \int_\Omega T(g)e^{p(\cdot)}d\mu$ для всех $g \in M$. В силу [3, Theorem 5.26] существует единственная положительная функция $w \in L_0(\Omega, \Sigma, e^{p(\cdot)}\mu)$ такая, что $\operatorname{supp} w \subset \operatorname{supp} e = \operatorname{supp}\Omega_0$ и $\int_\Omega T(g)e^{p(\cdot)}d\mu = \Phi(g) = \int_\Omega wge^{p(\cdot)}d\mu$ для всех $g \in M$. Следовательно, полагая $g := e^{-1}f$, в силу леммы 4 справедливы равенства

$$\int\limits_A e^{-1}P(f)e^{p(\cdot)}d\mu = \int\limits_\Omega \mathbf{1}_A e^{-1}P(f)e^{p(\cdot)}d\mu = \int\limits_\Omega e^{-1}P(\mathbf{1}_A f)e^{p(\cdot)}d\mu$$
$$= \int\limits_\Omega T(\mathbf{1}_A g)e^{p(\cdot)}d\mu = \int\limits_\Omega w\mathbf{1}_A ge^{p(\cdot)}d\mu = \int\limits_A e^{-1}wfe^{p(\cdot)}d\mu$$

для всех $f \in \{e\}^{\perp\perp}$ и $A \in \Sigma_0$. $\rhd$

Замечание 1. Если в теореме 1 мера μ конечна, показатель $1 \leqslant p(\cdot) < \infty$ есть константа и $P(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — тождественная единица на Ω, то полагая $e = \mathbf{1}$, мы получим результат типа Дугласа — Андо [3, Corollary 5.52, 5.53], [7, Proposition 3.3]. В случае, когда μ σ-конечна, то из упомянутой теоремы следует результат Бернау и Лейси [5, Theorem 3.4].

Следствие 1. *Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с σ-конечной мерой, E — замкнутый по норме порядковый идеал в $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$, $P : E \to E$ — положительный сжимающий проектор. Тогда существуют замкнутые идеальные подпространства E_1, E_2 в E и положительные сжимающие операторы $P_{11} : E_1 \to E_1$ и $P_{12} : E_2 \to E_1$ такие, что $E = E_1 \oplus E_2$, $P_{11}P_{12} = P_{12}$, $P_{11}^2 = P_{11}$, и оператор P имеет матричное представление*

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Более того, существуют $0 < e \in \mathscr{R}(P)$, σ-подкольцо Σ_0 в Σ с единицей $\Omega_0 = \operatorname{supp} e$ и единственная положительная функция $w \in L_0(\Omega, \Sigma, e^{p(\cdot)}\mu)$ такие, что $\operatorname{supp}\mathscr{R}(P) = \Omega_0$, $\operatorname{supp} w = \Omega_0$, и имеет место представление $P_{11}(f) = e\mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(e^{-1}wf|\Sigma_0)$ для всех $f \in E_1$.

$\lhd$ В силу теоремы 1 существуют $0 < e \in \mathscr{R}(P)$, σ-подкольцо Σ_0 в Σ с единицей $\Omega_0 = \operatorname{supp} e$ и единственная положительная функция $w \in L_0(\Omega, \Sigma, e^{p(\cdot)}\mu)$ такие, что $\operatorname{supp}\mathscr{R}(P) = \Omega_0$, $\operatorname{supp}\mathscr{R}(P) = \Omega_0$, и справедливо представление

$$P(f) = e\mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(e^{-1}wf|\Sigma_0) \tag{2}$$

для всех $f \in \{e\}^{\perp\perp}$. Положим в качестве $E_1 := \mathbf{1}_{\Omega_0}E = \{e\}^{\perp\perp}$ и $E_2 := \mathbf{1}_{\Omega\setminus\Omega_0}E = \{e\}^{\perp}$. Введем операторы $P_{11} : E_1 \to E_1$ и $P_{12} : E_2 \to E_1$ по формулам $P_{11}(f) := P(f)$ для всех $f \in E_1$ и $P_{12}(g) := P(g)$ для всех $g \in E_2$. Ясно, что $P_{11}^2 = P_{11}$. Так как $\mathscr{R}(P_{12}) \subset \mathscr{R}(P) \subset \{e\}^{\perp\perp} = E_1$, то $P_{11}P_{12} = P_{12}$. Очевидно, что $E = E_1 \oplus E_2$, и P_1, P_2 — положительные операторы с нормами меньше единицы. Ограничение оператора P на E_1 есть P_{11}. Следовательно, в силу (2) выполняются равенства $P_{11}(f) = P(f) = e\mathscr{E}^{e^{p(\cdot)}\mu}(e^{-1}wf|\Sigma_0)$ для всех $f \in E_1$. $\rhd$

