Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 1, С. 67–71

УДК **517.55**

МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛОГ ГИПОТЕЗЫ БИБЕРБАХА ДЛЯ ОБОБЩЕННО ЗВЕЗДНЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$

М. Д. Султыгов

В статье рассматривается одно из дополнений к фундаментальным результатам геометрической теории многомерного комплексного анализа по проблемам классов голоморфных функций. По радиусам параметризации границ областей Рейнхарта строятся эффективные достаточные условия обобщенно-звездных функций в виде многомерного аналога гипотезы Бибербаха.

Ключевые слова: однолистная функция, многомерный аналог гипотезы Бибербаха, эффективность коэффициентов Тейлора, радиус параметризации.

В 1916 г. Л. Бибербахом [1] была высказана знаменитая гипотеза: $|c_n| \leqslant n$, $n = 2, 3, \dots$, имеет место для всех регулярных и однолистных в единичном круге $|z| < 1$ функций $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$.

Гипотеза привлекала внимание многих математиков, и при попытке доказать ее были развиты многие методы геометрической теории функций комплексного переменного [2], однако доказательство гипотезы было получено лишь в 1985 г. французским математиком Л. де Бранжем [3].

Цель статьи — построить эффективные достаточные условия для обобщенно-звездных функций в виде многомерного аналога гипотезы Бибербаха для областей Рейнхарта. Результаты статьи дополняют многочисленные точные оценки тейлоровых коэффициентов в различных подклассах изучаемого класса. Исследуемый класс содержит ранее известные класс звездных функций M_D [4], класс $M_D(a,b)$ [5] и др.

История вопроса. В работе И. И. Баврина (см., например, [4]) введены и изучаются класс обобщенно однолистных функций Q_D, и различные его подклассы M_D, N_D и другие с точки зрения оценок тейлоровых коэффициентов разложения функций этих классов в двойные степенные ряды. Используя решение Л. де Бранжем проблемы Бибербаха для функций S одной комплексной переменной, И. И. Баврин решил в положительном смысле для функций класса Q_D [4] многомерный аналог проблемы Л. Бибербаха.

В оценки коэффициентов Тейлора класса Q_D входит величина $d_{mn}(D) = \sup(|w|^m|z|^n)$ для всех $(w,z) \in D \subset C^2$. Для конкретного вида области D важно уметь вычислить $d_{mn}(D)$. С целью получения эффективных оценок коэффициентов Тейлора возникает вопрос о выделении специальных классов областей D, для которых можно эффективно вычислить $d_{mn}(D)$. Пусть D_1 — та область D, граница которой дважды непрерывно дифференцируема и аналитически выпукла извне. Как доказал А. А. Темляков [7], границу этой области можно представить в следующем параметрическом виде:

$$|w| = r_1(\tau), \quad |z| = r_2(\tau), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1,$$

где $r_1(0)=0$, $r_1(1)<\infty$, $r_1'(\tau)>0$, $0<\tau\leqslant 1$, и $r_2(\tau)=R_2\exp\big[-\int_0^\tau \frac{\tau}{1-\tau}\,d\ln r_1(\tau)\big]$, R_2 — положительная постоянная, $r_2(1)=0$. Такое параметрическое представление области D_1 позволяет эффективно вычислить $d_{mn}(D_1)$ [6]:

$$d_{mn}(D_1)=r_1^m\left(\frac{m}{m+n}\right)r_2^n\left(\frac{m}{m+n}\right),\quad m+n>0,$$

считая $0^0=1$.

Заметим также, что если область D — бицилиндр $\{|w|<R_1,\ |z|<R_2\}$, то, очевидно, что $d_{mn}(D)=R_1^m\cdot R_2^n$. Итак, в случае тех областей D_1 и бицилиндра оценки коэффициентов Тейлора являются эффективными.

Остановимся более подробно на самом аналоге проблемы Бибербаха в случае двух комплексных переменных для класса Q_D [4]. Случай многих комплексных переменных рассматривается аналогично.

Приведем определение класса Q_D. Пусть D — ограниченная полная двоякокруговая область с центром в начале координат. Пусть в области D функция $f(w,z), f(0,0)=1$ голоморфна. Возьмем множество $D\cap\{z=k_0w\}$, где k_0 — фиксированное конечное число из всего множества комплексных чисел, т. е. множество, представляющее собой сечение области D аналитической плоскостью $z=k_0w$.

Скажем, что в сечении $D\cap\{z=k_0w\}$ функция $wf(w,z)$ однолистна, если функция $wf(w,k_0w)$ как функция одного комплексного переменного w однолистна в соответствующем круге. Здесь под соответствующим кругом понимается проекция сечения $D\cap\{z=k_0w\}$ на плоскость $z=0$; если $k_0=0$, то это будет круг, который вырезает область D из плоскости $z=0$.

