Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 1, С. 41–49

УДК **517.547.2**

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НУЛЕЙ ОДНОГО КЛАССА МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Ю. Ф. Коробейник

В работе исследуется распределение нулей одного класса мероморфных функций, содержащего, в частности, дзета-функцию Римана.

Ключевые слова: нули мероморфной функции, функциональное уравнение.

1. Введение. Класс $\mathscr{K}_0$ и область $\mathscr{G}_g$

Как обычно (см., например, [1]), определенная и однозначная в некоторой области $\mathscr{G}$ из $\mathbb{C}$ функция f называется мероморфной в $\mathscr{G}$, если она аналитична в каждой точке области, за исключением не более чем счетного множества Q_f точек (из $\mathscr{G}$), не имеющего предельных точек в $\mathscr{G}$, причем каждая из точек «исключительного» множества Q_f является полюсом f (любого конечного порядка).

Если $d \in (-\infty, +\infty)$, то условимся всюду в дальнейшем символом $\mathscr{E}_d$ обозначать вертикальную полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Re} z > d\}$, а символом $\overline{\mathscr{E}}_d$ — ее замыкание в $\mathbb{C}$ (т. е. $\overline{\mathscr{E}}_d = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z \geqslant d\}$). Введем класс $\mathscr{K}_0$ мероморфных функций g, каждая из которых обладает такими свойствами:

1) g однозначна и аналитична в замкнутой полуплоскости $\overline{\mathscr{E}}_{\frac{1}{2}-h}$ $(h = h(g) \in (0, +\infty))$, за исключением, быть может, некоторого конечного числа точек, расположенных в вещественном промежутке $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + h_1\right]$, где $h_1 = h_1(g)$ и $0 < h_1 < h$, причем в каждой из этих выключенных точек функция g имеет полюс произвольного порядка;

2) для всех точек z из $\overline{\mathscr{E}}_{\frac{1}{2}-h}$ $g(z) = \overline{g(\bar{z})}$;

3) $g(z) \neq 0$ в $\mathscr{E}_{\frac{1}{2}+h_1}$;

4) функция $g(z)$ отлична от нуля во всех точках вещественной полупрямой $\ell\left(\frac{1}{2} - h\right) := \{z = x \geqslant \frac{1}{2} - h\}$, в которых она аналитична (всюду в этой работе используется стандартное обозначение $z = x + iy$, где $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$), так что $\ell\left(\frac{1}{2} - h\right) = \{z : \operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re} z \geqslant \frac{1}{2} - h\}$;

5) всюду в вертикальной полосе $\overline{\mathscr{E}}^{\frac{1}{2}+h}_{\frac{1}{2}-h} := \{z : \frac{1}{2} - h \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \frac{1}{2} + h\}$ $g(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению (типа уравнения Римана для дзета-функции) $g(z) = b_g(z)g(1-z)$.

«Множитель Римана» $b_g(z)$, вообще говоря, зависит от функции g и удовлетворяет следующим условиям:

6) $b_g(z)$ мероморфна в полосе $\overline{\mathscr{E}}^{\frac{1}{2}+h}_{\frac{1}{2}-h}$; более точно, она имеет в этой полосе не более конечного числа полюсов (все они принадлежат промежутку $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + h_1\right]$), а в остальных точках z полосы функция $b_g(z)$ аналитична;

7) все нули функции b_g вещественны и те из них, которые лежат правее точки $z = x = \frac{1}{2}$, принадлежат полупрямой

$$\bar{\ell}\Big(\frac{1}{2}+h_1\Big) := \Big\{z:\ \operatorname{Im} z = 0;\ \frac{1}{2}+h_1 \leqslant \operatorname{Re} z < +\infty\Big\}.$$

Из 1)–7), в частности, следует, что $b_g\big(\frac{1}{2}\big) = 1$, для любого $g \in \mathscr{K}_0$; далее, если z_0 — чисто комплексное число, т. е. если $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$, то точка z_0 будет нулем какой-либо функции g_0 из $\mathscr{K}_0$ кратности $\alpha_g \geqslant 1$ тогда и только тогда, когда $1 - z_0$ — нуль $g_0(z)$ той же кратности (оба эти результата используются в дальнейшем).

