Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 2, С. 11–17

УДК **519.17**

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$[1]

А. К. Гутнова, А. А. Махнев

В работе найдены возможные порядки и строение подграфов неподвижных точек автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, симметричный граф, дистанционно регулярный граф, группа автоморфизмов графа.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$. Тогда число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*). Если Γ — граф диаметра d, то через Γ_i, где $i \leqslant d$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ $(\Gamma_{i-1}(u))$ с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа $b_0 = k$ — это степень графа, $c_1 = 1$. Дистанционно регулярный граф Γ диаметра 2 называется *сильно регулярным* с параметрами (v, k, λ, μ), где $\lambda = a_1, \mu = c_2$.

Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются *числами пересечений графа* Γ.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 с собственными значениями $\theta_0 > \theta_1 > \theta_2 > \theta_3$. Если $\theta_2 = -1$, то по предложению 4.2.17 из [1] граф Γ_3 сильно регулярен и Γ — антиподальный граф тогда и только тогда, когда Γ_3 — коклика.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда, проект № 15-11-10025 (теорема 1) и соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (следствие 1).

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом и графы Γ_2, Γ_3 сильно регулярны. Если $k < 44$, то Γ имеет массив пересечений $\{19,12,5;1,4,15\}$, $\{35,24,8;1,6,28\}$ или $\{39,30,4;1,5,36\}$. В первых двух случаях согласно [2, с. 211] и [3] граф не существует. В данной работе найдены возможные автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{39,30,4;1,5,36\}$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{39,30,4;1,5,36\}$. Тогда Γ имеет спектр $39^1, 9^{78}, -1^{117}, -6^{104}$ и $v = 1+39+234+26 = 300$ вершин.

Теорема 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39,30,4;1,5,36\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2,3,5,13\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω — пустой граф, либо $p = 5$, $\alpha_3(g) = 50s$ и $\alpha_2(g) = 75t$, либо $p = 3$, $\alpha_3(g) = 30s$ и $\alpha_2(g) = 45t$, либо $p = 2$, $\alpha_2(g) = 0$ и $\alpha_3(g) = 20s$;

(2) Ω является n-кликой, либо $p = 13$, $n = 1$, $\alpha_3(g) = 130s + 26$ и $\alpha_2(g) = 195t + 39$, либо $p = 2$, $n = 2,4,6$, $\alpha_3(g) = 20s - 4n$ и $\alpha_2(g) = 30t - 6n$;

(3) Ω состоит из m вершин, попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ, $p = 3$ и либо $m = 3$, $\alpha_3(g) = 30s - 12 \leqslant 180$, $s = 1,2,...,6$, $\alpha_2(g) = 45t - 18$, либо $m = 6$, $\alpha_3(g) = 6, 36$, $\alpha_2(g) = 45t - 36$;

(4) Ω содержит вершины b, c, находящиеся на расстоянии 2 в Γ, $p = 2,3$ и $|\Omega| \leqslant 60$.

Следствие 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39,30,4;1,5,36\}$, группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ, $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. Тогда 13 не делит $|G|$. В частности, G действует интранзитивно на множестве дуг графа Γ.*

Лемма 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39,30,4;1,5,36\}$ имеет следующие числа пересечений:*

(1) $p^1_{11} = 8$, $p^1_{12} = 30$, $p^1_{23} = 24$, $p^1_{22} = 180$, $p^1_{33} = 2$;

(2) $p^2_{11} = 5$, $p^2_{12} = 30$, $p^2_{13} = 4$, $p^2_{22} = 183$, $p^2_{23} = 20$, $p^2_{33} = 2$;

(3) $p^3_{12} = 36$, $p^3_{13} = 3$, $p^3_{23} = 18$, $p^3_{22} = 180$, $p^3_{33} = 4$.

$\lhd$ Вычисления с помощью леммы 4.1.7 из [1]. $\rhd$

Лемма 2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39,30,4;1,5,36\}$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) граф Γ_3 сильно регулярен с параметрами $(300,26,4,2)$ и спектром $26^1, 6^{117}, -4^{182}$;

(2) дополнительный граф Σ для Γ_2 сильно регулярен с параметрами $(300,65,10,15)$ и спектром $65^1, 5^{196}, -10^{103}$, окрестность вершины a в графе Σ имеет разбиение двумя регулярными подграфами: Δ_1 степени 7 на 26 вершинах и Δ_2 степени 8 на 39 вершинах, вершина из Δ_1 смежна с 3 вершинами из Δ_2, вершина из Δ_2 смежна с 2 вершинами из Δ_1;

(3) вершина из $\Sigma_2(a)$ смежна с 6 вершинами из Δ_1 и с 9 вершинами из Δ_2.