Обозначим через Q_D [4] класс голоморфных в области D функций $f(w,z), f(0,0)=1$, обладающих следующими свойствами:

1) в сечении области D каждой плоскостью из всевозможных аналитических плоскостей $z=kw$ функция $wf(w,z)$ однолистна;

2) в сечении $D\cap\{w=0\}$ функция $zf(0,z)$ однолистна.

Теорема 1 (аналог гипотезы Бибербаха) [4, теорема 14.1]**.** *Для функций* $f(w,z)=\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{l=0}^{k}a_{k-l,l}\,w^{k-l}z^l)\in Q_D$ *имеют место следующие оценки:*

$$A_k(D)=\sup_{(w,z)\in D}\sum_{l=0}^{k}|a_{k-l,l}|^2|w|^{2(k-l)}|z|^{2l}\leqslant(k+1)^2,\quad k>0,\tag{1}$$

$$B_k(D)=\sup_{(w,z)\in D}\left|\sum_{l=0}^{k}a_{k-l,l}w^{k-l}z^l\right|\leqslant k+1,\quad k>0.\tag{2}$$

Следствие 1 [4, теорема 14.1]**.** *Для функций* $f(w,z)=\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{mn}w^mz^n\in Q_D$ *имеют место оценки*

$$|a_{mn}|\leqslant\frac{m+n+1}{d_{mn}(D)},\quad m+n>0.\tag{3}$$

Заметим, что при переходе к однолистным функциям одного комплексного переменного оценка (3) с учетом веса [8, 9] переходит в оценку, фигурирующую в гипотезе Бибербаха.

Представим результаты автора.

Определение. *Обобщенным классом звездных функций* $M_D(A,B)$, $-1\leqslant B\leqslant A\leqslant 1$, назовем множество всех голоморфных в области $D\subset\mathbb{C}^n$ функций $f(z_1,\dots,z_n)=f(z)$, представимых рядом $f(z)=1+\sum_{|k|=1}^{\infty}a_k\,z^k$, где $|k|\stackrel{\mathrm{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}k_i$, $k!\stackrel{\mathrm{def}}{=}\prod_{i=1}^{n}k_i!$, и удовлетворяющих условию [4, 11]

$$\frac{\mathscr{R}_1 f(z)}{f(z)}=\frac{1+A\Theta(z)}{1+B\Theta(z)},\quad \Theta(z)\in S_D(0),$$

где $S_D(0)$ — класс голоморфных в области D функций Шура $f(z_1,z_2), f(0,0)=0$, для которых $|f(z_1,z_2)|<1$ в D [4]. Здесь $\mathscr{R}_\gamma[f(z)]=\gamma f(z)+\sum_{j=1}^{n}z_j\frac{\partial f(z)}{\partial z_j}$ [11]. Обратным к оператору $\mathscr{R}_\gamma[f(z)]$ является оператор $\mathscr{R}_\gamma^{-1}f(z)=\int_0^1\varepsilon^{\gamma-1}f(\varepsilon z_1,\dots,\varepsilon z_n)\,d\varepsilon$.

Интересным является класс голоморфных функций $M_D\left(\frac{b^2-a^2+a}{b},\frac{1-a}{b}\right)$, $a+b\geqslant 1$, $b\leqslant a\leqslant b+1$, для которого приведен и доказан критерий принадлежности:

$$f(z)=\sum_{|k|=0}^{\infty}a_k\,z^k\in M_D\left(\frac{b^2-a^2+a}{b},\frac{1-a}{b}\right).$$

Теорема 2 [12]**.** *Функция* $f(z)\in M_D\left(\frac{b^2-a^2+a}{b},\frac{1-a}{b}\right)$ *тогда и только тогда, когда*

$$f(z_1,z_2)=\exp\int\limits_0^1\frac{ch(\varepsilon z_1,\varepsilon z_2)}{b+(1-a)h(\varepsilon z_1,\varepsilon z_2)}\cdot\frac{d\varepsilon}{\varepsilon},$$

где $c=b^2-(a-1)^2$ *и* $h(z_1,z_2)\in S_D(0)$, *для которых* $|h(z_1,z_2)|\leqslant 1$ *в* D.

Приведем достаточное условие принадлежности $f(z_1,z_2)\in M_D(A,B)$, $-1\leqslant B\leqslant A\leqslant 1$ в виде многомерного аналога гипотезы Бибербаха [1] и укажем эффективность.