Пусть $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ и $g \in \mathscr{K}_0$. Назовем полупрямую $\ell_y^{(g)} := \{z = x + iy :\ \frac{1}{2} - h \leqslant x < +\infty\}$ g-регулярной, если она не содержит нулей $g(z)$, и g-нерегулярной, — в противном случае, т. е. когда на этой полупрямой имеется хотя бы один нуль функции g. Соответствующую ординату y также будем называть g-регулярной, в первом случае, и g-нерегулярной — во втором. Множество всех g-регулярных ординат обозначается далее символом Φ_g, а g-нерегулярных — символом Ψ_g.

Из обычной для всех курсов теории функций комплексного переменного теоремы единственности для аналитической функции нетрудно вывести, что множество Ψ_g не имеет конечных предельных точек и потому не более чем счетно.

Введем теперь неограниченную односвязную область $\mathscr{G}_g$, полученную удалением из $\mathscr{E}_{\frac{1}{2}-h}$ счетной совокупности промежутков, состоящей из промежутка $\big(\frac{1}{2} - h, \frac{1}{2} + h_1\big]$ и счетной системы промежутков

$$\Big(\frac{1}{2} - h + iy, \frac{1}{2} + h_1 + iy\Big], \quad y \in \Psi_g.$$

Так как $g(z) \neq 0$ в $\mathscr{G}_g$, то, как известно (см., например, [2, гл. 8, § 1, с. 319, теорема 1.2]), функция $\ln|g(z)|$, где $g \in \mathscr{K}_0$, гармонична в области $\mathscr{G}_g$; кроме того, существует бесконечное множество $\mathscr{M}_g$ гармонических и сопряженных с $\ln|g(z)|$ в $\mathscr{G}_g$ функций, которые отличаются друг от друга на вещественную постоянную.

2. Выводное уравнение. Постановка основной задачи работы

Пусть $\sigma \in (h_1, h)$ и T — g-регулярная ордината (без ограничения общности, можно считать, что $T > 0$). Образуем прямоугольный четырехугольник $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{4} \Gamma_k$ с вершинами в точках A, C, D, F и сторонами Γ_k, $1 \leqslant k \leqslant 4$, где $\Gamma_1 := [AC]$, $\Gamma_2 := [CD]$, $\Gamma_3 = [DF]$, $\Gamma_4 := [FA]$, $A = \frac{1}{2} - \sigma - iT$, $C = \frac{1}{2} + \sigma - iT$, $D = \frac{1}{2} + \sigma + iT$, $F = \frac{1}{2} - \sigma + iT$. Установим на Γ направление движения против часовой стрелки. Согласно теории вычетов (см., например, [1])

$$\operatorname{Im} \int\limits_{\Gamma} \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz = \sum_{k=1}^{4} \operatorname{Im} \int\limits_{\Gamma_k} \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz = 2\pi[-\mathscr{P}_g + \mathscr{N}_g(T) + 2\mathscr{N}_g(T, \sigma)].$$

Здесь $\mathscr{P}_g$ — сумма порядков всех полюсов $g(z)$ (согласно § 1 все полюсы функции $g(z)$ из $\mathscr{K}_0$ расположены в промежутке $\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+h_1\big]$ вещественной оси); $\mathscr{N}_g(T)$ — сумма кратностей всех возможных нулей $g(z)$, принадлежащих интервалу $\big(\frac{1}{2} - iT, \frac{1}{2} + iT\big)$ прямой $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$; наконец, $\mathscr{N}_g(T, \sigma)$ — сумма кратностей всех возможных нулей функции $g(z)$, лежащих внутри прямоугольника $BCDE$, где $B := \frac{1}{2} - iT$, $E := \frac{1}{2} + iT$.

При этом

$$\int_{\Gamma_4} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz + \int_{\Gamma_1} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = -\Bigg[\int_{\Gamma_2} \frac{g'(1-z)}{g(1-z)}\,dz + \int_{\Gamma_3} \frac{g'(1-z)}{g(1-z)}\,dz\Bigg].$$

Учитывая, что при $b_g(z)g(1-z)g(z) \neq 0$ справедливо равенство

$$\frac{b_g'(z)}{b_g(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{g'(1-z)}{g(1-z)},$$

находим, что

$$\sum_{k=1}^{4} \mathrm{Im}\int_{\Gamma_k} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz == \mathrm{Im}\int_F^D \frac{b_g'(z)}{b_g(z)}\,dz + \mathrm{Im}\int_D^C \frac{b_g'(z)}{b_g(z)}\,dz + +2\,\mathrm{Im}\Bigg[\int_{\Gamma_2} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz + \int_{\Gamma_3} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz\Bigg].$$