$\lhd$ Положим $\Delta = \bar{\Gamma}_3$. По замечанию после предложения 4.2.18 из [1] собственные значения графа Δ равны $(\theta^2+(c_2-a_1)\theta-k)/c_2$, когда θ пробегает множество собственных значений графа Γ. При $\theta = -1$ получим $\theta_2(\Delta) = -(b_1+c_2)/c_2$ и c_2 делит b_1.

Заметим, что $k(\Delta) = k + k_2 = k(1 + b_1/c_2)$ делится на $\theta_2(\Delta)$, поэтому Δ — псевдогеометрический граф для $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$. Отсюда Δ — псевдогеометрический граф для $pG_{36}(39,6)$ и граф Γ_3 сильно регулярен с параметрами $(300,26,4,2)$.

Далее, дополнительный граф Σ для Γ_2 сильно регулярен с параметрами $(300,65,10,15)$ и спектром 65^1, 5^{196}, -10^{103}.

Для вершины $a \in \Sigma$ подграф $\Gamma_3(a)$ индуцирует в Σ граф Δ_1 степени 7 на 26 вершинах и $\Gamma_1(a)$ индуцирует в Σ граф Δ_2 степени 8 на 39 вершинах. $\triangleright$

Лемма 3 [4, теорема 3.2]. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) и собственными значениями k, r, $-m$. Если g — автоморфизм Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, то $|\Omega| \leqslant v \cdot \max\{\lambda, \mu\}/(k - r)$.*

Пусть g — неединичный автоморфизм дистанционно регулярного графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Если Γ имеет массив пересечений $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$, то ввиду леммы 3 имеем $|\Omega| \leqslant 60$.

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathscr{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \geqslant 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p^l_{ij} A_l$ для чисел пересечений p^l_{ij}.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p^l_{ij}. Тогда собственные значения $p_1(0), \ldots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \ldots, m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/n_i$ соответственно, называются *первой и второй матрицей собственных значений схемы* и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда кратность m_j собственного значения $p_1(j)$ равна $v/\langle u_j, w_j\rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$ (см. [4, теорема 17.12]). Фактически, из доказательства теоремы 17.12 следует, что w_j являются столбцами матрицы P и $m_j u_j$ являются строками матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, \ldots, W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [5, § 3.7]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = n^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 4. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Если $g \in G$, χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 117, χ_3 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 104, то $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l, взаимно простого с $|g|$,*

$$\chi_2(g) = \frac{4\alpha_0(g) + \alpha_3(g)}{10 - 3}, \quad \chi_3(g) = \frac{6\alpha_0(g) + \alpha_2(g)}{15 - 16}.$$

Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_2(g) - 117$ и $\chi_3(g) - 104$ делятся на p.

$\lhd$ Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 78 & 18 & -2 & -12 \\ 117 & -3 & -3 & 27 \\ 104 & -16 & 4 & -16 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_2(g) = (39\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 9\alpha_3(g))/100$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 300 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/10 - 3$.

Далее, $\chi_3(g) = (26\alpha_0(g) - 4\alpha_1(g) + \alpha_2(g) - 4\alpha_3(g))/75$. Учитывая равенство $\alpha_0(g) + \alpha_1(g) + \alpha_2(g) + \alpha_3(g) = 300$, получим $\chi_3(g) = (6\alpha_0(g) + \alpha_2(g))/15 - 16$.

