Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 3, С. 3–10

УДК **517.98**

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА БЛУМА — ХАНСОНА В БАНАХОВЫХ РЕШЕТКАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

А. Н. Азизов, В. И. Чилин

Хорошо известно, что линейное сжатие T в гильбертовом пространстве обладает так называемым свойством Блума — Хансона: слабая сходимость степеней T^n эквивалентна сильной сходимости средних Чезаро $\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} T^{k_n}$ для любой строго возрастающей последовательности натуральных чисел $\{k_n\}$. Аналогичное свойство верно и для линейных сжатий в l_p-пространствах ($1 \leqslant p < \infty$), для линейных сжатий в L^1 или для положительных линейных сжатий в L^p-пространствах ($1 < p < \infty$). Мы доказываем, что это свойство Блума — Хансона справедливо и для любых линейных сжатий в сепарабельных p-выпуклых банаховых решетках последовательностей.

Ключевые слова: банахова идеальная решетка, p-выпуклость, линейное сжатие, эргодическая теорема.

1. Введение

Хорошо известно, что для любого линейного сжатия T в рефлексивном банаховом пространстве X средние Чезаро $A_n(T) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k$ сходятся в X в сильной операторной топологии (см., например, [8, гл. 8, § 5]). В частности, для любого сохраняющего меру отображения $\tau : (\Omega, \mathscr{F}, \mu) \to (\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, где $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ — измеримое пространство с полной σ-конечной мерой μ, средние Чезаро $A_n(T)$ сходятся сильно в $L_p := L_p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, $1 < p < \infty$ (здесь $(Tf)(\omega) = f(\tau(\omega))$. В случае, когда μ — вероятностная мера и τ — перемешивающее преобразование, эргодическая теорема Блума — Хансона [6] утверждает, что для любого $f \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, имеет место сходимость

$$\left\| \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} (T^{k_j} f)(\omega) - \int\limits_{\Omega} f\, d\mu \right\|_p \to 0$$

для всех строго возрастающих последовательностей $k_0 < k_1 < \ldots$ натуральных чисел. В частности, отсюда следует, что последовательность $\{T^n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ сходится слабо в L_p для всех $f \in L_p$ [10, гл. 8, утверждение 1.2].

В связи с этим, естественно, возникает задача о выделении класса банаховых пространств X, в которых слабая сходимость последовательности $\{T^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ при действии линейного сжатия T в X влечет сильную сходимость средних Чезаро $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}$ для каждой подпоследовательности $\{T^{k_j}\}_{j=0}^{\infty}$ последовательности $\{T^n\}_{n=0}^{\infty}$.

Обозначим через $\mathscr{C}(X)$ множество всех линейных сжатий в банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$, а через $\mathfrak{N}$ — множество всех строго возрастающих последовательностей натуральных чисел. Говорят, что банахово пространство X имеет свойство Блума — Хансона относительно подмножества $\mathscr{A} \subset \mathscr{C}(X)$, если для любых $T \in \mathscr{A}$, $x \in X$, либо последовательность $\{T^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ не сходится слабо, либо слабая сходимость этой последовательности к элементу $x_0 \in X$ влечет сходимость $\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\right\|_X \to 0$.

Следует отметить, что согласно [10, гл. 8, утверждение 1.2] условие

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\right\|_X \to 0 \qquad \big(\forall\,\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N},\ x_0 \in X\big)$$

всегда влечет слабую сходимость последовательности $\{T^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. При этом с помощью аргументов из доказательства импликации (ii) $\to$ (i) в теореме 1.1 работы [1], устанавливается, что слабым пределом последовательности $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ обязательно является элемент x_0.

Говорят, что банахово пространство X имеет условное свойство Блума — Хансона относительно подмножества $\mathscr{A} \subset \mathscr{C}(X)$, если для любого $T \in \mathscr{A}$ слабая сходимость последовательности $\{T^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ при всех $x \in X$ имеет место тогда и только тогда, когда последовательность $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x)$ сходится по норме в X для каждого $x \in X$. Ясно, что свойство Блума — Хансона относительно $\mathscr{A}$, вообще говоря, сильнее условного свойства Блума — Хансона относительно $\mathscr{A}$.