Таким образом, для любых $g \in \mathscr{K}_0$, $\sigma \in (h_1, h)$, $T \in \Phi_g$ справедливо равенство

$$-\mathscr{P}_g + \mathscr{N}_g(T) + 2\mathscr{N}_g(T,\sigma) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Im}\int_{FDC} \frac{b_g'(z)}{b_g(z)}\,dz + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\int_{CDF} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz. \tag{1}$$

Преобразуем теперь последнее слагаемое в правой части равенства (1). Всюду далее используется стандартное представление функции $g(z)$ из $\mathscr{K}_0$ в виде $g(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, где (u,v) — пара сопряженных гармонических в $\mathscr{G}_g$ функций. Имеем

$$\int_{CDF} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = \int_{\Gamma_2} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz + \int_{\Gamma_3} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz.$$

Далее,

$$J := \int_{\Gamma_2} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = \int_{-T}^{T} \frac{\left[u\left(\frac12+\sigma+i\tau\right) - iv\left(\frac12+\sigma+i\,\tau\right)\right]}{\left[u^2\left(\frac12+\sigma+i\tau\right) + v^2\left(\frac12+\sigma+i\tau\right)\right]}\, g'\left(\frac{1}{2}+\sigma+i\tau\right) i\,d\tau$$

$$= \int_{-T}^{T} \frac{\left[v\left(\frac12+\sigma,\tau\right) + iu\left(\frac12+\sigma,\tau\right)\right]}{\left[u^2\left(\frac12+\sigma,\tau\right) + v^2\left(\frac12+\sigma,\tau\right)\right]} \left[\frac{\partial v\left(\frac12+\sigma,\tau\right)}{\partial\tau} - i\,\frac{\partial u\left(\frac12+\sigma,\tau\right)}{\partial\tau}\right] d\tau.$$

Отсюда

$$\mathrm{Im}\,J = \int_{-T}^{T} \frac{\left[u\left(\frac12+\sigma,y\right)\frac{\partial v\left(\frac12+\sigma,y\right)}{\partial y} - v\left(\frac12+\sigma,y\right)\frac{\partial u\left(\frac12+\sigma,y\right)}{\partial y}\right] dy}{\left[u^2\left(\frac12+\sigma,y\right) + v^2\left(\frac12+\sigma,y\right)\right]}$$

$$= \int_{-T}^{T} \frac{\left[\frac{\partial u(\frac12+\sigma,y)}{\partial x}u(\frac12+\sigma,y) + v(\frac12+\sigma,y)\frac{\partial v(\frac12+\sigma,y)}{\partial x}\right] dy}{[u^2(\frac12+\sigma,y) + v^2(\frac12+\sigma,y)]} = \int_{-T}^{T} \left[\frac{\partial}{\partial x}\ln|g(x+iy)|\right]\Bigg|_{x=\frac12+\sigma} dy.$$

Здесь символ $\left[\frac{\partial}{\partial x}\ln|g(x+iy)|\right]_{x=\frac12+\sigma}$ означает, что вначале находится обычная частная производная $\frac{\partial}{\partial x}\ln|g(x+iy)|$, а затем в полученном выражении x заменяется на $\frac12+\sigma$.

Аналогично

$$\int\limits_{\Gamma_3} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = \int\limits_{\frac12+\sigma}^{\frac12-\sigma} \frac{[u(x,T)-iv(x,T)]}{[u^2(x,T)+v^2(x,T)]}\left[\frac{\partial u(x,T)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,T)}{\partial x}\right]dx;$$

$$\operatorname{Im}\int\limits_{\Gamma_3} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = \int\limits_{\frac12+\sigma}^{\frac12-\sigma} \frac{\left[u(x,T)\frac{\partial v(x,T)}{\partial x} - v(x,T)\frac{\partial u(x,T)}{\partial x}\right]}{[u^2(x,T)+v^2(x,T)]}\,dx = -\int\limits_{\frac12+\sigma}^{\frac12-\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial y}\ln|g(x+iy)|\right]\Bigg|_{y=T} dx.$$