Как было ранее установлено [13], в классе функций $f(z_1,z_2)\in M_D(A,B)$ оценки коэффициентов Тейлора $|a_{k_1,k_2}(f:D)|$ имеют вид

$$\left|a_{k_1,k_2}(f:D)\right|\leqslant\begin{cases}\frac{A-B}{d_{k_1,k_2}(f:D)}, & |k|>0,\ -1\leqslant B\leqslant A\leqslant 1;\\ \frac{\prod_{j=2}^{|k|+1}[A-(j-1)B]}{|k|!\,d_{k_1,k_2}(f:D)}, & A-|k|B\geqslant |k|-1,\ |k|\geqslant 2;\\ \frac{A-B}{|k|!\,d_{k_1,k_2}(f:D)}, & A-2B\leqslant 1,\ |k|\leqslant 2;\\ \frac{\prod_{j=2}^{|k|+1}[A-(j-1)B]}{|k|(|k|-2)!\,d_{k_1,k_2}(f:D)}, & A-|k|B<|k|-1,\ |k|\leqslant 3.\end{cases}$$

Теорема 3. *Для функций* $f(z_1,z_2)\in M_{U^2_{R_1,R_2}}(A,B)$ *в бицилиндре эффективные оценки коэффициентов Тейлора имеют вид*

$$\left|a_{k_1,k_2}\left(f:U^2_{R_1,R_2}\right)\right|\leqslant\begin{cases}\frac{A-B}{R_1^{k_1}R_2^{k_2}}, & |k|>0,\ -1\leqslant B\leqslant A\leqslant 1;\\ \frac{\prod_{j=2}^{|k|+1}[A-(j-1)B]}{|k|!\,R_1^{k_1}R_2^{k_2}}, & A-|k|B\geqslant |k|-1,\ |k|\geqslant 2;\\ \frac{A-B}{|k|!\,R_1^{k_1}R_2^{k_2}}, & A-2B\leqslant 1,\ |k|\leqslant 2;\\ \frac{\prod_{j=2}^{|k|+1}[A-(j-1)B]}{|k|(|k|-2)!\,R_1^{k_1}R_2^{k_2}}, & A-|k|B<|k|-1,\ |k|\leqslant 3.\end{cases}$$

Теорема 4. *Для функций $f(z_1,z_2)\in M_{K_1}(A,B)$ в гиперконусе $K_1=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2: |z_1|+|z_2|<1\}$, где граница этой области представима в параметрическом виде*

$$d_{K_1}=\left\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:\ |z_1|=\tau,\ |z_2|=1-\tau,\ 0\leqslant\tau\leqslant 1\right\},$$

$$d_{k_1,k_2}(f:K_1)=\left(\frac{k_1}{k_1+k_2}\right)^{k_1}\left(\frac{k_2}{k_1+k_2}\right)^{k_2},$$

эффективные оценки коэффициентов Тейлора имеют вид

$$\left|a_{k_1,k_2}(f:K_1)\right|\leqslant\begin{cases}\frac{|k|^{|k|}(A-B)}{k_1^{k_1}k_2^{k_2}}, & |k|>0,\ -1\leqslant B\leqslant A\leqslant 1;\\ \frac{|k|^{|k|}\left\{\prod_{j=2}^{|k|+1}[A-(j-1)B]\right\}}{|k|!k_1^{k_1}k_2^{k_2}}, & A-|k|B\geqslant|k|-1,\ |k|\geqslant 2;\\ \frac{|k|^{|k|}(A-B)}{|k|!k_1^{k_1}k_2^{k_2}}, & A-2B\leqslant 1,\ |k|\leqslant 2;\\ \frac{|k|^{|k|}\left\{\prod_{j=2}^{|k|+1}[A-(j-1)B]\right\}}{|k|(|k|-2)!k_1^{k_1}k_2^{k_2}}, & A-|k|B<|k|-1,\ |k|\leqslant 3.\end{cases}$$

В качестве последнего примера приведем аналог гипотезы Бибербаха в логарифмически выпуклой ограниченной полной двоякокруговой области

$$D_{p,q}\stackrel{\rm def}{=}\left\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:\ |z_1|^p+|z_2|^q<1;\ p=\frac{m}{n},\ m,n,q\in\mathbb{N}\right\}.$$

Отметим, что $D_{p,q}\in(T)$ тогда и только тогда, когда $p\geqslant 1$.