Для гильбертова пространства H свойство Блума — Хансона относительно $\mathscr{C}(H)$ независимо получено в работах [1, 12, 14]. Кроме того, в [1] установлено условное свойство Блума — Хансона для пространства L_1 относительно $\mathscr{C}(L_1)$, а в работе [3] — для пространств L_p, $1 < p < \infty$, относительно множества $\mathscr{A}$ всех положительных линейных сжатий в L_p. В то же время, в работе [2] приведены примеры банаховых пространств X, которые не обладают свойством Блума — Хансона относительно $\mathscr{C}(X)$.

В работе [4] доказано, что для любого положительного линейного сжатия T пространства L_p, $1 < p < \infty$, $0 \leqslant f \in L_p$, слабая сходимость последовательности $\{T^n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ влечет сходимость

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(f) - f_0\right\|_{L_p} \to 0 \qquad \big(\forall\,\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N},\ f_0 \in L_p\big).$$

Аналогичное свойство положительных линейных сжатий в функциональных пространствах Орлича с равномерно гладкой нормой Орлича получено в [16].

Наличие свойства Блума — Хансона в пространствах L_p, $1 \leqslant p < \infty$, относительно $\mathscr{C}(L_p)$ в случае произвольных пространств с мерой до сих пор не установлено. Известен только следующий результат В. Мюллера и Ю. Тамилова [17, теорема 2.5].

Теорема 1.1. *Пусть T — линейное сжатие на банаховом пространстве последовательностей l_p, $1 \leqslant p < \infty$. Тогда для любого элемента $x \in l_p$ последовательность $\{T^n(x)\}$ слабо сходится к $x_0 \in l_p$ в том и только в том случае, когда $\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\right\|_p \to 0$ для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.*

Отметим также недавнюю работу [11], где с помощью свойства асимптотической гладкости выделяется класс действительных симметричных пространств последовательностей, для которых сохраняется вариант теоремы 1.1.

Основная цель настоящей работы состоит в получении эргодической теоремы Блума — Хансона (варианта теоремы 1.1) для действительных (комплексных) p-выпуклых сепарабельных идеальных банаховых решеток последовательностей). Доказательство этой теоремы существенно использует свойство p-выпуклости, что отличает наш подход от методов работы [11].

2. Предварительные сведения

Пусть $s(\mathbb{K})$ — линейное пространство всех последовательностей комплексных ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) или действительных ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) чисел, E — бесконечномерное идеальное линейное подпространство в $s(\mathbb{K})$ (свойство идеальности для E означает, что из условий $x \in E$, $y \in s(\mathbb{K})$ и $|y| \leqslant |x|$ следует включение $y \in E$).

Носителем элемента $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$ называют подмножество $\operatorname{supp} x = \{n \in \mathbb{N} : \xi_n \neq 0\}$ во множестве $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел. Поскольку $\dim E = \infty$, то $\operatorname{supp} E = \bigcup_{x \in E} \operatorname{supp} x$ есть бесконечное подмножество в $\mathbb{N}$, и поэтому, заменяя $\mathbb{N}$ на $\operatorname{supp} E$, можно считать, что $\operatorname{supp} E = \mathbb{N}$.

Обозначим через c_{00} линейное подпространство в $s(\mathbb{K})$, состоящее из финитных последовательностей вида $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n(x)}, 0, 0, \ldots\}$. Из равенства $\operatorname{supp} E = \mathbb{N}$ следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$, что $\lambda = |\xi_k| \neq 0$. Поэтому для орта $e_k = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}$, где единица стоит на k-ом месте, верно неравенство $e_k \leqslant \frac{1}{\lambda}|x| \in E$, что влечет включение $e_k \in E$. Это означает, что $c_{00} \subset E$.