Следовательно (см., например, [1, гл. II, п. 12, стр. 43]),

$$\operatorname{Im}\int\limits_{\Gamma_2} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz + \operatorname{Im}\int\limits_{\Gamma_3} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = \int\limits_{\frac12+\sigma-iT}^{\frac12-\sigma+iT} -\frac{\partial W}{\partial y}\,dx + \frac{\partial W}{\partial x}\,dy$$
$$= \mu\left(\frac12-\sigma+iT\right) - \mu\left(\frac12+\sigma-iT\right),$$

где $W(x,y) := \ln|g(x+iy)|$, а $\mu(x,y)$ — любая функция из множества $\mathscr{M}_g$ гармонических и сопряженных (в $\mathscr{G}_g$) с $\ln|g(x+iy)|$ функций. Таким образом, равенство (1) можно переписать следующим образом:

$$(\forall\, g \in \mathscr{K}_0)\,(\forall\, \sigma \in (h_1,h))\,(\forall\, T \in \Phi_g)\,(\forall\, \mu \in \mathscr{M}_g)$$

$$-\mathscr{P}_g + \mathscr{N}_g(T) + 2\mathscr{N}_g(T,\sigma)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\int\limits_{FDC} \frac{b_g'(z)}{b_g(z)}\,dz + \frac{1}{\pi}\left[\mu\left(\frac12-\sigma+iT\right) - \mu\left(\frac12+\sigma-iT\right)\right]. \quad (2)$$

Здесь FDC — спрямляемая кривая, состоящая из двух прямолинейных отрезков $[F,D]$ и $[D,C]$, с началом в точке $F = \frac12 - \sigma + iT$ и концом — в точке $C := \frac12 + \sigma - iT$.

Основная цель данной работы заключается в том, чтобы попытаться выразить величины $\mathscr{P}_g$, $\mathscr{N}_g(T)$ и $\mathscr{N}_g(T,\sigma)$ через какие-то характеристики, непосредственно связанные с «множителем Римана» $b_g(z)$. В следующем параграфе делается первый шаг в решении поставленной задачи.

3. Определение числа $\mathscr{P}_g$

Пусть, как выше, $\sigma \in (h_1,h)$, а T — положительная g-регулярная ордината. Кроме введенных точек A, C, D, F, B, E рассмотрим еще точку $O := \left\{\frac12\right\}$. Проведем простую спрямляемую кривую γ_1 с начальной точкой F и конечной — O так, чтобы все остальные точки кривой γ_1 принадлежали внутренности S прямоугольного треугольника FOE. При этом кривую γ_1 проведем настолько близко к отрезку $[F,0]$, что все возможные нули (если они есть) функции $g(z)$, принадлежащие замкнутой области, ограниченной кривой γ_1 и сегментом $[F,0]$, находятся лишь на $[F,0]$.

Проведем еще кривую γ_2 с началом в O и концом в C, симметричную с γ_1 относительно точки O. Тогда γ_2 — простая спрямляемая кривая, все точки которой, кроме начальной и конечной, лежат внутри треугольника OBC. Кривую γ_2 можно взять настолько близко к $[O,C]$ (за счет приближения γ_1 к $[F,O]$), что $g(z) \neq 0$ в области, ограниченной $\gamma_2 \cup [OC]$.

Положим $\gamma := \gamma_1 \cup \gamma_2$. Согласно теории вычетов

$$2\pi\left[-\mathscr{P}_g + \frac{\mathscr{N}_g(T)}{2} + \mathscr{N}_g(T,\sigma)\right] = \operatorname{Im}\int\limits_C^D \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz + \operatorname{Im}\int\limits_D^F \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz + \operatorname{Im}\int\limits_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz,$$

или, преобразуя последний интеграл и учитывая, что

$$\frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{g'(1-z)}{g(1-z)} = \frac{b_g'(z)}{b_g(z)} \quad (\forall\, z \in \gamma_2),$$

$$2\pi[-2\mathscr{P}_g + \mathscr{N}_g(T) + 2\mathscr{N}_g(T,\sigma)] = 2\operatorname{Im}\int\limits_C^D \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz + 2\operatorname{Im}\int\limits_D^F \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz + 2\operatorname{Im}\int\limits_{\Gamma_2} \frac{b_g'(z)}{b_g(z)}\,dz.$$

Таким образом,

$$(\forall\, \sigma \in (h_1, h)\,(\forall\, T \in \Phi_g)\,(\forall\, g \in \mathscr{K}_0)$$

$$\begin{aligned} &-2\mathscr{P}_g + \mathscr{N}_g(T) + 2\mathscr{N}_g(T,\sigma) \\ &\qquad = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\int\limits_C^D \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz + \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\int\limits_D^F \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz + \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\int\limits_O^C \frac{b_g'(z)}{b_g(z)}\,dz. \end{aligned} \tag{3}$$