Теорема 5. *Для функций $f(z_1,z_2)\in M_{D_{p,q}}(A,B)$ в логарифмически выпуклой ограниченной полной двоякокруговой области $D_{p,q}$ эффективные оценки коэффициентов Тейлора имеют вид*

$$|a_{k_1,k_2}(f:D_{p,q})|\leqslant\begin{cases}\frac{(k_1q+k_2p)^{\frac{k_1q+k_2p}{pq}}(A-B)}{(k_1q)^{\frac{k_1}{p}}(k_2p)^{\frac{k_2}{q}}}, & -1\leqslant B\leqslant A\leqslant 1;\\ \frac{(k_1q+k_2p)^{\frac{k_1q+k_2p}{pq}}\left\{\prod_{j=2}^{|k|+1}[A-(j-1)B]\right\}}{|k|!(k_1q)^{\frac{k_1}{p}}(k_2p)^{\frac{k_2}{q}}}, & A-|k|B\geqslant|k|-1,\ |k|\geqslant 2;\\ \frac{(k_1q+k_2p)^{\frac{k_1q+k_2p}{pq}}(A-B)}{|k|!(k_1q)^{\frac{k_1}{p}}(k_2p)^{\frac{k_2}{q}}}, & A-2B\leqslant 1,\ |k|\leqslant 2;\\ \frac{(k_1q+k_2p)^{\frac{k_1q+k_2p}{pq}}\left\{\prod_{j=2}^{|k|+1}[A-(j-1)B]\right\}}{|k|(|k|-2)!(k_1q)^{\frac{k_1}{p}}(k_2p)^{\frac{k_2}{q}}}, & A-|k|B<|k|-1, |k|\leqslant 3.\end{cases}$$

Доказательство теорем 3–5 проводится по схеме теоремы 1 из [4] с использованием соответствующих оценок работы [14].

Литература

1. *Bieberbach L.* Uber die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildug des Einheitskreises vermitteln // S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl.—1916.—P. 940–955.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного.—М.: Наука, 1966.—628 с.
3. *De Branges L.* A proof of the Bieberbach conjecture // Acta Math.—1985.—№ 154.—P. 137–152.
4. *Баврин И. И.* Операторный метод в комплексном анализе.—М.: Прометей, 1991.—200 с.

5. *Султыгов М. Д.* Об одном подклассе класса M_D функций двух комплексных переменных // МОПИ им. Н. К. Крупской.—М., 1982.—14 с. Деп. В ВИНИТИ, № 828-82.
6. *Баврин И. И.* Оценки коэффициентов Тейлора функций двух комплексных переменных // Докл. АН СССР.—1960.—Т. 131, № 6.—С. 1231–1233.
7. *Темляков А. А.* Интегральные представления функций двух комплексных переменных // Докл. АН СССР.—1958.—Т. 120, № 5.—С. 976–979.
8. *Баврин И. И.* Функции, однолистные с весом // Докл. АН.—1996.—Т. 349, № 6.—С. 727–728.
9. *Баврин И. И.* Классы функций, однолистных с весом // Докл. АН.—2000.—Т. 371, № 6.—С. 727–729.
10. *Султыгов М. Д.* Звездно-выпуклые функции многих комплексных переменных в пространстве Рейнхарта // Сб. науч. тр. ИнгГУ.—Нальчик, 2004.—№ 2.—С. 333–362.
11. *Баврин И. И.* Классы голоморфных функций многих комплексных переменных и экстремальные вопросы для этих классов функций.—М.: Изд-во МОПИ, 1976.—99 с.
12. *Султыгов М. Д.* Интегральные представления некоторых классов голоморфных функций в пространстве многих комплексных переменных. Сер. 1. // Изв. Чеченского гос. пед. ин-та.—2015.—№ 2 (10).—С. 19–23.
13. *Султыгов М. Д.* Коэффициенты Тейлора для некоторых классов голоморфных функций многих комплексных переменных // Сб. науч. тр. ИнгГУ.—Магас, 2008.—№ 6.—С. 165–173.
14. *Goel R. M., Mehrok B. S.* On the coefficients of a subclass of starlike functions // Indian J. Pure Appl. Math.—1981.—Vol. 12 (5).—P. 634–647.

Статья поступила 12 мая 2016 г.

Султыгов Магомет Джабраилович
Ингушский государственный университет,
профессор кафедры математики
РОССИЯ, 386132, Магас, проспект Зязикова, 7
E-mail: magomet.sultygov@mail.ru

THE MULTIDIMENSIONAL ANALOG OF THE BIBERBACH HYPOTHESIS FOR GENERALIZED STAR FUNCTIONS IN THE SPACE $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$

Sultygov M. G.

The article is an addition to the fundamental results of the geometric theory of multidimensional complex analysis problems for classes of holomorphic functions. The radii parameterization of the Reinhart region boundaries enables one to built effective sufficient conditions for the generalized star functions as a multivariate analogue of the Biberbach hypothesis.

Key words: univalent functions, multidimensional analogue of the Biberbach hypothesis, efficiency coefficients, Taylor series, radius parameterization.