Пусть $\|\cdot\|_E$ — банахова монотонная норма на E. Последнее означает, что из условий $x, y \in E$ и $|x| \leqslant |y|$ следует, что $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$. В этом случае пару $(E, \|\cdot\|_E)$ называют *банаховым идеальным пространством* (БИП) в $s(\mathbb{K})$ [9, гл. 4, § 3]. При этом в силу равенства $\operatorname{supp} E = \mathbb{N}$, БИП $(E, \|\cdot\|_E)$ является фундаментальным идеальным пространством [9, гл. 4, § 3].

Говорят, что БИП $(E, \|\cdot\|_E)$ имеет порядково непрерывную норму, если из условий

$$0 \leqslant x^{(n)} \downarrow 0, \quad x^{(n)} \in E, \ n \in \mathbb{N},$$

следует, что $\|x^{(n)}\|_E \to 0$. Известно [9, гл. 4, § 3, теорема 3], что идеальное банахово фундаментальное пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ в $s(\mathbb{K})$ сепарабельно тогда и только тогда, когда норма $\|\cdot\|_E$ порядково непрерывна.

Банахова решетка $(E, \|\cdot\|_E)$ называется *p-выпуклой* ($1 \leqslant p < \infty$), если существует такая константа $M > 0$, что для любого конечного набора элементов $\{x_i\}_{i=1}^{n} \subset E$ верно следующее неравенство:

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_E \leqslant M \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_E^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Наименьшая среди таких констант M называется константой p-выпуклости пространства E и обозначается через $M^{(p)}(E)$.

Каждая банахова решетка E является 1-выпуклой, при этом $M^{(1)}(E) = 1$. Кроме того, p-выпуклая банахова решетка всегда удовлетворяет верхней p-оценке, т. е. существует такая константа $M > 0$, что для любого конечного набора попарно дизъюнктных элементов $\{x_i\}_{n=1}^{n} \subset E$ верно неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|_E \leqslant M \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_E^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

3. Теорема Блума — Хансона в сепарабельных банаховых идеальных пространствах последовательностей

Как уже отмечалось во введении, для любого линейного ограниченного оператора T, действующего в БИП $(E, \|\cdot\|_E) \subset s(\mathbb{K})$, сходимость $\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}x - x_0\right\|_E \to 0$ для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$ и некоторого $x_0 \in E$ всегда влечет слабую сходимость последовательности $\{T^n(x)\}$ в E к элементу x_0. Следующая теорема устанавливает свойство Блума — Хансона для каждого сепарабельного p-выпуклого ($p > 1$) БИП $E \subset s(\mathbb{K})$.

Теорема 3.1. *Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ — бесконечномерное p-выпуклое сепарабельное банахово идеальное подпространство в $s(\mathbb{K})$ с константой p-выпуклости $M^{(p)}(E) = 1$, $p > 1$. Тогда для любого линейного сжатия $T : E \to E$ из слабой сходимости в $(E, \|\cdot\|_E)$ последовательности $\{T^n(x)\}$ к элементу $x_0 \in E$ следует сходимость*

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\right\|_E \to 0$$

для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

$\lhd$ Если $T^n(x) \to x_0$ слабо в E, то $T^{n+1}(x) = T(T^n(x)) \to T(x_0)$ слабо и поэтому $T(x_0) = x_0$. В случае $x_0 \neq 0$ заменяем элемент x_0 на $(x - x_0)$, и будем считать, не ограничивая общности, что $T^n(x) \to 0$ слабо. Таким образом, для доказательства утверждения теоремы следует установить, что слабая сходимость $T^n(x) \to 0$ в E влечет сходимость

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x)\right\|_E \to 0$$

при $n \to \infty$ для любой последовательности $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

Поскольку T сжатие, то $\|T^{n+1}(x)\|_E \leqslant \|T^n(x)\|_E$, и поэтому предел $\lim_{n\to\infty} \|T^n(x)\|_E$ существует. Если этот предел равен нулю, то утверждение теоремы 3.1 очевидно. Предположим, что этот предел равен $\alpha \neq 0$. Заменяя, если необходимо, элемент x на элемент $\frac{x}{\alpha}$, можно считать, что $\lim_{n\to\infty} \|T^n(x)\|_E = 1$.