Если теперь вычесть (3) из (1), то мы придем к равенству

$$\mathscr{P}_g = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\int\limits_{FDC} \frac{b_g'(z)}{b_g(z)}\,dz + \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\int\limits_C^O \frac{b_g'(z)}{b_g(z)}\,dz. \tag{4}$$

Формула (4) показывает, что значение $\mathscr{P}_g$ является определенным оператором (функционалом) от $b_g(z)$. Ей можно придать более компактный вид. Предварительно обозначим символом $\tilde{\mathscr{P}}_g$ сумму порядков всех полюсов функции $b_g(z)$ из полосы $\overline{\mathscr{E}}_{\frac12 - h}^{\frac12 + h_1}$ (согласно исходным предложениям, все эти полюсы принадлежат промежутку $\left(\frac12, \frac12 + h_1\right]$). Тогда

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int\limits_{FDC} \frac{b_g'(z)}{b_g(z)}\,dz + \operatorname{Im}\int\limits_C^O \frac{b_g'(z)}{b_g(z)}\,dz \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int\limits_{FDCOF} \frac{b_g'(z)}{b_g(z)}\,dz + \operatorname{Im}\int\limits_C^O \frac{b_g'(z)}{b_g(z)}\,dz + \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int\limits_{FOC} \frac{b_g'(z)}{b_g(z)}\,dz = \pi(\tilde{\mathscr{P}}_g - \tilde{\mathscr{N}_\sigma}(T,\sigma). \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\mathscr{N}_\sigma}(T,\sigma)$ — сумма кратностей всех возможных нулей $b_g(z)$, которые могут находиться в промежутке вещественной оси $\left[\frac12 + h_1, \frac12 + \sigma\right)$, который лежит внутри треугольника FDC. Таким образом, $\mathscr{P}_g = \tilde{\mathscr{P}}_g - \tilde{\mathscr{N}_\sigma}(T,\sigma)$.

4. Определение величин $\mathscr{N}_g(T)$ и $\mathscr{N}_g(T,\sigma)$. Основное соотношение для класса $\mathscr{K}_0$

Пусть $\sigma \in (h_1, h)$, $g \in \mathscr{K}_0$. Из обычной теоремы единственности для аналитической функции следует в данном случае (с учетом описанных выше свойств функций из класса $\mathscr{K}_0$), что множество Φ_g всех g-регулярных ординат всюду плотно в $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, а множество Ψ_g всех g-нерегулярных ординат можно всегда представить в виде $\{\pm t_n\}_{n=1}^N$, где $1 \leqslant N \leqslant \infty$ и $t_n \uparrow +\infty$ при $N = +\infty$. Зафиксируем какую-либо g-нерегулярную ординату τ_0 (без потери общности можно считать, что $0 < \tau_0$) и найдем две последовательности $\{T_k^{(j)}\}_{k=1}^\infty$, $j = 1, 2$, g-регулярных ординат такие, что при $k \to \infty$ $T_k^{(1)} \uparrow \tau_0$, $T_k^{(2)} \downarrow \tau_0$, причем в интервале $(T_1^{(1)}, T_1^{(2)})$ (а, следовательно, и в любом интервале $(T_k^{(1)}, T_k^{(2)})$, $k \geqslant 1$) g-нерегулярных ординат, кроме τ_0, нет. Положим при $k = 1, 2, 3, \ldots$, $j = 1, 2$,

$$A_k^{(j)} := \left(\frac{1}{2} - \sigma - iT_k^{(j)}\right), \quad C_k^{(j)} := \left(\frac{1}{2} + \sigma - iT_k^{(j)}\right),$$

$$D_k^{(j)} := \left(\frac{1}{2} + \sigma + iT_k^{(j)}\right), \quad F_k^{(j)} := \left(\frac{1}{2} - \sigma + iT_k^{(j)}\right)$$