Остальные утверждения леммы следуют из [6, лемма 1]. $\rhd$

2. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$

До конца параграфа предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 5. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф, то либо $p = 5$, $\alpha_3(g) = 50s$ и $\alpha_2(g) = 75t$ и G не содержит элементов порядка 25, либо $p = 3$, $\alpha_3(g) = 30s$, $\alpha_2(g) = 45t$, либо $p = 2$, $\alpha_2(g) = 0$ и $\alpha_3(g) = 20s$;*

(2) *если Ω является n-кликой, то либо $p = 13$, $n = 1$, $\alpha_3(g) = 130s + 26$ и $\alpha_2(g) = 195t + 39$, либо $p = 2$, $n = 2, 4, 6$, $\alpha_3(g) = 20s - 4n$ и $\alpha_2(g) = 30t - 6n$;*

(3) *если Ω состоит из m вершин, попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ, то $p = 3$ и либо $m = 3$, $\alpha_3(g) = 30s - 12 \leqslant 180$, $s = 1, 2, \ldots, 6$, $\alpha_2(g) = 45t - 18$, либо $m = 6$, $\alpha_3(g) = 6, 36$, $\alpha_2(g) = 45t - 36$;*

(4) *если $[a] \subset \Omega$ для некоторой вершины a, то $p = 2$.*

$\lhd$ Пусть Ω — пустой граф. Так как $300 = 12 \cdot 25$, то $p = 2, 3$ или 5. Для $i > 0$ положим $\alpha_i(g) = pw_i$.

Пусть $p = 5$. Так как $\chi_2(g) - 117$ делится на 5, то $\alpha_3(g) = 50s$. Далее, $\chi_3(g) - 104$ делится на 5, поэтому $\alpha_2(g) = 75t$. Допустим, что G содержит элемент f порядка 25, $g = f^5$. Тогда $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/10 - 3$ и $\chi_2(g) - 117$ делится на 25, поэтому $\alpha_3(g) = 200$, $\chi_3(g) = \alpha_2(g)/15 - 16$ и $\chi_3(g) - 104$ делится на 25, поэтому $\alpha_2(g) = 300$, противоречие.

Пусть $p = 3$. Так как $\chi_2(g) - 117$ делится на 3, то $\alpha_3(g) = 30s$. Далее, $\chi_3(g) - 104$ делится на 3, поэтому $\alpha_2(g) = 45t$.

Пусть $p = 2$. Так как $c_2 = 5$, то $\alpha_2(g) = 0$. Далее, число $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/10 - 3$ нечетно, поэтому $\alpha_3(g) = 20s$.

Пусть Ω является n-кликой. Если $n = 1$, то p делит 39 и 26, поэтому $p = 13$. Далее, $\chi_2(g) = (4 + \alpha_3(g))/10 - 3$ и $\alpha_3(g) = 130s + 26$, $\chi_3(g) = (6 + \alpha_2(g))/15 - 16$ и $\alpha_2(g) = 195t + 39$.

Пусть $n > 1$. Ввиду границы Дельсарта имеем $n \leqslant 1 + 39/6$ и p делит 26 и $300 - n$. Так как $a_1 = 8$, то p делит $10 - n$, $p = 2$, $n = 2, 4, 6$, число $\chi_2(g) = (4n + \alpha_3(g))/10 - 3$ нечетно и $\alpha_3(g) = 20s - 4n$. Далее, число $\chi_3(g) = (6n + \alpha_2(g))/15 - 16$ четно и $\alpha_2(g) = 30t - 6n$.

Пусть Ω состоит из m вершин, попарно находящихся на расстоянии 3. Тогда Ω является кликой в Γ_3 и $m \leqslant 6$. Далее, p делит 39, $300 - m$ и $6 - m$, поэтому $p = 3$, число $\chi_2(g) = (4m + \alpha_3(g))/10 - 3$ делится на 3, поэтому $\alpha_3(g) = 30s - 4m$. Отсюда $m = 3$, $\alpha_3(g) = 30s - 12 \leqslant 180$ и $s = 1, 2, ..., 6$ или $m = 6$, $\alpha_3(g) = 6, 36$. Число $\chi_3(g) - 104 = (6m + \alpha_2(g))/15 - 120$ делится на 3, поэтому $\alpha_2(g) = 45t - 6m$.