Зафиксируем $\delta > 0$ и выберем натуральное число t так, чтобы выполнялось неравенство $t^{\frac{1}{p}-1} < \frac{\delta}{2}$. Поскольку $1 + 2^p s < 2^p(s+1)$ для всех $s \in \mathbb{N}$, то существует такое $\varepsilon \in (0,1)$, что

$$\big((1+\varepsilon)^p + 2^p s\big)^{\frac{1}{p}} < 2(s+1)^{\frac{1}{p}} - (s+1)\varepsilon \tag{1}$$

для всех $s = 1, \ldots, t-1$.

Согласно равенству $\lim_{n\to\infty} \|T^n(x)\|_E = 1$, существует такое $k \in \mathbb{N}$, что верно неравенство

$$\left\|T^k(x)\right\|_E < 1 + \varepsilon. \tag{2}$$

Рассмотрим оператор проектирования P_r в E на линейную оболочку $\mathrm{Lin}\{e_1, \ldots, e_r\}$ ортов $e_1, e_2, \ldots, e_r \in E$, т. е.

$$P_r(\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{\xi_1, \ldots, \xi_r, 0, 0, \ldots\} = \sum_{n=1}^{r} \xi_n e_n.$$

Обозначая через I тождественный оператор в E, в силу порядковой непрерывности нормы $\|\cdot\|_E$ имеем, что $\|(I - P_r)T^k(x)\|_E \to 0$ при $r \to \infty$. Следовательно, существует такое $r \in \mathbb{N}$, что верно неравенство

$$\left\|(I - P_r)T^k(x)\right\|_E < \varepsilon. \tag{3}$$

Так как $P_r(E) = \mathrm{Lin}\{e_1, \dots, e_r\}$ — конечномерное линейное подпространство в E и $T^{k+j}(x) \to 0$ слабо при $j \to \infty$, то найдется такое $d \in \mathbb{N}$, для которого

$$\left\| P_r T^{k+j}(x) \right\|_E < \varepsilon \tag{4}$$

при всех $j \geqslant d$.

Отметим, что из неравенств $\|P_r(x)\|_E \leqslant \|x\|_E$ и $\|(I - P_r)(x)\|_E \leqslant \|x\|_E$ следует, что

$$\|P_r\|_{E\to E} \leqslant 1, \quad \|I - P_r\|_{E\to E} \leqslant 1. \tag{5}$$

Покажем теперь, что

$$\left\| T^{m_1}(x) + \ldots + T^{m_s}(x) \right\|_E \leqslant 2s^{\frac{1}{p}}, \tag{6}$$

где $k \leqslant m_1 < m_2 < \ldots < m_s$, $s \leqslant t$ и $m_{i+1} - m_i \geqslant d$ для всех $i = 1, \dots, s-1$.

Докажем неравенство (6), используя индукцию по s. Для $s = 1$ неравенство (6) верно в силу выбора числа ε. Предположим, что неравенство (6) верно для $s < t$ и последовательность $m_1, m_2, \dots, m_{s+1}$ удовлетворяет указанным выше требованиям. Тогда

$$\begin{gathered}
\left\| T^{m_1}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}}(x) \right\|_E = \left\| T^{m_1-k}\big(T^k(x) + T^{m_2-m_1+k}(x) \right. \\
\left. + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x)\big) \right\|_E \leqslant \left\| T^k x + T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x) \right\|_E \\
\leqslant \left\| P_r T^k x + (I - P_r)\big(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x)\big) \right\|_E \\
+ \left\| (I - P_r) T^k(x) \right\|_E + \left\| P_r\big(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x)\big) \right\|_E.
\end{gathered}$$

В силу неравенств (3) и (4) имеем, что

$$\left\| (I - P_r) T^k(x) \right\|_E + \left\| P_r\big(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x)\big) \right\|_E < (s+1)\varepsilon.$$

Поскольку, банахова решетка E является p-выпуклой с константой p-выпуклости $M^{(p)}(E) = 1$, то E удовлетворяет верхней p-оценке с той же константой, т. е.