и воспользуемся формулой (2), согласно которой при $T = T_k^{(j)}$

$$\begin{aligned} &- \mathscr{P}_g + \mathscr{N}_g(T_k^{(j)}) + 2\mathscr{N}_g(T_k^{(j)}, \sigma) \\ &\qquad = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int\limits_{F_k^{(j)} D_k^{(j)} C_k^{(j)}} \frac{b_g'(z)}{b_g(z)}\, dz + \frac{1}{\pi}\left[\mu\left(\frac{1}{2} - \sigma + iT_k^{(j)}\right) - \mu\left(\frac{1}{2} + \sigma - iT_k^{(j)}\right)\right] \end{aligned}$$

(здесь, как и раньше, $\mu(x, y)$ — произвольная функция из множества $\mathscr{M}_g$). Отсюда при любом $k \geqslant 1$

$$\begin{aligned} &N_g(T_k^{(2)}) - N_g(T_k^{(1)}) + 2\left[N_g(T_k^{(2)}, \sigma) - N_g(T_k^{(1)}, \sigma)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\operatorname{Im} \int\limits_{F_k^{(2)} D_k^{(2)} C_k^{(2)}} \frac{b_g'(z)}{b_g(z)}\, dz - \operatorname{Im} \int\limits_{F_k^{(1)} D_k^{(1)} C_k^{(1)}} \frac{b_g'(z)}{b_g(z)}\, dz\right] \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\left[\mu\left(\frac{1}{2} - \sigma + iT_k^{(2)}\right) - \mu\left(\frac{1}{2} - \sigma + iT_k^{(1)}\right)\right] \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\left[\mu\left(\frac{1}{2} + \sigma - iT_k^{(1)}\right) - \mu\left(\frac{1}{2} + \sigma - iT_k^{(2)}\right)\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Если номер $k \geqslant 1$ неограниченно возрастает, то левая часть равенства (5) стремится к конечному числу $2\alpha_0 + 4\beta_0$, где $\alpha_0 = \alpha_0(g)$ — кратность возможного нуля $g(z)$ вида $\frac{1}{2} + i\tau_0$, а $\beta_0 = \beta_0(g)$ — сумма кратностей всех (также возможных) нулей той же функции $g(z)$, имеющих вид $\frac{1}{2} + x + i\tau_0$, $0 < x \leqslant h_1$. Но тогда и правая часть равенства (5) должна стремиться к тому же пределу $2\alpha_0 + 4\beta_0$, какова бы ни была функция μ из $\mathscr{M}_g$). При этом величины α_0 и β_0 могут принимать лишь значения $1, 2, \ldots$ — и всегда (так как $\tau_0 \in \Psi_g$) $2\alpha_0 + 4\beta_0 \geqslant 2$.

Преобразуем теперь первое слагаемое правой части равенства (5). Имеем

$$\nu := \int\limits_{F_k^{(2)} D_k^{(2)} C_k^{(2)}} \frac{b_g'(z)}{b_g(z)}\, dz - \int\limits_{F_k^{(1)} D_k^{(1)} C_k^{(1)}} \frac{b_g'(z)}{b_g(z)}\, dz = \int\limits_{F_k^{(2)} D_k^{(2)} D_k^{(1)}} (\cdot)\, dz + \int\limits_{D_k^{(1)}}^{F_k^{(1)}} (\cdot)\, dz + \int\limits_{C_k^{(1)}}^{C_k^{(2)}} (\cdot)\, dz.$$

Здесь и далее $(\cdot) = \frac{b_g'(z)}{b_g(z)}$. Отсюда

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \nu &= \operatorname{Im} \int\limits_{F_k^{(2)} D_k^{(2)} D_k^{(1)} F_k^{(1)} F_k^{(2)}} (\cdot)\, dz + \operatorname{Im} \int\limits_{F_k^{(2)}}^{F_k^{(1)}} (\cdot)\, dz + \operatorname{Im} \int\limits_{C_k^{(1)}}^{C_k^{(2)}} (\cdot)\, dz \\
&= \operatorname{Im} \int\limits_{F_k^{(2)} D_k^{(2)} D_k^{(1)} F_k^{(1)} F_k^{(2)}} (\cdot)\, dz + \operatorname{Im} \int\limits_{F_k^{(2)}}^{F_k^{(1)}} \left[\frac{b_g'(z)}{b_g(z)} + \frac{b_g'(1-z)}{b_g(1-z)} \right] dz \\
&= \operatorname{Im} \int\limits_{F_k^{(2)} D_k^{(2)} D_k^{(1)} F_k^{(1)} F_k^{(2)}} (\cdot)\, dz + 2 \operatorname{Im} \int\limits_{F_k^{(2)}}^{F_k^{(1)}} \frac{b_g'(z)}{b_g(z)}\, dz = 2 \operatorname{Im} \int\limits_{F_k^{(2)}}^{F_k^{(1)}} \frac{b_g'(z)}{b_g(z)}\, dz = -2 \operatorname{Im} \int\limits_{F_k^{(1)}}^{F_k^{(2)}} \frac{b_g'(z)}{b_g(z)}\, dz.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{F_k^{(1)}}^{F_k^{(2)}} \frac{b_g'(z)}{b_g(z)}\, dz = 0$, из (5) получим