Пусть $[a] \subset \Omega$ для некоторой вершины a. Если $p \geqslant 5$, то $[u] \cap [a]$ является 5-кликой для $u \in \Gamma_2(a) - \Omega$, противоречие с тем, что для двух вершин $b, c \in [u] \cap [a]$ подграф $[b] \cap [c]$ содержит a, 3 вершины из $[u] \cap [a]$ и 5 вершин из $u^{\langle g \rangle}$. Если $p = 3$, то с учетом равенств $p^1_{33} = 8$ и $p^3_{13} = 3$ имеем $\Gamma_3(a) \subset \Omega$. Противоречие с тем, что $|\Omega| \leqslant 60$. $\rhd$

Лемма 6. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω содержит вершины b, c, находящиеся на расстоянии 2 в Γ, то $p \leqslant 3$;*

(2) *если $p = 3$ и $|C_G(g)|$ делится на 25, то Ω — пустой граф и либо $\alpha_3(g) = 300$, либо $\alpha_3(g) = \alpha_1(g) = 150$, либо $\alpha_2(g) = 225$, $\alpha_1(g) = 75$.*

$\lhd$ Если $p \geqslant 11$, то Ω — вполне регулярный граф с $\lambda = 8$, $\mu = 5$ и степени $k' \geqslant 10$. В случае $\Gamma_3(a) \subset \Omega$ с учетом равенств $p^3_{13} = 3$ и $p^1_{33} = 2$, получим $[a] \subset \Omega$, противоречие с леммой 11. Значит, $p = 11$ и $|\Gamma_3(a) \cap \Omega| = 4$ для любой вершины $a \in \Omega$. Противоречие с тем, что в этом случае получим $|\Omega(a)| = 6$.

В случае $p = 7$ для $a \in \Omega$ подграф $\Gamma_3(a) \cap \Omega$ имеет 12 вершин, $|\Omega(a)| = 18$ и $5|\Omega_2(a)| = 16y + 9(18 - y)$, поэтому $y = 4$ и $|\Omega_2(a)| = 38$, противоречие с тем, что $|\Omega| \leqslant 60$.

В случае $p = 5$ для $a \in \Omega$ подграф $\Gamma_3(a) \cap \Omega$ имеет 16 вершин, $|\Omega(a)| = 24$ и $|\Omega_2(a)| \geqslant 24 \cdot 15/5$, противоречие.

Итак, $p = 2, 3$.

Пусть $p = 3$ и $|C_G(g)|$ делится на 25. Если Ω — непустой граф, то $|\Omega|$ делится на 75, противоречие. Значит, Ω — пустой граф и числа $\alpha_3(g) = 30s$, $\alpha_2(g) = 45t$ делятся на 25. Отсюда либо $\alpha_3(g) = 300$, либо $\alpha_3(g) = \alpha_1(g) = 150$, либо $\alpha_2(g) = 225$, $\alpha_1(g) = 75$. $\rhd$

3. Граф с массивом пересечений $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$: вершинно симметричный случай

До конца работы будем предполагать, что G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ и 13 делит $|G|$. Тогда $|G : G_a| = 300$ и $\pi(G) = \{2, 3, 5, 13\}$.

Лемма 7. *Если f — элемент порядка 13 из G, g — элемент простого порядка $p \neq 13$ из $C_G(f)$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, то $p = 2$, $|\Omega| = 14$, $\alpha_3(g) = 104$, $\alpha_2(g) = 156$ и $\alpha_2(g) = 26$, в частности, $|C_G(f)|$ не делится на 4.*

$\lhd$ Ввиду теоремы 1 $\mathrm{Fix}(f) = \{a\}$ — одновершинный граф, $\alpha_3(f) = 130s + 26$ и $\alpha_2(f) = 195t + 39$.

Если Ω является n-кликой, то $p = 2$, $n = 2, 4, 6$. Противоречие с действием f на Ω.

Если Ω состоит из m вершин, попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ, то $m = 3$ или $m = 6$, противоречие.

Пусть Ω содержит вершины b, c, находящиеся на расстоянии 2 в Γ. Тогда $|\Omega| = 13l + 1$. Если $p = 3$, то $l = 2$, $\chi_2(g) = (52l + 4 + \alpha_3(g))/10 - 3$ делится на 3, поэтому $\alpha_3(g) = 30m + 12$. Далее, $\chi_3(g) = (78l + 6 + \alpha_2(g))/15 - 16$ и $\alpha_2(g) = 45n + 18$. Так как числа $\alpha_3(g)$, $\alpha_2(g)$ делятся на 13, то $5m + 2$ и $5n + 2$ делятся на 13, поэтому $m = n = 10$, противоречие.