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|_E \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_E^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

в случае, когда элементы $\{x_i\}_{i=1}^n \subset E$ попарно дизъюнктны.

Так как элементы $(I - P_r)(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x))$ и $P_r T^k(x)$ попарно дизъюнктны, то, используя предположение индукции (6) и неравенства (2), (5), получим следующую оценку:

$$\begin{gathered}
\left\| P_r T^k(x) + (I - P_r)\big(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x)\big) \right\|_E \\
\leqslant \Big(\left\| P_r T^k(x) \right\|_E^p + \left\| (I - P_r)\big(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x)\big) \right\|_E^p \Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \big((1+\varepsilon)^p + 2^p s\big)^{\frac{1}{p}}.
\end{gathered}$$

Следовательно, в силу неравенства (1) имеем, что

$$\left\| T^{m_1}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}}(x) \right\|_E \leqslant \big((1+\varepsilon)^p + 2^p s\big)^{\frac{1}{p}} + (s+1)\varepsilon < 2(s+1)^{\frac{1}{p}}.$$

Таким образом, неравенство (6) верно для каждого $s \leqslant t$.

Пусть $\{n_i\}_{i=0}^{\infty}$ — произвольная строго возрастающая последовательность натуральных чисел, и пусть $N > k$ — достаточно большое натуральное число. Тогда $N = k + mt + r$, где $0 \leqslant r < t$, и m есть натуральное число, для которого $m \geqslant d$. Используя доказанное неравенство (6), получим, что

$$\left\|\sum_{j=0}^{N} T^{n_j}(x)\right\|_E \leqslant \left\|\sum_{j=0}^{k+r} T^{n_j}(x)\right\|_E + \sum_{s=1}^{m}\left\|\sum_{j=0}^{t-1} T^{n_{k+r+s+jm}}(x)\right\|_E \leqslant (k+r+1)\|x\|_E + m\cdot 2\cdot t^{\frac{1}{p}}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{N+1}\left\|\sum_{j=0}^{N} T^{n_j}(x)\right\|_E \leqslant \frac{(k+r+1)\|x\|_E}{N+1} + \frac{2mt^{\frac{1}{p}}}{tm} = \frac{(k+r+1)\|x\|_E}{N+1} + 2t^{\frac{1}{p}-1},$$

и согласно выбору t,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\left\|\sum_{j=0}^{N} T^{n_j}(x)\right\|_E \leqslant 2t^{\frac{1}{p}-1} < \delta.$$

Так как $\delta > 0$ произвольное, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left\|\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x)\right\|_E = 0.$$

4. Примеры

Приведем примеры бесконечномерных сепарабельных банаховых идеальных подпространств $(E, \|\cdot\|_E) \subset s(\mathbb{K})$, для которых верна теорема 3.1.

4.1. Пусть Φ — функция Орлича, т. е. $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — выпуклая непрерывная в нуле функция, для которой $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(u) > 0$ при $u \neq 0$. Пусть

$$l_\Phi = l_\Phi(\mathbb{N}) = \left\{x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in s(\mathbb{K}) : \sum_{n=1}^{\infty}\left(\Phi\left(\frac{|\xi_n|}{\lambda}\right)\right) < \infty \ \text{ для некоторого } \ \lambda > 0\right\}$$

— пространство Орлича последовательностей, снабженное нормой Люксембурга

$$\|x\|_\Phi = \inf\left\{\lambda > 0 : \sum_{n=1}^{\infty}\left(\Phi\left(\frac{|\xi_n|}{\lambda}\right)\right) \leqslant 1\right\}$$

(см., например, [13, т. 1, гл. 4]). Ясно, что $(l_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ есть бесконечномерное банахово идеальное подпространство в $s(\mathbb{K})$.