$$\begin{aligned}
2\pi(\alpha_0 + 2\beta_0) = \lim_{k\to\infty} \Bigg\{ &\left[\mu\left(\frac{1}{2} - \sigma + iT_k^{(2)}\right) - \mu\left(\frac{1}{2} + \sigma - iT_k^{(2)}\right) \right] \\
&+ \left[\mu\left(\frac{1}{2} + \sigma - iT_k^{(1)}\right) - \mu\left(\frac{1}{2} - \sigma + iT_k^{(1)}\right) \right] \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{6}$$

При этом соотношение (6) справедливо для любой функции $\mu(x, y)$ из $\mathscr{M}_g$, если $g \in \mathscr{K}_0$ и $\sigma \in (h_1, h)$. Этим обстоятельством можно воспользоваться и, подбирая подходящим образом функцию μ, получим из (6) достаточно хорошие оценки сверху для положительной величины $\alpha_0 + 2\beta_0$. Изложению полученных на этом пути результатов предполагается посвятить отдельную статью.

5. Один подкласс класса $\mathscr{K}_0$, связанный с общими рядами Дирихле

Обозначим символом $\mathscr{K}_1$ множество всех функций $g(z)$, обладающих следующими свойствами:

0) $g(z)$ является суммой ряда Дирихле $g_1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} g_k e^{-\lambda_k z}$, имеющего конечную абсциссу a_g абсолютной сходимости (т. е. $a_g < +\infty$); при этом для любого $k \geqslant 1$ $g_k \in \mathbb{C}$, $g_k = g_k(g)$, $g_1 \neq 0$; $a_g \in [\frac{1}{2}, +\infty)$;

1) $\forall\, z \in \mathscr{E}_{a_g}$ $g(\bar{z}) = \overline{g(z)}$;

2) $\forall\, k \geqslant 2$ $\quad \lambda_k = \lambda_k(g) \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ и $0 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_k \uparrow +\infty$;

3) функция $g(z)$ аналитически продолжается из $\mathscr{E}_{a_g}$ в $\overline{\mathscr{E}}_{\frac{1}{2}-h}$, где $h = h(g)$ — какое-либо число из интервала $(x_0 - \frac{1}{2}, +\infty)$, а x_0 — (единственный) вещественный корень уравнения $|g_1| = \sum_{k=2}^{\infty} |g_k| e^{-\lambda_k x}$; при этом (продолженная) функция $g(z)$ аналитична во всех точках

замкнутой полуплоскости $\overline{\mathscr{E}}_{\frac{1}{2}-h}$, за исключением, быть может, конечного числа точек, расположенных в промежутке $(\frac{1}{2}, x_0]$ и являющихся полюсами $g(z)$;

4) функция $g(z)$ отлична от нуля во всех точках сегмента $[\frac{1}{2}-h, x_0]$, в которых она аналитична;

5) в замкнутой полосе $\overline{\mathscr{E}}_{\frac{1}{2}-h}^{\frac{1}{2}+h}$ функция $g(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению $g(z) = b_g(z)g(1-z)$, причем функция $b_g(z)$ удовлетворяет условиям 6) и 7) из § 1, в которых $h_1 = x_0 - \frac{1}{2}$.

Из определения класса $\mathscr{K}_1$ следует, что $\mathscr{K}_1 \subseteq \mathscr{K}_0$. Поэтому для функций из класса $\mathscr{K}_1$ справедливы все результаты, полученные в §§ 2–4.