Если $p = 2$, то $l = 1, 3$, число $\chi_2(g) = (52l + 4 + \alpha_3(g))/10 - 3$ нечетно, поэтому $\alpha_3(g) = 20m + 8l - 4$. Далее, число $\chi_3(g) = (78l + 6 + \alpha_2(g))/15 - 16$ четно и $\alpha_2(g) = 30n + 12l - 6$. Так как числа $\alpha_3(g)$, $\alpha_2(g)$ делятся на 13, то $5m + 2l - 1$ и $5n + 2l - 1$ делятся на 13. Если $l = 1$, то $m = n = 5$, а если $l = 3$, то $m = n = 10$. Отсюда $\alpha_3(g) = 104$, $\alpha_2(g) = 156$. $\rhd$

Лемма 8. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *разрешимый радикал $S(G)$ является $\{2, 3\}$-группой;*

(2) *цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/S(G)$ изоморен $L_2(25)$, $\bar{T}_a$ — диэдральная группа порядкса 26 и $S(G) = 1$.*

$\lhd$ Так как $v = 300$, то $S(G)$ является $\{2,3,5\}$-группой. Ввиду леммы 7 число $|S(G)|$ не делится на 5.

Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. По [7, теорема 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(25)$, $U_3(4)$, ${}^2F_4(2)'$. Далее, $|\bar{T} : \bar{T}_a|$ делится на 25 и делит 300. Поэтому $\bar{T} \cong L_2(25)$, $\bar{T}_a$ — диэдральная группа порядка 26 индекса 300 в $\bar{T}$. Отсюда $S(G) = 1$. $\rhd$

Завершим доказательство следствия 1. По лемме 8 цоколь T группы G изоморфен $L_2(25)$ и T_a — диэдральная группа порядка 26. Компьютерные вычисления показывают, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39,30,4;1,5,36\}$ не возникает. Следствие 1 доказано.

Литература

1. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-regular Graphs.—Berlin etc: Springer-Verlag, 1989.
2. *Degraer J.* Isomorph-free exhaustive generation algorithms for association schemes: PhD Thesis.—Univ. Ghent, 2007.—221 pp.
3. *Jurisic A., Vidali J.* Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3 // Des. Codes Cryptogr.—2012.—Vol. 65.—P. 29–47.
4. *Behbahani M., Lam C.* Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms // Discrete Math.—2011.—Vol. 311.—P. 132–144.
5. *Cameron P. J.* Permutation Groups.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.—(London Math. Soc. Student Texts № 45).
6. *Гаврилюк А. Л., Махнев А. А.* Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56,45,1;1,9,56\}$ // Докл. АН.–2010.—Т. 432, № 5.—С. 512–515.
7. *Zavarnitsine A. V.* Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sibirean Electr. Math. Reports.—2009.—Vol. 6.—P. 1–12.

Статья поступила 20 декабря 2016 г.

Гутнова Алина Казбековна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: gutnovaalina@gmail.com

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики УрО РАН,
зав. отделом алгебры и топологии
РОССИЯ, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: makhnev@imm.uran.ru

ON AUTOMORPHISMS OF A DISTANCE-REGULAR GRAPH WITH INTERSECTION OF ARRAYS $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$

Gutnova A. K., Makhnev A. A.

J. Koolen posed the problem of studying distance-regular graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with the second eigenvalue $\leqslant t$ for a given positive integer t. This problem is reduced to the description of distance-regular graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with non-principal eigenvalue t for $t = 1, 2, \ldots$ Let Γ be a distance regular graph of diameter 3 with eigenvalues $\theta_0 > \theta_1 > \theta_2 > \theta_3$. If $\theta_2 = -1$, then by Proposition 4.2.17 from the book «Distance-Regular Graphs» (Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.) the graph Γ_3 is strongly regular and Γ is an antipodal graph if and only if Γ_3 is a coclique. Let Γ be a distance-regular graph and the graphs Γ_2, Γ_3 are strongly regular. If $k < 44$, then Γ has an intersection array $\{19, 12, 5; 1, 4, 15\}$, $\{35, 24, 8; 1, 6, 28\}$ or $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$. In the first two cases the graph does not exist according to the works of Degraer J. «Isomorph-free exhaustive generation algorithms for association schemes» and Jurisic A., Vidali J. «Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3». In this paper we found the possible automorphisms of a distance regular graph with an array of intersections $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$.

Key words: regular graph, symmetric graph, distance-regular graph, automorphism groups of graph.