Говорят, что функция Орлича Φ удовлетворяет Δ_2-условию в нуле, если $\limsup_{u\to 0}\frac{\Phi(2u)}{\Phi(u)} < \infty$. В этом случае пространство Орлича $(l_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ является сепарабельным [13, т. 1, гл. 4, теорема 4.a.4]. Согласно теореме 5.5 из [15] банахова решетка l_Φ является p-выпуклой (с константой 1) в том и только в том случае, когда функция $\Phi(u^{1/p})$ выпукла на $(0,1)$ и $\limsup_{u\to 0}\frac{2\Phi(u^{1/p})}{\Phi((2u)^{1/p})} \geqslant 1$. Таким образом, согласно теореме 3.1, при выполнении последних условий для $p > 1$ в случае, когда Φ удовлетворяет Δ_2-условию в нуле, пространство Орлича $(l_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ имеет свойство Блума — Хансона.

4.2. Пусть c_0 — банахова решетка всех сходящихся к нулю последовательностей $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ комплексных (действительных) чисел. Обозначим через $x^* = \{\xi_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ невозрастающую перестановку последовательности чисел $|x| = \{|\xi_n|\}_{n=1}^{\infty} \in c_0$. Зафиксируем

$1 \leqslant p, q < \infty$ и рассмотрим пространство Лоренца $l_{p,q}$ всех таких последовательностей $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset c_0$, для которых

$$\|\{\xi_n\}\|_{p,q} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n^*)^q \Big(n^{\frac{q}{p}} - (n-1)^{\frac{q}{p}} \Big) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Известно, что при $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$ пространство $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ есть сепарабельное банахово симметричное пространство последовательностей (см., например, [5, гл. 4, § 4]), при этом $l_{p,q}$ q-выпукло с константой q-выпуклости $M^{(q)}(l_{p,q}) = 1$ [7, утверждение 3.3]. Следовательно, в случае $1 < q \leqslant p < \infty$ банахово пространство $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ имеет свойство Блума — Хансона.

4.3. Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ — произвольное бесконечномерное сепарабельное p-выпуклое банахово идеальное подпространство в $s(\mathbb{K})$, где $p > 1$. Согласно [13, т. 2, гл. 1, утверждение 1.d.2] в E существует норма $\|\cdot\|'_E$, эквивалентная норме $\|\cdot\|_E$, относительно которой пара $(E, \|\cdot\|'_E)$ есть p-выпуклое банахово идеальное подпространство в $s(\mathbb{K})$ с константой p-выпуклости $M^{(p)}((E, \|\cdot\|'_E)) = 1$. Следовательно, для $(E, \|\cdot\|'_E)$ верно утверждение теоремы 3.1.

4.4. В силу [13, т. 2, гл. 1, теорема 1.f.7] любая банахова решетка, имеющая верхнюю r-оценку для $r > 1$, является p-выпуклой банаховой решеткой для любого $1 < p < r$. Следовательно, согласно п. 4.3 любое бесконечномерное сепарабельное банахово идеальное подпространство в $s(\mathbb{K})$, удовлетворяющее верхней r-оценке при $r > 1$, имеет эквивалентную норму $\|\cdot\|'_E$, относительно которой $(E, \|\cdot\|'_E)$ обладает свойством Блума — Хансона.

Известно, что в случае $1 < p < q < \infty$ функция $\|\cdot\|_{p,q}$ есть полная сепарабельная квазинорма на векторной решетке $l_{p,q}$, удовлетворяющая верхней p-оценке [7], при этом на $l_{p,q}$ существует норма $\|\cdot\|_{(p,q)}$, эквивалентная квазинорме $\|\cdot\|_{p,q}$, относительно которой $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{(p,q)})$ есть банахово симметричное пространство последовательностей (см., например, [5, гл. 4, § 4]). Поэтому из сказанного выше следует, что существует норма $\|\cdot\|'_{p,q}$, эквивалентная норме $\|\cdot\|_{(p,q)}$, относительно которой пара $(l_{p,q}, \|\cdot\|'_{p,q})$ имеет свойство Блума — Хансона.

В заключение заметим, что примеры из пунктов 4.3 и 4.4 выделяют классы банаховых пространств с положительным ответом на проблему 15 из [11].