В заключение рассмотрим вопрос об описании образа положительного сжимающего проектора P, действующего в $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Предложение 1. *Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с σ-конечной мерой, P — положительный сжимающий проектор, действующий в $L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тогда существуют функция $0 < e \in \mathscr{R}(P)$ и σ-подкольцо Σ_0 с единицей $\Omega_0 = \operatorname{supp} e$ такие, что выполняется равенство $\mathscr{R}(P) = e \cdot L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma_0, e^{p(\cdot)}\mu)$.*

$\lhd$ Ввиду лемм 2 и 3 возьмем порядковую единицу $0 < e \in \mathscr{R}(P)$ и σ-подкольцо Σ_0 с единицей $\Omega_0 = \operatorname{supp} e$. Рассмотрим пространство $L_{p(\cdot)}(\Omega_0, \Sigma_0, \mu_0)$, где мера μ_0 есть сужение меры $e^{p(\cdot)}\mu$ на Σ_0, а под функцией $p(\cdot)$ мы подразумеваем ее сужение на Ω_0. Ввиду леммы 5 для доказательства нашего утверждения достаточно установить, что $(e^{-1}\mathscr{R}(P))|_{\Omega_0} = L_{p(\cdot)}(\Omega_0, \Sigma_0, \mu_0)$, где $(e^{-1}\mathscr{R}(P))|_{\Omega_0}$ обозначает сужение всех функций из $e^{-1}\mathscr{R}(P)$ на Ω_0. В силу леммы 4 множество $(e^{-1}\mathscr{R}(P))|_{\Omega_0}$ содержит все характеристические функции множеств из Σ_0. Так как $(e^{-1}\mathscr{R}(P))|_{\Omega_0}$ является порядково замкнутой подрешеткой в $L_{p(\cdot)}(\Omega_0, \Sigma_0, \mu_0)$, то в силу спектральной теоремы Фрейденталя следует справедливость утверждения. $\rhd$

Литература

1. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.—СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2004.—812 с.
2. *Abramovich Y. A., Aliprantis C. D., O. Burkinshaw O.* An elementary proof of Douglas theorem on contractive projections on L_1 spaces // J. Math. Anal. Appl.—1993.—Vol. 177.—P. 641–644.
3. *Abramovich Y. A., Aliprantis C. D.* An Invitation to Operator Theory.—Providence., R.I.: Amer. Math. Soc., 2002.—(Graduate Stud. in Math., 50).
4. *Ando T.* Contractive projections in L_p spaces // Pacific J. Math.—1966.—Vol. 17.—P. 391–405.
5. *Bernau S. J., Lacey E. H.* The range of contractive projection on an L_p space // Pacific J. Math.—1974.—Vol. 53, № 1.—P. 21–41.
6. *Cruz-Uribe D. V., Fiorenza A.* Variable Lebesgue Spaces.—Springer, 2013.
7. *Dodds P. G., Huijsmans C. B., de Pagter B.* Characterizations of conditional expectation-type operators // Pacific J. Math.—1990.—Vol. 141, № 1.—P. 55–77.
8. *Douglas R. G.* Contractive projections on an L_1 space // Pacific J. Math.—1965.—Vol. 15, № 2.—P. 443–462.
9. *Wulbert D. E.* A note on the characterization of conditional expectation operators // Pacific J. Math.—1970.—Vol. 34, № 1.—P. 285–288.

Статья поступила 25 августа 2016 г.

Тасоев Батрадз Ботазович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
научный сотрудник отдела функционального анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: tasoevbatradz@yandex.ru

CONTRACTIVE PROJECTIONS IN VARIABLE LEBESGUE SPACES

Tasoev B. B.

In this article we describe the structure of positive contractive projections in variable Lebesgue spaces $L_{p(\cdot)}$ with σ-finite measure and essentially bounded exponent function $p(\cdot)$. It is shown that every positive contractive projection $P : L_{p(\cdot)} \to L_{p(\cdot)}$ admits a matrix representation, and the restriction of P on the band, generated by a weak order unite of its image, is weighted conditional expectation operator. Simultaneously we get a description of the image $\mathscr{R}(P)$ of the positive contractive projection P. Note that if measure is finite and exponent function $p(\cdot)$ is constant, then the existence of a weak order unit in $\mathscr{R}(P)$ is obvious. In our case, the existence of the weak order unit in $\mathscr{R}(P)$ is not evident and we build it in a constructive manner. The weak order unit in the image of positive contractive projection plays a key role in its representation.

Key words: conditional expectation operator, contractive projection, variable Lebesgue space, Nakano space, σ-finite measure.