Может быть, самым интересным конкретным примером функции из класса $\mathscr{K}_1$ является дзета-функция Римана $\zeta(z)$. Как хорошо известно (см., например, [3, 4]), она регулярна в кольце $0 < |z-1| < +\infty$, имеет в точке $z = 1$ простой полюс и в полуплоскости $\mathscr{E}_1$ является суммой обыкновенного ряда Дирихле:

$$\zeta(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-z} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} 1 \cdot e^{-z \ln n},$$

для которого $a_\zeta = 1$, $x_0^{(\zeta)} \in (1, 2)$ — корень уравнения $1 = \sum_{n=2}^{\infty} n^{-x}$, $b_\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1} \sin \frac{\pi z}{2} \Gamma(1-z)$. В данном случае можно положить $h_1 = h_1(\zeta) = x_0^{(\zeta)} - \frac{1}{2}$, а в качестве $h = h(\zeta)$ взять любое число из интервала $(h_1, \frac{5}{2})$. Можно также положить $h_1(\zeta) = a_\zeta = 1$, а в качестве $h(\zeta)$ взять любое число из интервала $(1, \frac{5}{2})$. При сделанном выборе чисел h и h_1 «множитель Римана» $b_\zeta(z)$ удовлетворяет условиям 6)–7) из § 1, откуда $\zeta(z) \in \mathscr{K}_1$. Следовательно, для дзета-функции справедливы все результаты из §§ 2–4 и, в частности, соотношения (1)–(6), в которых надо положить $g(z) = \zeta(z)$, $b_g(z) = 2(2\pi)^{z-1} \sin \frac{\pi z}{2} \Gamma(1-z)$.

Литература

1. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций.—М.: ГИФМЛ, 1961.—335 с.
2. *Евграфов М. А.* Аналитические функции.—М.: Наука, 1968.—471 с.
3. *Титчмарш Е. К.* Теория дзета-функции Римана.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953.—407 с.
4. *Edwards H. M.* Riemann's Zeta Function.—N. Y.: Dover Publications, Inc. Minnesota, 2001.—315 p.

Статья поступила 23 октября 2016 г.

Коробейник Юрий Федорович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
главный научный сотрудник отдела математического анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: kor@math.rsu.ru

ON DISTRIBUTION OF ZEROS FOR A CLASS OF MEROMORPHIC FUNCTIONS

Korobeĭnik Yu. F.

In this article some class $\mathscr{K}_0$ of meromorphic functions is introduced. Each function $y(z)$ from $\mathscr{K}_0$ satisfies the functional equation $y(z) = b_y(z)y(1-z)$ with its own «Riemann's multiplier» $b_y(z)$ which is a meromorphic function with real zeros and poles. All poles of an arbitrary function from $\mathscr{K}_0$ are real and belong to the interval $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+h_1]$, $h_1 = h_1(y)$. Using the theory of residues we prove some relation connecting the following magnitudes: $\mathscr{P}_y$, the sum of all orders of poles of $y \in \mathscr{K}_0$; $\mathscr{N}_y(T)$, the sum of multiplicities of all zeros of y having the form $\frac{1}{2}+i\tau$, $|\tau| < T$; $\mathscr{N}_y(T,\sigma)$, the sum of multiplicities of all zeros of y which lies inside the rectangle with vertices $A = \frac{1}{2}-\sigma-iT$, $C = \frac{1}{2}+\sigma-iT$, $D = \frac{1}{2}+\sigma+iT$, $F = \frac{1}{2}-\sigma+iT$. Here T is a y-regular ordinate, that is, $y(z)$ is analytic and has no zeros on the line $\operatorname{Im} z = T$, $\operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$, $\sigma \in (h_1, h)$, $h = h(y)$, σ is chosen in such a manner that $y(z) \neq 0$ on the segments $[F, A]$ and $[C, D]$. The problem of finding the magnitudes of $\mathscr{P}_y$, $\mathscr{N}_y(T)$ and $\mathscr{N}_y(T,\sigma)$ with the help of corresponding characteristics of the «Riemann's multiplier» $b_y(z)$ is posed. This problem is solved in the paper for $\mathscr{P}_y$. Moreover, the obtained equality enables one to deduce a definite relation the left part of which contains the number $2\alpha_{T_0} + 4\beta_{T_0}$ where T_0 is arbitrary y-nonregular ordinate, α_{T_0} is the multiplicities of all possible zero of y of the form $\frac{1}{2}+iT_0$, β_{T_0} is the sum of multiplicities of all possible zeros of y belonging to $\frac{1}{2}+iT_0, +\infty+iT_0$. It is proved that the class $\mathscr{K}_0$ contains the Riemann's Zeta-Function.

Key words: zeros of meromorphic functions, functional equation.