Литература

1. *Akcoglu M., Sucheston L.* On operator convergence in Hilbert space and in Lebesgue space // Period. Math. Hungar.—1972.—Vol. 2.—P. 235–244.
2. *Akcoglu M. A., Huneke J. P. and Rost H.* A couterexample to Blum–Hanson theorem in general spaces // Pacific J. of Math.—1974.—Vol. 50.—P. 305–308.
3. *Akcoglu M. A., Sucheston L.* Weak convergence of positive contractions implies strong convergence of averages // Zeitschrift feur Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete.—1975.—Vol. 32.—P. 139–145.
4. *Bellow A.* An L_p-inequality with application to ergodic theory // Hous. J. Math.—1975.—Vol. 1, № 1.—P. 153–159.
5. *Bennet C., Sharpley R.* Interpolation of Operators.—N. Y.: Acad. Press, Inc., 1988.
6. *Blum J. R., Hanson D. L.* On the mean ergodic theorem for subsequences // Bull. Amer. Math. Soc.—1960.—Vol. 66.—P. 308–311.
7. *Creekmore J.* Type and cotype in Lorentz of $L_{p,q}$ spaces // Indag. Math.—1981.—Vol. 43.—P. 145–152.
8. *Dunford N., Schwartz J. T.* Linear Operators. Part I: General Theory.—Wiley, 1988.
9. *Kantorovich L. V., Akilov G. P.* Functional Analysis.—Oxford–N. Y. etc: Pergamon Press, 1982.

10. *Krengel U.* Ergodic Theorems. De Gruyter Stud. Math. Vol. 6. Walter de Gruyter.—Berlin–N. Y., 1985.
11. *Lefevre P., Matheron E. and Primot A.* Smoothness, asymptotic smoothness and the Blum–Hanson property // Israel J. Math.—2016.—Vol. 211.—P. 271–309.
12. *Lin M.* Mixing for Markov operators // Z. Wahrsch. Verw. Geb.—1971.—Vol. 19.—P. 231–242.
13. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces.—Berlin–N. Y.: Springer-Verlag, 1996.
14. *Jones L. K., Kuftinec V.* A note on the Blum–Hanson theorem // Proc. Amer. Math. Soc.—1970.—Vol. 30.—P. 202–203.
15. *Hao M. C., Kami'nska A. and Tomczak-Jaegermann N.* Orlicz spaces with convexity or concavity constant one // J. Math. Anal. Appl.—2006.—Vol. 320.—P. 303–321.
16. *Millet A.* Sur le théorème en moyenne d'Akcoglu–Sucheston // Mathematische Zeitschrift.—1980.—Vol. 172.—P. 213–237.
17. *Muller V., Tomilov Y.* Quasisimilarity of power bounded operators and Blum–Hanson property // J. Funct. Anal.—2007.—Vol. 246.—P. 385–399.

Статья поступила 28 октября 2016 г.

Чилин Владимир Иванович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
профессор кафедры алгебры и функционального анализа
УЗБЕКИСТАН, 100174, Ташкент, Вузгородок
E-mail: `vladimirchil@gmail.com, chilin@ucd.uz`

Азизов Азизхон Нодирхон угли
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
магистр кафедры алгебры и функционального анализа
УЗБЕКИСТАН, 100174, Ташкент, Вузгородок
E-mail: `azizov.07@mail.ru, saidaziz.azizov@gmail.com`

BLUM–HANSON ERGODIC THEOREM IN A BANACH LATTICES OF SEQUENCES

Azizov A. N., Chilin V. I.

It is well known that a linear contraction T on a Hilbert space has the so called Blum–Hanson property, i. e., that the weak convergence of the powers T^n is equivalent to the strong convergence of Ĉesaro averages $\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} T^{k_n}$ for any strictly increasing sequence $\{k_n\}$. A similar property is true for linear contractions on l_p-spaces $(1 \leqslant p < \infty)$, for linear contractions on L^1, or for positive linear contractions on L^p-spaces $(1 < p < \infty)$. We prove that this property holds for any linear contractions on a separable p-convex Banach lattices of sequences.

Key words: Banach solid lattice, p-convexity, linear contraction, ergodic theorem.